小尺度トポロジーと大尺度トポロジーの統一的枠組み

今村 拓万（AAAS BRIDGE, INC.）

概要．本稿では，超準解析を用いて小尺度と大尺度のトポロジーを統一的に扱う試みについて，進捗を報告する．まず，位相空間，一様空間，有界型空間，粗空間といった既存の空間概念を同時に一般化する概念として，空間的集合及び空間的写像の概念を導入する．次に，超準的な集合のクラス Π_1^{st} と Σ_1^{st} の定義を確認した後，小尺度構造が Π_1^{st}–定義可能な空間的集合に，大尺度構造が Σ_1^{st}–定義可能な空間的集合に，それぞれ正確に対応することを示す．位相空間に対する McCord ホモロジーのアイデアを借用し，空間的集合に対するホモロジー論を定義する．そして緩振動写像が大尺度空間のホモロジー群から小尺度空間のホモロジー群への準同型を誘導することを示す．

1. 導入

小尺度トポロジー（small-scale topology）はミクロな構造を備えた空間の研究である．空間の連結性（ないしその高次元版）は一点を取り除いただけで壊れる．また写像の連続性は一点での値をほんの僅かに変えただけで壊れる．このように微細な性質を考察の対象としているということである．そうした性質について議論できるミニマルな空間概念として，位相空間（[17]），Cauchy 空間（[27]），一様空間（[46]），準一様空間（[7]），半一様空間（[32]）といったものがあるのであった．所謂「普通のトポロジー」のことであるから多くを語る必要は無いだろう．

それとは対照的に大尺度トポロジー（large-scale topology）はマクロな構造を備えた空間の研究である．これでは説明になっていないので幾つか例を挙げる．空間の有界性は一点を取り除いたり追加したりした程度では変化しない．二つの写像が有界な距離を保っているという性質は一点（さらにいえば有界集合上）での値を有界な範囲で変えただけでは壊れない．一方で非有界集合上での値を非有界に変えた場合には壊れるかもしれないわけである．このように粗い性質を考察の対象とするということである．有界集合は無限に遠くから眺めたときに一点に潰れたように映る（が非有界集合はそうではない），という直観に即して言えば，空間が有界というのは「遠くから眺めたら一点」ということであるし，二つの写像が有界な距離を保っているというのは「遠くから眺めたら同じ」ということである．無限遠から眺めたトポロジーということで漸近トポロジー（asymptology）と呼ばれることもある．粗幾何学の一般位相的側面を抽出した理論と言ってもいいだろう．大尺度の性質について議論できるミニマルな設定には，有界型空間（cf. [4]），粗空間（[41, 38]），準粗空間（[47]），半粗空間（ibid.）などがある．有界型空間を除けば小尺度の対応物と比べてかなり新しい概念である．

小尺度／大尺度という区別はシャープなものではないことに注意する．位相空間に於ける相対コンパクト集合の全体は有界型を成す．すなわち小尺度の概念を用いて定義された大尺度の概念である．これは小尺度の概念とも言えるし大尺度の概念とも言えるだろう．また，位相空間に於ける点列の極限というのは，添字を**無限に大きく**したとき点列が**無限に近付く**点のことであるから，小尺度と大尺度が絡み合ったハイブリッドな概念である．本稿でも扱うことになる緩振動写像の概念もハイブリッドである．

小尺度と大尺度のトポロジーの間には色々なアナロジーが成立することが知られている．例えば，位相空間と有界型空間，一様空間と粗空間，準一様空間と準粗空間，半一様空間と半粗空間は，それぞれ類似の定義を持っている．それらの間の射の定義についても同様である．一方のスケールの定理が与えられると，それと類似した他方のスケールの定理を考えることができ，その証明も込めて類似している，ということもしばしばある．例えば，各々の空間とその間の射が圏を成している（つまり射が合成で閉じている）こと，連続写像と有界型写像がそれぞれ連結性と粗連結性を順方向に保存すること，などである．もう少し深いアナロジーは Dranishnikov [11] の “micro–macro topological dictionary” を参照．ただし，この dictionary では全く異なるメカニズムのアナロジーが区別せずに扱われているから，注意が必要である．この点については後述する．

このアナロジーには限界もある．第一にこのアナロジーはシステマティックなものではない．例えば，一方のスケールで何らかの定理が得られたとしても，そこから他方のスケールの定理が自動的に得られるような関係にはない．圏同値のような綺麗な対応になっているわけでもない．例えば，位相空間が一様化可能であることと完全正則であることは同値であるが，粗空間は無条件に粗空間化可能であるから，アナロジーは壊れている．

ここに幾つかの問いが生まれてくる．小尺度と大尺度のトポロジーのアナロジーを支配する原理は何か．アナロジーの正確な限界は何か．こういった問いである．本稿では，Robinson [40] の超準解析の枠組みを用いることで，これらの問いにひとつの解答を与える．もう少し詳しく言えば，前述した小尺度と大尺度の空間概念（及びそれらの間の射の概念）を全て含む，より一般的な空間概念（及びそれらの間の射）を導入し，小尺度／大尺度空間の特徴付けを与える．小尺度と大尺度の空間概念の間には，共通の一般化となる空間概念を持つという共通点と，相異なる特徴付けを持つという相違点とがあるわけである．このことが上の問への解答を与えるというシナリオである．

第 2 節では，小尺度の空間の究極の一般化（のひとつ）であるフィルター空間と，大尺度の対応物であるイデアル空間の概念を導入した後，超準解析の枠組みを最速で準備する．第 3 節では，空間的集合及び空間的写像の概念を導入する．第 4 節ではフィルター空間とイデアル空間が特別な空間的集合であることを示す．より正確には，フィルター空間は Π_1^{st}–定義可能な構造を備えた空間的集合，イデアル空間は Σ_1^{st}–定義可能な構造を備えた空間的集合，とそれぞれ特徴付けられることを示す．これにより小尺度と大尺度のアナロジーの原理と限界とが解明される．また，本稿で主に扱うアナロジーと混同されがちな，別種のアナロジーについて触れる．第 5 節では空間的集合と空間的写像の成す圏の上のホモロジー論を導入する．これは McCord [30] による位相空間の超準ホモロジー論のアイデアを借用したものである．空間的集合にホモロジー論を与えることは，一様空間や粗空間などの異種の空間に対して一挙にホモロジー群を与えることを意味する．このことのひとつの効用として，大尺度のホモロジー群と小尺度のホモロジー群の間の準同型がシステマティックに構成できることを確認する．

2. 準備

本節では，先ず既存の小尺度と大尺度の空間概念として代表的なものを挙げ，これらに共通の構造を抽出することでフィルター空間とイデアル空間の概念を得る．

2.1. **フィルター空間とイデアル空間．** まず小尺度の空間概念として代表的なものを幾つか思い出す．

定義 2.1 ([46])**.** 集合 X 上の**一様性**（uniformity）とは，$X \times X$ の部分集合からなる族 $\mathcal{U}_X$ であって，次を満たすものである：

- **FLT:** $\mathcal{U}_X$ は $X \times X$ 上のフィルターである．すなわち部分集合を取る操作と有限 $\cap$ で閉じている．
- **U1:** 任意の $U \in \mathcal{U}_X$ に対して $\Delta_X := \{(x,x) \mid x \in X\} \subseteq U$.
- **U2:** 任意の $U \in \mathcal{U}_X$ に対して $U^{-1} := \{(x,y) \mid (y,x) \in U\} \in \mathcal{U}_X$.
- **U3:** 任意の $U \in \mathcal{U}_X$ に対し $V \in \mathcal{U}_X$ が存在して $V \circ V \subseteq U$.

