ファジィ錐によるファジィ順序関係の特徴づけ

弘前大学 大学院 理工学研究科　金 正道 (Masamichi KON)
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

概要

本稿では、実ベクトル空間上のファジィ順序関係をファジィ錐によって特徴づける。順序ベクトル空間における順序関係は pointed な凸錐と 1 対 1 の対応があることがよく知られている。その順序関係をファジィ化したファジィ順序関係が pointed な凸錐をファジィ化した pointed なファジィ凸錐と 1 対 1 の対応があることを示す。

1　はじめに

ファジィ集合の概念は、Zadeh [8] によって、曖昧性または不確実性を含む集合を表現するために、ファジィ集合論として最初に導入された。そして、ファジィ集合論は経済学, 経営学, 工学, 最適化理論やオペレーションズ・リサーチなど様々な分野に応用されている。

一方、ファジィ関係の概念が、Zadeh [9] によって導入された。そのなかで、クリスプ順序関係の反射性, 反対称性および推移性を一般化することによってファジィ順序関係が定義された。その後、ファジィ順序関係はさまざまな形で拡張されている。例えば、Zhang et al. [10] およびその参考文献参照。

本稿では、実ベクトル空間上のファジィ順序関係をファジィ錐によって特徴づける。順序ベクトル空間における順序関係は pointed な凸錐と 1 対 1 の対応があることがよく知られている。その順序関係をファジィ化したファジィ順序関係が pointed な凸錐をファジィ化した pointed なファジィ凸錐と 1 対 1 の対応があることを示す。さらに、実ベクトル空間のファジィ凸錐からその実ベクトル空間のすべての部分集合の集合上のファジィ前順序関係を 3 種類構成する。

2　準備

本節では、いくつかの記号を準備し、ファジィ錐の定義を与える。

$\mathbb{R}$ をすべての実数の集合とする。$a, b \in \mathbb{R}$ に対して、$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, $[a,b[$

$= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ および $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ とする。

X を集合とする。$\widetilde{A} : X \to [0,1]$ を X 上の**ファジィ集合** (fuzzy set) といい、X 上のすべてのファジィ集合の集合を $\mathcal{F}(X)$ とする。$\widetilde{A} \in \mathcal{F}(X)$ および $\alpha \in]0,1]$ に対して、$\widetilde{A}$ の $\boldsymbol{\alpha}$**-レベル集合**は

$$[\widetilde{A}]_\alpha = \{x \in X : \widetilde{A}(x) \geq \alpha\} \tag{2.1}$$

と定義される。クリスプ集合 $S \subset X$ に対して、S の指示関数 $c_S : X \to \{0,1\}$ は各 $x \in X$ に対して

$$c_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in S \\ 0 & \text{if } x \notin S \end{cases} \tag{2.2}$$

と定義される。

本稿を通して、E を実ベクトル空間とし、θ を E の零元とする。また、$\mathcal{P}(E)$ を E の部分集合すべての集合とする。$A, B \subset E$ および $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\} \tag{2.3}$$

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\} \tag{2.4}$$

とし

$$A - B = A + (-1)B \tag{2.5}$$

とする。

$K \subset E, K \neq \emptyset$ が**錐** (cone) であるとは、任意の $x \in K$ および任意の $\lambda \geq 0$ に対して $\lambda x \in K$ となるときをいう。錐 $K \subset E$ が**凸錐** (convex cone) であるとは、K が凸集合になるときをいう。錐 $K \subset E$ が **pointed** であるとは、$K \cap (-K) = \{\theta\}$ となるときをいう。

$\widetilde{K} \in \mathcal{F}(E)$ が**ファジィ錐** (fuzzy cone) であるとは、任意の $\alpha \in]0,1]$ に対して $[\widetilde{K}]_\alpha \subset E$ が錐になるときをいう。ファジィ錐については、例えば、Kon [3] および Kon and Kuwano [4] 参照。$\widetilde{K} \in \mathcal{F}(E)$ が**ファジィ凸錐** (fuzzy convex cone) であるとは、任意の $\alpha \in]0,1]$ に対して $[\widetilde{K}]_\alpha \subset E$ が凸錐になるときをいう。ファジィ錐 $\widetilde{K} \in \mathcal{F}(E)$ が **pointed** であるとは、任意の $\alpha \in]0,1]$ に対して $[\widetilde{K}]_\alpha \subset E$ が pointed になるときをいう。