一様性の条件の幾つかを緩和ないし削除して得られる一般化として例えば次のものがある．

定義 2.2 ([7])**.** 集合 X 上の**準一様性**（quasi-uniformity）とは $X \times X$ 上のフィルター $\mathcal{U}_X$ であって (U1) と (U3) を満たすものである．

定義 2.3 ([32])**.** 集合 X 上の**半一様性**（semi-uniformity）とは $X \times X$ 上のフィルター $\mathcal{U}_X$ であって (U1) と (U2) を満たすものである．

定義 2.4 ([29])**.** 集合 X 上の**近接性**（contiguity）とは $X \times X$ 上のフィルター $\mathcal{U}_X$ であって (U1) を満たすものである．

条件 (U1) を残しておく理由は何もない．ここから次の定義が得られる．

定義 2.5. 集合 X と直積 $X \times X$ 上のフィルター $\mathcal{F}_X$ の組 $\mathbf{X} := (X, \mathcal{F}_X)$ を**フィルター空間**（filter space）と呼ぶ．$\mathcal{F}_X$ の元を X の**近縁**（entourage）と呼ぶ．

定義 2.6. フィルター空間の間の写像 $f\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ が**フィルター準同型**であるとは，任意の $E \in \mathcal{F}_Y$ に対し，E の f による引き戻し

$$f^*E := \{(x,y) \in X \times X \mid (f(x), f(y)) \in E\}$$

が $\mathcal{F}_X$ に属すことを言う．

定理 2.7. フィルター空間とフィルター準同型は圏 $\mathfrak{Flt}$ を成す．

注意 2.8. ここでは最も大切な小尺度空間のクラスのひとつである位相空間が出てきていないが，位相空間の圏は近接性を備えた空間の圏へ充満忠実に埋め込める（[29]）．したがってフィルター空間とフィルター準同型の枠組みの中で扱える．

次に大尺度の空間概念について思い出そう．

定義 2.9 ([41, 38])**.** 集合 X 上の**粗構造**（coarse structure）とは，$X \times X$ の部分集合からなる族 $\mathcal{C}_X$ であって，次を満たすものである：

IDL: $\mathcal{C}_X$ は $X \times X$ 上のイデアルである．すなわち拡大集合を取る操作と有限 $\cup$ で閉じている．
C1: $\Delta_X \in \mathcal{C}_X$．
C2: 任意の $E \in \mathcal{C}_X$ に対して $E^{-1} \in \mathcal{C}_X$．
C3: 任意の $E, F \in \mathcal{C}_X$ に対し $E \circ F \in \mathcal{C}_X$．

粗構造の条件の幾つかを緩和ないし削除して得られる一般化として例えば次のものがある．

定義 2.10 ([47])**.** 集合 X 上の**準粗構造**（quasi-coarse structure）とは $X \times X$ 上のイデアル $\mathcal{C}_X$ であって (C1) と (C3) を満たすものである．

定義 2.11 ([47])**.** 集合 X 上の**半粗構造**（semi-coarse structure）とは $X \times X$ 上のイデアル $\mathcal{C}_X$ であって (C1) と (C2) を満たすものである．

ここから次の定義が得られる．

定義 2.12. 集合 X と直積 $X \times X$ 上のイデアル $\mathcal{I}_X$ の組 $\mathbf{X} := (X, \mathcal{I}_X)$ を**イデアル空間**（ideal space）と呼ぶ．$\mathcal{I}_X$ の元を X の**制御集合**（controlled set）ないし**粗近縁**（coarse entourage）と呼ぶ．

定義 2.13. イデアル空間の間の写像 $f\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ が**イデアル準同型**であるとは，任意の $E \in \mathcal{I}_X$ に対し，E の f による像

$$f_* E := \{\, (f(x), f(y)) \mid (x, y) \in E \,\}$$

が $\mathcal{I}_Y$ に属すことを言う．

定理 2.14. イデアル空間とイデアル準同型は圏 $\mathfrak{Idl}$ を成す．

注意 2.15. 集合 X 上の**有界型**（bornology）とは，X 上のイデアル $\mathcal{B}_X$ であって，$\bigcup \mathcal{B}_X = X$ が成り立つものである（cf. [4, 18]）．これは位相とは対応**しない**．位相と対応するのは前有界型（prebornology，[22]）や有界構造（bounded structure，[12]）と呼ばれるものである．集合 X 上の**前有界型**とは，X の部分集合の族 $\mathcal{B}_X$ であって，部分集合を取る操作と non-disjoint な有限 $\cup$ を取る操作で閉じており，かつ $\bigcup \mathcal{B}_X = X$ が成り立つものである．前有界型空間の圏から粗空間の圏への自由関手（忘却関手の左随伴）が存在する．とくに粗空間の圏に充満忠実に埋め込める．したがって前有界型空間や粗空間はイデアル空間とイデアル準同型の枠組みの中で扱える．詳細は [22, 24] を参照．

ここでは二項関係の族が作る構造だけを考えたが，もっと一般に n–項関係の族を備えた空間を考え，それを n–フィルター空間や n–イデアル空間として研究することもできるだろう．このとき有界型空間は 1–イデアル空間と見做せる．本稿では $n = 2$ の場合のみ考えるが，二項関係に特有の性質を用いていない結果については $n \in \mathbb{N}$ へと一般化できる．もっと正確に述べれば，X 上の n–項関係は X^n 上の単項関係と同じものであることから，$n = 1$ に於ける結果は一般の $n \in \mathbb{N}$ でも成立する，ということである．