3 順序ベクトル空間

本節では、順序ベクトル空間の順序関係に関するよく知られている結果を与える。

実ベクトル空間 E が**順序ベクトル空間** (ordered vector space) であるとは、E が以下の条件 (O_1) および (O_2) をみたすような順序関係 $\leq$（反射的, 反対称的, 推移的）をもつときをいう。

(O_1) $x, y, z \in E, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

(O_2) $x, y \in E, x \leq y, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$

また、$x \leq y$ を $y \geq x$ とも表す。

E を順序ベクトル空間とする。このとき

$$\{x \in E : x \geq \theta\} \tag{3.1}$$

を E の**正錐** (positive cone) とよぶ。E の正錐は pointed な凸錐になる。

逆に、（順序ベクトル空間である必要はない）単なる実ベクトル空間 E において、$K \subset E$ とし、$x, y \in E$ に対して

$$x \leq_K y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} y - x \in K \tag{3.2}$$

とする。このとき、K が pointed な凸錐ならば、$\leq_K$ は E 上の順序関係になり、E は順序ベクトル空間になり、K は E の正錐になる。また、K が凸錐ならば、$\leq_K$ は E 上の前順序関係（反射的, 推移的）になる。

実ベクトル空間 E に対して、(O_1) および (O_2) をみたす E 上の順序関係すべての集合と pointed な凸錐すべての集合の間には、(3.1) および (3.2) の対応により、1 対 1 の対応がある。詳しくは、例えば、[2, 6] 参照。

$K \subset E$ を凸錐とし、$A, B \in \mathcal{P}(E)$ に対して

$$A \leq_K^l B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B \subset A + K \tag{3.3}$$

$$A \leq_K^u B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \subset B - K \tag{3.4}$$

$$A \leq_K B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \leq_K^l B, A \leq_K^u B \tag{3.5}$$

とする。このとき、$\leq_K^l, \leq_K^u$ および $\leq_K$ は $\mathcal{P}(E)$ 上の前順序関係（反射的, 推移的）になる。$\leq_K$ は Young [7] によって最初に導入され、$\leq_K$ を修正した $\leq_K^l, \leq_K^u$ が Kuroiwa et al. [5] において導入された。$\mathcal{P}(E)$ 上の他の順序関係については Jahn and Ha [1] 参照。

4　ファジィ順序関係

本節では、ファジィ順序関係をファジィ錐によって特徴づける。

集合 X, Y に対して、$\widetilde{R} \in \mathcal{F}(X \times Y)$ を X から Y への**ファジィ関係** (fuzzy relation) とよぶ。また、集合 X に対して、X から X へのファジィ関係を X 上のファジィ関係という。

$X \neq \emptyset$ を集合とし、$\widetilde{R} \in \mathcal{F}(X \times X)$ とする。$\widetilde{R}$ が次の条件 (i), (ii) および (iii) をみたすとき、$\widetilde{R}$ を X 上の**ファジィ順序関係** (fuzzy order relation) という。$\widetilde{R}$ が次の条件 (i) および (iii) をみたすとき、$\widetilde{R}$ を X 上の**ファジィ前順序関係** (fuzzy preorder relation) という。

(i) **反射的**（reflexive）

$$\widetilde{R}(x, x) = 1, \quad \forall x \in X \tag{4.1}$$

(ii) **反対称的** (antisymmetric)

$$x, y \in X, \widetilde{R}(x, y) > 0, \widetilde{R}(y, x) > 0 \Rightarrow x = y \tag{4.2}$$