2.2. **超準解析.** 超準解析の導入方法には複数のものがある．大別すれば，標準数学の内部で標準数学の標準モデル（の十分大きな部分）とその超準化を用意するモデル論的アプローチと，超準数学の公理系を用いる公理論的アプローチとがある．前者については，上部構造とその有界超冪（あるいは超準モデルの有限ランク部分）を用いるもの（cf. [6]），高階型理論の標準モデルとその超準化を用いるもの（[40]），もっと巨大な集合論の標準モデルとその無制限の超冪（あるいは無制限の超準モデル）を用いるものなど，色々なバリエーションがある．後者については，IST（[33, 34]），NST（[26]），HST（[19]），α-理論（[9, 2]）など，これまた多様な公理系を用いたアプローチがある（[25]）．どのアプローチであっても本稿の議論は可能であるが，ここでは竹内外史に倣って，集合論のモデルとその無制限の超準モデルを公理論的に導入する，という折衷案を採用する．

まず通常の数学を展開するに十分な巨大な集合 $\mathbb{U}$ を固定する．これは Grothendieck 宇宙を取るようなものである．ただし，Grothendieck 宇宙を取るためには ZFC よりも真に強い公理が必要となること，Grothendieck 宇宙の中で成立することと真の宇宙 $V := \{\, x \mid x = x \,\}$ で成立することとが必ずしも同値でないことなど，幾つかの難点がある．(後者は Δ_0–論理式だけを考えていれば問題にはならない．) Feferman [14] は，ZFC を本質的に拡大することなしに，$\mathbb{U}$ に相当する巨大な宇宙を導入するトリックを与えた．本稿では Feferman のトリックを援用する．

標準的な集合論の語彙に $\mathbb{U}$ という定数記号を付け加える．理論 ZFC/s は以下の公理からなる．

(1) ZFC の各公理．ただし ZFC の公理図式には ZFC の（新たに加えた定数記号 $\mathbb{U}$ を含まない）論理式のみ代入できる．
(2) （絶対性原理）ZFC の論理式 $\varphi(\vec{x})$ 毎に，$\forall \vec{x} \in \mathbb{U}.\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi^{\mathbb{U}}(\vec{x})$ の形の論理式．ここで $\varphi^{\mathbb{U}}(\vec{x})$ は $\varphi(\vec{x})$ の $\mathbb{U}$ への相対化（量化子を $\mathbb{U}$ に制限して得られる論理式）である．
(3) $\exists \alpha \in \mathrm{On}.\mathbb{U} = V_\alpha$．ここで，On は順序数全体のクラス，$V_\alpha$ は von Neumann 階層の α 番目を意味する．

最初の公理図式は分かり易い．単に ZFC の上で数学をするためのものである．二番目の公理図式は，標準的な論理式で定義される $\mathbb{U}$ 上の概念と，同じ論理式で定義される V 上の概念とが，$\mathbb{U}$ 上では一致することを要請するものである．つまり，$\varphi(\vec{x})$ によって定義される概念が，$\mathbb{U}$ 上か V 上かに相対的ではなく，絶対的に決まるということを述べている．最後の公理は $\mathbb{U}$ が「変な形」をしていないことを要請する．絶対性原理より V で成立する通常の（$\mathbb{U}$ を含まない）定理は $\mathbb{U}$ でも成立する（逆も然り）．また V で具体的に構成されるどんな数学的対象（実数や複素数など）も $\mathbb{U}$ に属する．したがって既存の全数学は $\mathbb{U}$ の中で展開できるものと思ってよい．さらに ZFC/s は ZFC の保存的拡大になっている．すなわち ZFC/s で証明可能な定理のうち定数記号 $\mathbb{U}$ を含まないものは ZFC で証明可能である．なお，このような基礎理論の拡大を行いたくないなら，議論に必要な十分多く（ただし有限個）の $\varphi(\vec{x})$ を固定し，それらが同時に絶対的となるような $\mathbb{U}$ を反映原理を用いて取ればよい．実際，Feferman のトリックは反映原理の糖衣構文であり，ZFC/$s \supset$ ZFC の保存的拡大性は反映原理を用いて容易に証明できる．

無限基数 $\kappa > |\mathbb{U}|$ を固定する．構造 $(\mathbb{U}, \in)$ の拡大 $\left({}^*\mathbb{U}, {}^*{\in}\right)$ とその埋め込み $*$: $(\mathbb{U}, \in) \to \left({}^*\mathbb{U}, {}^*{\in}\right)$ を次の公理を満たすものと定める．ここで $*(x)$ のことを ${}^*x$ と書く．

(1) （移行原理）全ての ZFC の論理式 $\varphi(\vec{x})$ に対して $\forall \vec{a} \in \mathbb{U}. \mathbb{U} \models \varphi(\vec{a}) \leftrightarrow {}^*\mathbb{U} \models \varphi\left({}^*\vec{a}\right)$.

(2) （κ–級飽和原理）$p(x)$ を自由変数 x を持ち ${}^*\mathbb{U}$ の元をパラメータに持つ ZFC の論理式の集合とする．ここで $|p(x)| < \kappa$ と仮定する．もし $p(x)$ のどの有限部分も ${}^*\mathbb{U}$ に解を持つならば，$p(x)$ は ${}^*\mathbb{U}$ に解を持つ．

このような構造 $\left({}^*\mathbb{U}, {}^*{\in}\right)$ の存在は実際に証明できるが，その証明も構成方法も我々の議論には不要であるので，ここでは単に存在だけ認めて先に進めることにする．詳細は [6] を参照．

κ–級飽和原理からは次の弱い原理が導かれる．簡単な応用ではこの原理があれば十分である．

(2') （弱飽和原理・広大化原理）$p(x)$ を自由変数 x を持ち $\mathbb{U}$ の元をパラメータに持つ ZFC の論理式の集合とする．もし $p(x)$ のどの有限部分も $\mathbb{U}$ に解を持つならば，$\left\{\, \varphi\left(x, {}^*\vec{a}\right) \mid \varphi(x, \vec{a}) \in p(x) \,\right\}$ は ${}^*\mathbb{U}$ に解を持つ．

構造 $(\mathbb{U}, \in)$ を**標準宇宙**（standard universe），構造 $\left({}^*\mathbb{U}, {}^*{\in}\right)$ を**超準宇宙**（nonstandard universe）と呼ぶ．移行原理は超準宇宙に於いても標準宇宙と全く同じ数学が成立することを保証する．（弱）飽和原理は超準宇宙が十分に多くの理想的な元（後述する無限小や無限大のようなもの）を含むことを保証する．とくに超準宇宙が標準宇宙の真の拡大であることを保証する．

ここで若干の pedantic な注意をする．標準宇宙 $\mathbb{U}$ 及び真の宇宙 V に於ける集合の帰属関係 $\in$ と，超準宇宙 ${}^*\mathbb{U}$ の備える二項関係 ${}^*{\in}$ は，一般には異なる二項関係である．それゆえ $A \in {}^*\mathbb{U}$ と $\hat{A} := \{\, x \mid x \,{}^*{\in} A \,\}$ が同一である保証はない．しかしながら，$\left({}^*\mathbb{U}, {}^*{\in}\right)$ に於いて A は $\hat{A}$ である**かのように**振る舞うので，混乱や矛盾のおそれがない限り，A と $\hat{A}$ を同一視する．また $\in$ と ${}^*{\in}$ を同一視する．（この同一視を無際限に行うと矛盾が生じる．例えば，${}^*{\in}$ は整礎的関係ではないから，V に於ける正則性公理と両立し得ない．このような矛盾が起こらない範囲で同一視するということである．ある構造のもとで同型な対象を，その構造に着目している限りでは同一視するが，別の構造に着目しているときには区別する，というのと同じで，普段の数学で普通に行っていることである．）この種のワークアラウンドを好まない場合は，上部構造と有界超冪に基づくモデル論的アプローチ，NST に基づく公理論的アプローチなどを採用すればよい．

数学的対象が**標準的**（standard）であるとは $\mathbb{U}$ に属すときを言う．しばしば，$\mathbb{U}$ の元とそれを $*$ で写した元を同一視して，$\operatorname{im}(*) \subseteq {}^*\mathbb{U}$ の元を標準的と言うこともある．数学的対象が**内的**（internal）であるとは ${}^*\mathbb{U}$ に属すときを言う．もっと一般に，ある V 上（そして $\mathbb{U}$ 上）の概念 X が ZFC の論理式によって定義されているとき，同じ論理式によって ${}^*\mathbb{U}$ 上で定義される概念を**内的** X，**超** X，$*$-X，${}^*X$ などと呼ぶ．内的でない対象は**外的**（external）であると言う．なお，標準的対象 x が，着目している空間の点であるときや，数体系の四則演算や順序関係であるときには，しばしば ${}^*x$ の上付き添字 $*$ を省略して x と書く．

$\mathbb{U}$ に於ける実数の概念に対応する ${}^*\mathbb{U}$ の概念を**超実数**（hyperreal）と呼ぶ．$\mathbb{U}$ に於ける実数の定義は色々とあり得るが，とにかくどれかを使えば「x は実数である」という ZFC の論理式 $\varphi(x)$ が記述できる．これを ${}^*\mathbb{U}$ で解釈したものを「x は超実数である」と読むということである．$\mathbb{R}$ を（その固定した構成のもとでの）実数全体の集合とすれば，${}^*\mathbb{R}$ は超実数全体の集合となる．また，$\mathbb{R}$ は通常の順序と演算のもとで順序体を成すが，それらの演算を $*$ で写したものは ${}^*\mathbb{R}$ 上に順序体の構造を定める（移行原理）．なお，別の実数の構成法を採用すれば別の論理式 $\varphi'(x)$ が得られ，そこから別の実数 $\mathbb{R}'$ と別の超実数 ${}^*\mathbb{R}'$ が得られる．しかしながら，$\mathbb{U}$ に於いて $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}'$ であることから，移行原理により ${}^*\mathbb{U}$ に於いて ${}^*\mathbb{R} \,{}^*{\cong}\, {}^*\mathbb{R}'$ である．（ここで，${}^*{\cong}$ は $\cong$ より強い関係であり，単に同型写像が存在するのみならず，同型写像が ${}^*\mathbb{U}$ の中に存在することも課す．）したがって超実数の概念は実数の構成法に依らない．

標準的な意味での有限（finite）に対応する超準的概念が**超有限**（hyperfinite）である．有限であるとは $\mathbb{N}$ のある元（自然数）と一対一対応が付くことであったが，超有限であるとは ${}^*\mathbb{N}$ のある元（超自然数）と内的に一対一対応が付くことである．ここで，${}^*\mathbb{N}$ には無限大元が含まれるので，超有限には実際には無限なものも含まれる．それにもかかわらず移行原理により超有限性は有限性と同じように振る舞う．

超準的手法の小尺度トポロジーへの応用については [40, 44]，大尺度トポロジーへの応用については [22, 24] を参照.

3. 空間的集合と空間的写像

3.1. 定義.

定義 3.1. 次のデータからなる構造 $\mathbf{X} := (X, E_X)$ を**空間的集合**（spatial set）と呼ぶ.

(1) 内的集合 $A_X \in {}^*\mathbb{U}$ の部分集合 $X \subseteq A_X$．これを**台集合**（underlying set）.

(2) X 上の二項関係 $E_X \subseteq X \times X$．これを**空間的関係**（spatial relation）.

集合 X を $\mathbf{X}$ の台集合（underlying set），E_X を $\mathbf{X}$ の空間的関係（spatial relation）と呼ぶ.

定義 3.2. $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ を空間的集合とする．写像 $f\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ が**空間的写像**（spatial map）であるとは，以下の条件を満たすときを言う：

(1) f は空間的関係を順方向に保つ．すなわち $f_* E_X \subseteq E_Y$.

(2) f は内的延長を持つ．すなわち内的写像 $F\colon A_X \to A_Y \in {}^*\mathbb{U}$ が存在して $X \subseteq A_X$，$Y \subseteq A_Y$，$f \subseteq F$.

命題 3.3. 空間的集合と空間的写像は圏 $\mathfrak{Sp}$ を成す.

証明. 空間的写像が合成で閉じていることだけは非自明である.（合成可能な空間的写像対の内的延長達が合成可能とは限らないため.）$f\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ と $g\colon \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ を空間的写像とし，$F\colon A_X \to A_Y$ と $G\colon A_Y \to A_Z$ を内的延長とする．このとき $G \circ F\colon F^{-1}(A_Y \cap A'_Y) \to A_Z$ は $g \circ f$ の内的延長である. □

見かけ上，空間的集合は単に二項関係を備えた集合であるし，空間的写像は二項関係を備えた構造の間の（モデル理論の意味での）準同型である．しかしながら，空間的集合の台集合がある内的集合の部分集合になっていること，空間的写像がある内的写像の部分写像になっていること，という条件から位相的な構造が密輸入されるのである．このことの背景には ${}^*\mathbb{U}$ の元がある種の極大フィルターや極大イデアルと大雑把に同一視できるという事実がある．[42, 24] などを参照.

3.2. 例.

空間的集合の例を幾つか確認しておく．次節で示すように，具体的な例の多くは小尺度空間と大尺度空間から自然に得られるから，ここでは抽象的な例のみを列挙する.