(iii) **推移的** (transitive)

$$\widetilde{R}(x, y) \geq \sup_{z \in X} \min\{\widetilde{R}(x, z), \widetilde{R}(z, y)\}, \quad \forall x, y \in X \tag{4.3}$$

ファジィ順序関係について詳しくまたは他のファジィ関係については、例えば、Zadeh [9] および Zhang et al. [10] 参照。

定理 1　$\widetilde{K} \in \mathcal{F}(E)$ を pointed なファジィ凸錐とする。また、$\widetilde{R} \in \mathcal{F}(E \times E)$ を各 $x, y \in E$ に対して

$$\widetilde{R}(x, y) = \widetilde{K}(y - x) \tag{4.4}$$

と定義する。

(i) $\widetilde{R}$ は E 上のファジィ順序関係になる。

(ii) $\widetilde{R}(x + z, y + z) = \widetilde{R}(x, y), \forall x, y, z \in E$

(iii) $\widetilde{R}(\lambda x, \lambda y) = \widetilde{R}(x, y), \forall x, y \in E, \forall \lambda > 0$

定理 1 における (ii) および (iii) は、それぞれクリスプ順序関係の (O_1) および (O_2) に対応する条件である。

定理 2　$\widetilde{R} \in \mathcal{F}(E \times E)$ を E 上のファジィ順序関係とし

$$\widetilde{R}(x + z, y + z) = \widetilde{R}(x, y), \quad \forall x, y, z \in E \tag{4.5}$$

$$\widetilde{R}(\lambda x, \lambda y) = \widetilde{R}(x, y), \quad \forall x, y \in E,\ \forall \lambda > 0 \tag{4.6}$$

であるとする。また、$\widetilde{K} \in \mathcal{F}(E)$ を各 $x \in E$ に対して

$$\widetilde{K}(x) = \widetilde{R}(\theta, x) \tag{4.7}$$

と定義する。このとき、$\widetilde{K}$ は pointed なファジィ凸錐になる。

定理３ $\mathcal{FK}$ を E 上の pointed なファジィ凸錐すべての集合とする。$\mathcal{FR}$ を E 上のファジィ順序関係 $\widetilde{R} \in \mathcal{F}(E \times E)$ で (4.5) および (4.6) をみたすものすべての集合とする。また、$\Phi : \mathcal{FK} \to \mathcal{FR}$ を各 $\widetilde{K} \in \mathcal{FK}$ に対して、

$$\Phi(\widetilde{K}) = \widetilde{R}_{\widetilde{K}} \tag{4.8}$$

と定義する。ここで、各 $x, y \in E$ に対して

$$\widetilde{R}_{\widetilde{K}}(x, y) = \widetilde{K}(y - x) \tag{4.9}$$

である。このとき、Φ は全単射になる。

$K \subset E$ を pointed な凸錐とする。また、E 上のファジィ順序関係 $\widetilde{R}$ は pointed なファジィ凸錐 $c_K \in \mathcal{F}(E)$ によって定義されているとする。すなわち、$\widetilde{R}$ は (4.4) において $\widetilde{K} = c_K$ として定義されている。このとき、任意の $x, y \in E$ に対して

$$x \leq_K y \Leftrightarrow y - x \in K \Leftrightarrow \widetilde{R}(x, y) = c_K(y - x) = 1$$

$$x \not\leq_K y \Leftrightarrow y - x \notin K \Leftrightarrow \widetilde{R}(x, y) = c_K(y - x) = 0$$

となる。ここで、$\leq_K$ は (3.2) によって定義されているとする。よって、このファジィ順序関係 $\widetilde{R}$ とクリスプ順序関係 $\leq_K$ は同一視できる。したがって、E 上のファジィ順序関係は E 上のクリスプ順序関係の拡張になっている。

定理４ $\widetilde{K} \in \mathcal{F}(E)$ を pointed なファジィ凸錐とする。また、E 上のファジィ順序関係 $\widetilde{R} \in \mathcal{F}(E \times E)$ は $\widetilde{K}$ に対して (4.4) によって定義されているとする。このとき、任意の $\alpha \in]0, 1]$ に対して、$[\widetilde{R}]_\alpha$ は (O_1) および (O_2) をみたす E 上の順序関係になり、pointed な凸錐 $[\widetilde{K}]_\alpha$ に対応している。ここで、$[\widetilde{R}]_\alpha$ が (O_1) および (O_2) をみたすとは任意の $x, y \in E$ に対して

$$x \leq y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x, y) \in [\widetilde{R}]_\alpha$$

と定義したときに $\leq$ が (O_1) および (O_2) をみたすことを意味し、$[\widetilde{R}]_\alpha$ が $[\widetilde{K}]_\alpha$ に対応しているとは、任意の $x, y \in E$ に対して

$$(x, y) \in [\widetilde{R}]_\alpha \Leftrightarrow y - x \in [\widetilde{K}]_\alpha$$

が成り立つことを意味する。

定理５　$\{R_\alpha\}_{\alpha \in]0,1]}$ を (O_1) および (O_2) をみたす E 上の順序関係の族とし

$$\alpha, \beta \in \left]0, 1\right], \alpha < \beta \Rightarrow R_\alpha \supset R_\beta$$

であるとする。$\{K_\alpha\}_{\alpha \in]0,1]}$ を E における pointed な凸錐の族とし

$$\alpha, \beta \in \left]0, 1\right], \alpha < \beta \Rightarrow K_\alpha \supset K_\beta$$

であるとする。また、任意の $\alpha \in]0, 1]$ に対して、R_α と K_α は対応しているとする。ここで、R_α と K_α が対応しているとは、任意の $x, y \in E$ に対して

$$(x, y) \in R_\alpha \Leftrightarrow y - x \in K_\alpha$$

が成り立つことを意味する。さらに、$\widetilde{R} \in \mathcal{F}(E \times E)$ および $\widetilde{K} \in \mathcal{F}(E)$ を

$$\widetilde{R} = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha c_{R_\alpha}, \quad \widetilde{K} = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha c_{K_\alpha}$$

と定義する。このとき、$\widetilde{R}$ は E 上のファジィ順序関係になり、$\widetilde{K}$ は E 上の pointed なファジィ凸錐になり、$\widetilde{R}$ と $\widetilde{K}$ は (4.4) をみたす。

定理６　$\widetilde{K} \in \mathcal{F}(E)$ をファジィ凸錐とする。また、$\widetilde{R}_l, \widetilde{R}_u, \widetilde{R} \in \mathcal{F}(\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E))$ を各 $A, B \in \mathcal{P}(E)$ に対して

$$\widetilde{R}_l(A, B) = \sup\{\alpha \in]0, 1] : B \subset A + [\widetilde{K}]_\alpha\} \tag{4.10}$$

$$\widetilde{R}_u(A, B) = \sup\{\alpha \in]0, 1] : A \subset B - [\widetilde{K}]_\alpha\} \tag{4.11}$$

$$\widetilde{R}(A, B) = \sup\{\alpha \in]0, 1] : B \subset A + [\widetilde{K}]_\alpha, A \subset B - [\widetilde{K}]_\alpha\} \tag{4.12}$$

と定義する。ただし、$\sup \emptyset = 0$ とする。このとき、$\widetilde{R}_l$, $\widetilde{R}_u$ および $\widetilde{R}$ は E 上のファジィ前順序関係になる。

$K \subset E$ を凸錐とする。また、$\mathcal{P}(E)$ 上のファジィ前順序関係 $\widetilde{R}_l$, $\widetilde{R}_u$ および $\widetilde{R}$ はファジィ凸錐 $c_K \in \mathcal{F}(E)$ によって定義されているとする。すなわち、$\widetilde{R}_l$, $\widetilde{R}_u$ および $\widetilde{R}$ は