例 3.4 (部分空間). $\mathbf{X}$ を空間的集合とする．任意の部分集合 $Y \subseteq X$ は $\mathbf{Y} := (Y, E_X{\restriction}Y)$ によって空間的集合と見做せる．包含写像 $i_Y\colon \mathbf{Y} \hookrightarrow \mathbf{X}$ は空間的である.

例 3.5 (対称化). $\mathbf{X}$ を空間的集合とする．$\mathbf{X}$ の空間的関係 E_X を対称的にする自然な方法として二つある.

(1) ひとつは E_X を含む最小の対称的関係 $E_X \cup E_X^{-1}$ である．空間的集合 $S_\cup \mathbf{X} := \left(X, E_X \cup E_X^{-1}\right)$ を**カップ対称化**（cup symmetrisation）と呼ぶ．恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon \mathbf{X} \to S_\cup \mathbf{X}$ は空間的である．カップ対称化は次の普遍性で特徴付けられる：任意の対称的な空間的集合 $\mathbf{Y}$ と空間的写像 $f\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ に対し，空間的写像 $g\colon S_\cup \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ が一意的に存在して，$\mathbf{X} \to S_\cup \mathbf{X} \to \mathbf{Y} = \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ が成り立つ．すなわち，対称的な空間的集合の成す圏 $\mathfrak{Sp}_{\mathrm{sym}}$ は，全ての空間的集合の成す圏 $\mathfrak{Sp}$ の反映的部分圏である.

(2) いまひとつは E_X に含まれる最大の対称的関係 $E_X \cap E_X^{-1}$ である．空間的集合 $S_\cap \mathbf{X} := \left(X, E_X \cap E_X^{-1}\right)$ を**キャップ対称化**（cap symmetrisation）と呼ぶ．恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon S_\cup \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ は空間的である．キャップ対称化は次の普遍性で特徴付けられる：任意の対称的な空間的集合 $\mathbf{Y}$ と空間的写像 $f\colon \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ に対し，空間的写像 $g\colon \mathbf{Y} \to S_\cup \mathbf{X}$ が一意的に存在して，$\mathbf{Y} \to S_\cup \mathbf{X} \to \mathbf{X} = \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ が成り立つ．すなわち $\mathfrak{Sp}_{\mathrm{sym}}$ は $\mathfrak{Sp}$ の余反映的部分圏である.

例 3.6 (推移化). $\mathbf{X}$ を空間的集合とする．E_X を含む最小の推移的関係（E_X の推移的閉包）

$$E_X^+ := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} E_X^n$$

を考え，空間的集合 $T_\cup \mathbf{X} := \left(X, E_X^+\right)$ を**推移化**（transitivisation）と呼ぶ．推移的な空間的集合の成す圏 $\mathfrak{Sp}_{\mathrm{tran}}$ は $\mathfrak{Sp}$ の反映的部分圏である.

定義 3.7 (直積). $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ を空間的集合とする．台集合の直積 $X \times Y$ は，X の内的拡大 A_X と Y の内的拡大 A_Y の（内的）直積 $A_X \times A_Y$ の部分集合になっている．また自然な空間的関係

$$E_{X \times Y} := \left\{\, \left((x, y), (x', y')\right) \in (X \times Y)^2 \mid (x, x') \in E_X, (y, y') \in E_Y \,\right\}$$

を持つ．したがって $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} := (X \times Y, E_{X \times Y})$ は空間的集合である．射影 $\pi_{\mathbf{X}}\colon \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ と $\pi_{\mathbf{Y}}\colon \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$ は空間的写像である．実際，空間的関係を保つことは $E_{X \times Y}$ の定義から明らかであり，射影 $A_X \times A_Y \to A_X$ と $A_X \times A_Y \to A_Y$ が内的延長を与える．したがって $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ は $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ の $\mathfrak{Sp}$ に於ける圏論的積である.

定義 3.8 (余積)**.** $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ を空間的集合とする．台集合の直和 $X \oplus Y$ は，X の内的拡大 A_X と Y の内的拡大 A_Y の（内的）直和 $A_X \oplus A_Y$ の部分集合になっている．また自然な空間的関係

$$E_{X \oplus Y} := E_X \oplus E_Y$$

を持つ．したがって $\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y} := (X \oplus Y, E_{X \oplus Y})$ は空間的集合である．標準入射 $\iota_{\mathbf{X}} \colon \mathbf{X} \to \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ と $\iota_{\mathbf{Y}} \colon \mathbf{Y} \to \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ は空間的写像である．実際，空間的関係を保つことは $E_{X \oplus Y}$ の定義から明らかであり，標準入射 $A_X \oplus A_Y \to A_X$ と $A_X \oplus A_Y \to A_Y$ が内的延長を与える．したがって $\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ は $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ の $\mathfrak{Sp}$ に於ける圏論的余積である．

3.3. **超鎖連結性・超鎖ホモトピー・近標準点.** 第 5 節で用いることになる概念を幾つか導入しておく．

定義 3.9. $\mathbf{X}$ を空間的集合とする．$\mathbf{X}$ 内の超有限列 $\{ x_i \}_{i=0}^N$（$N \in {}^*\mathbb{N}$）が超鎖（hyperchain）とは，$\{ x_i \}_{i=0}^N$ が内的（$\in {}^*\mathbb{U}$）であり，かつ任意の $i < n$ に対して $E_X [x_i] \cap E_X [x_{i+1}] \neq \varnothing$ が成り立つことをいう．$\mathbf{X}$ の任意の二点が超鎖で結べるとき**超鎖連結**（hyperchain connected）であると言う．

注意 3.10. 超鎖の定義を $(x_i, x_i) \in E_X$ としてしまうと良く振る舞わない．というのも，超鎖をそのように定義してしまうと,「x と y は超鎖で結べる」という二項関係が同値関係とならない（対称性が壊れる）ことが有り得る．我々の定義では「x と y は超鎖連結で結べる」という二項関係は常に同値関係となる．なお，E_X が推移的かつ対称的ならば，$E_X [x] \cap E_X [y] \neq \varnothing$ と $(x, y) \in E_X$ は同値である．

定義 3.11. $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ を空間的集合，$f, g \colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ を空間的写像とする．

(1) f と g が**近接している**（contiguous）とは任意の $x \in X$ に対して $E_Y [f(x)] \cap E_Y [g(x)] \neq \varnothing$ が成り立つことをいう．

(2) f と g が**超鎖ホモトピック**（hyperchain homotopic）（$f \simeq g$ と書く）とは，空間的写像からなる内的な超有限列 $\{ h_i \colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y} \}_{i=0}^n$ が存在して，$h_0 = f$，$h_n = g$，かつ任意の $i < n$ に対して h_i と h_{i+1} が近接しているときをいう．

注意 3.12. 超鎖ホモトピシティは近接性の反射推移閉包では**ない**．超鎖ホモトピシティは近接性の内的かつ超有限回の連鎖である．したがって反射推移閉包よりも弱い（包含関係に関してより大きい）関係になっている．例えば，E_Y が同値関係である場合，近接性も同値関係となるから，その反射推移閉包は近接性に一致する．しかし（E_Y が同値関係であっても）近接性は超鎖ホモトピシティと一般には一致しない．

注意 3.13. こちらも近接性の定義を $(f(x), f(y)) \in E_Y$ としてしまうと良く振る舞わない．

命題 3.14. 超鎖ホモトピシティ$\simeq$ は $\mathfrak{Sp}$ 上の合同関係である．

証明は容易である（超準解析に固有の議論は全く含まれない）から省略する．

命題 3.15. 超鎖連結性は超鎖ホモトピー同値性で不変である．

こちらも超準解析に固有の議論は全く含まれない．

定義 3.16. X を $\mathbb{U}$ に属す集合，E_X を ${}^*X$ 上の二項関係とし，${}^*\mathbf{X} := \left({}^*X, E_X\right)$ の形の空間的集合を考える．${}^*X$ の点 x が近標準（nearstandard）とは，ある $y \in X$ に対して $x \in E_X [y]$（つまり $(y, x) \in E_X$）が成り立つときを言う．${}^*X$ の点 x が対称近標準（symmetrically nearstandard）とは，ある $y \in X$ に対して $x \in E_X [y]$ かつ $y \in E_X [x]$ が成り立つときを言う．

次は明らかであろう．

命題 3.17. ${}^*\mathbf{X}$ と ${}^*\mathbf{Y}$ を空間的集合とし，それぞれの台集合が ${}^*X$ と ${}^*Y$ の形をしているとする．$f \colon {}^*\mathbf{X} \to {}^*\mathbf{Y}$ を空間的写像とする．f が X を Y に写すならば，f は ${}^*\mathbf{X}$ の（対称）近標準点を ${}^*\mathbf{Y}$ の（対称）近標準点に写す．

4. Π_1^{st}–空間と Σ_1^{st}–空間

4.1. Π_1^{st}**–集合と** Σ_1^{st}**–集合.**

定義 4.1. 論理式 $\varphi(\vec{x})$ が Π_1^{st} とは，ZFC の論理式 $\psi(\vec{x}, y, \vec{z})$ とパラメータ $\vec{a} \in \mathbb{U}$ によって $\varphi(\vec{x}) \equiv \forall^{\mathbb{U}} y. \psi\left(\vec{x}, {}^*y, {}^*\vec{a}\right)$ と書けるときをいう．$\varphi(\vec{x})$ が Σ_1^{st} とは，$\varphi(\vec{x}) \equiv \exists^{\mathbb{U}} y. \psi\left(\vec{x}, {}^*y, {}^*\vec{a}\right)$ と書けるときをいう．

注意 4.2. 集合 M がある $X \in \mathbb{U}$ に対して ${}^*X$ の部分集合になっている場合，M が Π_1^{st} であることと，X の部分集合族 $\{ M_i \mid i \in I \}$ が存在して $M = \bigcap_{i \in I} {}^*M_i$ が成り立つこととは同値である．実際，M が Π_1^{st} のときは，$M_i := \{ x \in X \mid \psi(\vec{x}, i, \vec{a}) \}$ と置けば，$M = \bigcap_{i \in I} {}^*M_i$ である．逆に，$M = \bigcap_{i \in I} {}^*M_i$ のときは，$\mathcal{M} := {}^*M_i$ と置けば，M は $\forall^{\mathbb{U}} y. \left(y \in {}^*\mathcal{M} \to x \in y\right)$ という Π_1^{st} で定義できる．同様に，G が ${}^*X$ の部分集合である場合，G が Σ_1^{st} であることと，X の部分集合族 $\{ G_i \mid i \in I \}$ が存在して $G = \bigcap_{i \in I} {}^*G_i$ が成り立つこととは同値である．

注意 4.3. これらは細字（lightface）の Π^{st}_1 ／ Σ^{st}_1 と呼ばれるものである．より広いクラスとして太字（boldface）の $\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{st}}_1$ ／ $\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{st}}_1$ がある．λ を無限基数とする．このとき，内的集合の部分集合 M が λ–$\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{st}}_1$ とは，内的集合からなる（外的な）族 $\mathcal{M} := \{\, M_i \mid i < \lambda \,\}$ が存在して $M = \bigcap_{i<\lambda} M_i$ が成り立つときをいう．また，内的集合の部分集合 G が λ–$\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{st}}_1$ であるとは，内的集合からなる（外的な）族 $\mathcal{G} := \{\, G_i \mid i < \lambda \,\}$ が存在して $G = \bigcup_{i<\lambda} G_i$ が成り立つときをいう．これらのクラスは $\lambda < \kappa$（κ は飽和原理の所に出てきた無限基数）のときにのみ良く振る舞う．

位相空間 X に於いて $x \in X$ と無限に近い ${}^*X$ の点全体 $\mu_X(x)$ を x の単子（monad）や光暈（halo）と呼ぶ．これは Π^{st}_1–集合になっている．このことから Π^{st}_1–集合は単子的（monadic）集合や光暈的（halic）集合とも呼ばれる．前有界型空間 Y に於いて $y \in Y$ と有限の近さにある ${}^*Y$ の点全体 $G_X(x)$ を y の銀河（galaxy）と呼ぶ．これは Σ^{st}_1–集合になっている．このことから Σ^{st}_1–集合は銀河的（galactic）集合とも呼ばれる．

定義 4.4. X を $\mathbb{U}$ に属す集合とする．X 上のフィルター $\mathcal{F}$ の**単子**（monad）または**光暈**（halo）とは

$$\mu(\mathcal{F}) := \bigcap_{A\in\mathcal{F}} {}^*A$$

で定義される ${}^*X$ の Π^{st}_1–部分集合である．X 上のイデアル $\mathcal{I}$ の**銀河**（galaxy）とは

$$G(\mathcal{F}) := \bigcup_{A\in\mathcal{F}} {}^*A$$

で定義される ${}^*X$ の Σ^{st}_1–部分集合である．

定義 4.5. X を $\mathbb{U}$ に属す集合とする．${}^*X$ の Π^{st}_1–部分集合 M に対して

$$\mathcal{F}_M := \{\, A \subseteq X \mid M \subseteq {}^*A \,\}$$

を M に随伴するフィルターと呼ぶ．${}^*X$ の Σ^{st}_1–部分集合 G に対して

$$\mathcal{I}_G := \{\, A \subseteq X \mid {}^*A \subseteq G \,\}$$

を G に随伴するイデアルと呼ぶ．

これらが実際にフィルター／イデアルになっていることは移行原理から容易に分かる．

定理 4.6. X を $\mathbb{U}$ に属す集合とする．このとき $\mathcal{F} \mapsto \mu(\mathcal{F})$ と $M \mapsto \mathcal{F}_M$ は互いに逆写像である．また $\mathcal{I} \mapsto G(\mathcal{I})$ と $G \mapsto \mathcal{I}_G$ は互いに逆写像である．