それぞれ (4.10), (4.11) および (4.12) において $\widetilde{K} = c_K$ として定義されている。このとき、任意の $A, B \in \mathcal{P}(E)$ に対して

$$A \leq_K^l B \Leftrightarrow \widetilde{R}_l(A,B) = \sup\{\alpha \in]0,1] : B \subset A + [c_K]_\alpha\} = 1$$
$$A \not\leq_K^l B \Leftrightarrow \widetilde{R}_l(A,B) = \sup\{\alpha \in]0,1] : B \subset A + [c_K]_\alpha\} = 0$$

$$A \leq_K^u B \Leftrightarrow \widetilde{R}_l(A,B) = \sup\{\alpha \in]0,1] : A \subset B - [c_K]_\alpha\} = 1$$
$$A \not\leq_K^u B \Leftrightarrow \widetilde{R}_l(A,B) = \sup\{\alpha \in]0,1] : A \subset B - [c_K]_\alpha\} = 0$$

$$A \leq_K B \Leftrightarrow \widetilde{R}(A,B) = \sup\{\alpha \in]0,1] : B \subset A + [c_K]_\alpha, A \subset B - [c_K]_\alpha\} = 1$$
$$A \not\leq_K B \Leftrightarrow \widetilde{R}(A,B) = \sup\{\alpha \in]0,1] : B \subset A + [c_K]_\alpha, A \subset B - [c_K]_\alpha\} = 0$$

となる。ここで、$\leq_K^l$, $\leq_K^u$ および $\leq_K$ はそれぞれ (3.3), (3.4) および (3.5) によって定義されているとする。よって、これらのファジィ前順序関係 $\widetilde{R}_l$, $\widetilde{R}_u$ および $\widetilde{R}$ はそれぞれクリスプ前順序関係 $\leq_K^l$, $\leq_K^u$ および $\leq_K$ と同一視できる。したがって、(4.10), (4.11) および (4.12) によって定義される $\mathcal{P}(E)$ 上のファジィ前順序関係はそれぞれ (3.3), (3.4) および (3.5) によって定義される $\mathcal{P}(E)$ 上のクリスプ前順序関係の拡張になっている。

5 結論

本稿では、実ベクトル空間上のファジィ順序関係をファジィ錐によって特徴づけた。定理 3 において、実ベクトル空間上のファジィ順序関係が pointed なファジィ凸錐と 1 対 1 の対応があることを示した。さらに、定理 6 において、実ベクトル空間のファジィ凸錐からその実ベクトル空間のすべての部分集合の集合上のファジィ前順序関係を 3 種類構成した。

実ベクトル空間上のファジィ前順序関係についても定理 1 – 5 と同様な結果が導ける。ただし、実ベクトル空間上のファジィ前順序関係は pointed なファジィ凸錐ではなくファジィ凸錐に対応する。

参考文献

[1] J. Jahn and T. X. D. Ha, New order relations in set optimization, Journal of Optimization Theory and Applications 148 (2011) 209–236

[2] A. A. Khan, C. Tammer and C. Zălinescu, Set-valued Optimization: An Introduction with Applications, Springer, Berlin, Heidelberg, 2015

[3] 金正道, ファジィ集合最適化, 弘前大学出版会, 2019

[4] M. Kon and H. Kuwano, On sequences of fuzzy sets and fuzzy set-valued mappings, Fixed Point Theory and Applications 2013:327 (URL: http://www.fixedpointtheoryandapplications.com/content/2013/1/327) (DOI: 10.1186/10.1186/1687-1812-2013-327), 2013

[5] D. Kuroiwa, T. Tanaka and T. X. D. Ha, On cone convexity of set-valued maps, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications 30 (1997) 1487–1496

[6] A. L. Peressini, Ordered Topological Vector Spaces, Harper & Row, New York, 1967

[7] R. C. Young, The algebra of many-valued quantities, Mathematische Annalen 104 (1931) 260–290

[8] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control 8 (1965) 338–353

[9] L. A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings, Information Sciences 3 (1971) 177–200

[10] H. -P. Zhang, R. Pérez-Fernández and B. De Beats, Fuzzy betweenness relations and their connection with fuzzy order relations, Fuzzy Sets and Systems 384 (2020) 1–22