証明. 前半の主張と後半の主張は双対的であるから前半だけ示す．

$\mathcal{F}$ を X 上のフィルターとする．まず $A \in \mathcal{F}_{\mu(\mathcal{F})}$ と仮定する．すなわち $\mu(\mathcal{F}) \subseteq {}^*A$ ということである．弱飽和原理より $B \subseteq \mu(\mathcal{F})$ を満たす $B \in {}^*\mathcal{F}$ が存在する．すなわち「ある $B \in {}^*\mathcal{F}$ に対して $B \subseteq {}^*A$」が成り立つ．移行原理より「ある $B \in \mathcal{F}$ に対して $B \subseteq A$」が成り立つ．フィルターの定義より $A \in \mathcal{F}$ である．次に $A \in \mathcal{F}$ と仮定する．光暈の定義より $\mu(\mathcal{F}) \subseteq {}^*A$ である．したがって $A \in \mathcal{F}_{\mu(\mathcal{F})}$ である．

M を ${}^*X$ の Π^{st}_1–部分集合とする．前述の注意より X の部分集合族 $\{\, M_i \mid i \in I \,\}$ が存在して $M = \bigcap_{i\in I} {}^*M_i$ が成り立つ．もちろん $M \subseteq {}^*M_i$ が成り立つ．ゆえに

$$\begin{aligned} M &\subseteq \bigcap \{\, A \subseteq X \mid M \subseteq {}^*A \,\} \; (= \mu(\mathcal{F}_M)) \\ &\subseteq \bigcap_{i\in I} {}^*M_i \\ &= M. \end{aligned}$$

□

Π^{st}_1–集合と Σ^{st}_1–集合は論理的な（量化子に関する）双対の関係にある．このことはフィルターとイデアルが順序的な（包含関係に関する）双対であるということと対応している．

4.2. **Π^{st}_1–空間と Σ^{st}_1–空間.** 今までに述べてきたことからフィルター空間とイデアル空間がどのように特徴付けられるかは殆ど明らかだろう．

系 4.7. X を $\mathbb{U}$ に属す集合とする．$X \times X$ 上のフィルターと ${}^*X$ 上の Π^{st}_1–二項関係は一対一対応する．$X \times X$ 上のイデアルと ${}^*X$ 上の Σ^{st}_1–二項関係は一対一対応する．

すなわち，フィルター空間 $(X, \mathcal{F}_X)$ は空間的集合 $\left({}^*X, \mu(\mathcal{F}_X)\right)$ と対応し，反対に Π^{st}_1–空間的集合 $\left({}^*X, E_X\right)$ はフィルター空間 $(X, \mathcal{F}_{E_X})$ と対応する．同様に，イデアル空間 $(X, \mathcal{I}_X)$ は Σ^{st}_1–空間的集合 $\left({}^*X, G(\mathcal{I}_X)\right)$ と対応し，反対に Σ^{st}_1–空間的集合 $\left({}^*X, E_X\right)$ はイデアル空間 $(X, \mathcal{I}_{E_X})$ と対応する．これらの対応は準同型についても良く振る舞う．

定理 4.8. $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ を $\mathbb{U}$ に属すフィルター空間，$f\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ を $\mathbb{U}$ に属す写像とする．以下は同値：

(1) f はフィルター準同型である．
(2) ${}^*f\colon \left({}^*X, \mu\left(\mathcal{F}_X\right)\right) \to \left({}^*Y, \mu\left(\mathcal{F}_Y\right)\right)$ は空間的である．

定理 4.9. $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ を $\mathbb{U}$ に属すイデアル空間，$f\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ を $\mathbb{U}$ に属す写像とする．以下は同値：

(1) f はイデアル準同型である．
(2) ${}^*f\colon \left({}^*X, G\left(\mathcal{I}_X\right)\right) \to \left({}^*Y, G\left(\mathcal{I}_Y\right)\right)$ は空間的である．

これらは一様連続写像と bornologous 写像の超準的特徴付けを一般化したものである．証明にも変更箇所は全くないから省略する．どちらも弱飽和原理の簡単な応用である．一様空間及び粗空間に於ける証明は [44, 22] を参照．

系 4.10. $\mathfrak{Flt}{\restriction}\mathbb{U}$ と $\mathfrak{Idl}{\restriction}\mathbb{U}$ は $\mathfrak{Sp}$ に忠実に埋め込める．

第 3.2 節では空間的集合の構成法を幾つか述べた．対称化，推移化，直積，直和などである．これらはフィルター空間及びイデアル空間に於ける自然な対応物を持つ．対称化は，(U2) を満たすフィルター空間の成す部分圏 $\mathfrak{Flt}_{\mathrm{sym}} \subseteq \mathfrak{Flt}$ と，(C2) を満たすイデアル空間の成す部分圏 $\mathfrak{Idl}_{\mathrm{sym}} \subseteq \mathfrak{Idl}$ が，それぞれ（余）反映部分圏になっていることを導く．$\mathfrak{Sp}$ に於ける直積と直和は $\mathfrak{Flt}$ と $\mathfrak{Idl}$ に於ける直積と直和に一致する．

$\mathfrak{Sp}$ は $\mathfrak{Flt}$ や $\mathfrak{Idl}$ よりも豊富に射を持つ（前述の埋め込みは充満ではない）．このことの恩恵として，$\mathfrak{Flt}$ や $\mathfrak{Idl}$ に属す（標準的）射では表現できないような超準的な空間の変形が $\mathfrak{Sp}$ の射として表現できる，ということが挙げられる．すなわち，$\mathfrak{Flt}$ や $\mathfrak{Idl}$ に於ける特異ホモトピーよりも，$\mathfrak{Sp}$ に於けるそれの方が自由度が高いということである．例えば，一様空間としての $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ はホモトピー同値では**ない**が，対応する空間的集合 ${}^*\mathbb{Q}$ と ${}^*\mathbb{R}$ は $\mathfrak{Sp}$ に於いてホモトピー同値となる．この事実の簡単な応用は [23] を参照．

4.3. **例.** 小尺度空間と大尺度空間がどのような空間的集合に対応するかを幾つか確認しておく．

例 4.11. $\mathbb{U}$ に属す位相空間 $\mathbf{X}$ を

$$\mathcal{F}_X := \{\, E \subseteq X \times X \mid E[x] \text{ is a neighbourhood of } x \in X \text{ for each } x \in X \,\}$$

によってフィルター空間と見做す（[29]）．各 $x \in X$ に対して

$$\mu\left(\mathcal{F}_X\right)[x] = \left(\bigcap_{E \in \mathcal{F}_X} {}^*E\right)[x] = \bigcap_{E \in \mathcal{F}_X} {}^*E[x] = \mu_X(x)$$

である．したがって $\left({}^*X, \mu\left(\mathcal{F}_X\right)\right)$ に於ける近標準点とは通常の意味での近標準点（ある $\mu_X(x)$ に属す点）と同じものである．

定理 4.12. $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ を $\mathbb{U}$ に属す位相空間，$f\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ を $\mathbb{U}$ に属す写像とする．以下は同値：

(1) $f\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ は連続である．
(2) 任意の $x \in X$ に対して ${}^*f\left(\mu_X(x)\right) \subseteq \mu_Y\left(f(x)\right)$ が成り立つ．
(3) $f\colon \left(X, \mathcal{F}_X\right) \to \left(Y, \mathcal{F}_Y\right)$ はフィルター準同型である．
(4) ${}^*f\colon \left({}^*X, \mu\left(\mathcal{F}_X\right)\right) \to \left({}^*X, \mu\left(\mathcal{F}_X\right)\right)$ は空間的である．

証明. (1) と (2) の同値性は連続写像の超準的特徴付け（[40]）そのものである．(3) と (4) の同値性は定理 4.8 である．(4) から (2) が出ることは $\mu\left(\mathcal{F}_X\right)$ と $\mu\left(\mathcal{F}_Y\right)$ の形から明らかである．(1) から (3) を導く．いま $F \in \mathcal{F}_Y$ を任意に取る．すると，各 $x \in X$ に対し，

$$\begin{aligned}
f^*F[x] &= \{\, \left(x', x''\right) \in X \times X \mid \left(f\left(x'\right), f\left(x''\right)\right) \in F \,\}[x] \\
&= \{\, x'' \in X \mid \left(f(x), f\left(x''\right)\right) \in F \,\} \\
&= \{\, x'' \in X \mid f\left(x''\right) \in F\left[f(x)\right] \,\} \\
&= f^{-1}\left(F\left[f(x)\right]\right).
\end{aligned}$$

ここで，$F\left[f(x)\right]$ は $f(x)$ の近傍であるから，f の連続性より $f^*F[x]$ は x の近傍である．したがって $f^*F \in \mathcal{F}_X$ である．□

定義 4.13. $\mathbb{U}$ に属す前有界型空間 $\left(X, \mathcal{B}_X\right)$ を

$$\mathcal{I}_X := \{\, E \subseteq X \times X \mid E \subseteq \Delta_X \cup \bigcup_{i-1}^{n} \left(B_i \times B_i\right), B_i \in \mathcal{B}_X \,\}$$

によってイデアル空間と見做す（[22] も参照）．このとき

$$G(\mathcal{I}_X) = {}^*\Delta_X \cup \bigcup_{x\in X} (G_X(x) \times G_X(x))$$

が成り立つ．とくに $x \in X$ に対して

$$G(\mathcal{I}_X)[x] = G_X(x)$$

である．したがって $\left({}^*X, G(\mathcal{I}_X)\right)$ に於ける近標準点とは有限点（ある $G_X(x)$ に属す点）と同じものである．

定理 4.14. $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ を $\mathbb{U}$ に属す前有界型空間，$f\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ を $\mathbb{U}$ に属す写像とする．以下は同値：

(1) f は有界型である．
(2) 任意の $x \in X$ に対して ${}^*f(G_X(x)) \subseteq G_Y(f(x))$ が成り立つ．
(3) $f\colon (X, \mathcal{I}_X) \to (Y, \mathcal{I}_Y)$ はイデアル準同型である．
(4) ${}^*f\colon \left({}^*X, G(\mathcal{I}_X)\right) \to \left({}^*Y, G(\mathcal{I}_Y)\right)$ は空間的である．

証明. (1) と (2) の同値性は有界型写像の超準的特徴付け（[22]）そのものである．(3) と (4) の同値性は定理 4.9 である．(2) と (4) の同値性は $G(\mathcal{I}_X)$ と $G(\mathcal{I}_Y)$ の形から明らかである． □

注意 4.15. 位相空間に随伴するフィルターと，前有界型空間に随伴するイデアルとは，その定義が綺麗な類似していない．類似性を回復するために位相空間の側の定義を有界型空間のそれに合わせることを考えてみよう．$\mathbf{X}$ を位相空間として

$$\mathcal{F}'_X := \{\, E \in \mathcal{F}_X \mid E[x] = X \text{ for all but finitely many } x \in X \,\}$$

と定める．すると定理 4.12 のうち (1) から (3) の含意が導かれなくなる．何故なら，証明中，$F[y]$ が有限個の y を除いて Y であっても，$f^{-1}(F[f(x)])$ が有限個の x を除いて X とは限らないからである．

反対に有界型空間の側の定義を位相空間のそれに合わせてみよう．$\mathbf{X}$ を有界型空間として

$$\mathcal{I}'_X := \{\, E \subseteq X \times X \mid E[x] \cup \{\, x \,\} \in \mathcal{B}_X \,\}$$

と定める．すると定理 4.14 のうち (1) から (3) の含意が導かれなくなる．$E \in \mathcal{I}'_X$ に対して $f_* E \in \mathcal{I}'_Y$ を示したい．$y \in Y$ に対し

$$f_* E[y] = \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} f(E[x])$$

となる．f が有界型であることから $f(E[x])$ は有界である．しかし $f^{-1}(y)$ は無限集合となる可能性があるため $f_* E[y]$ は有界とは限らない．

いずれの場合も f の各点での逆像が有限であるという条件のもとで同値性が回復される．このように食い違い方も含めて見てみればアナロジーが成立している．

注意 4.16. 実際にはもっと簡明な扱いもできる．$\mathbb{U}$ に属す位相空間 $\mathbf{X}$ に対し，${}^*X$ 上の二項関係 E_X を

$$E_X := \bigcup_{x \in X} (\{\, x \,\} \times \mu_X(x))$$

で定めれば，$\mathbf{X} \mapsto \left({}^*X, E_X\right)$ は充満忠実な埋め込みである．また，$\mathbb{U}$ に属す前有界型空間 $\mathbf{Y}$ に対し，${}^*Y$ 上の二項関係 E_Y を

$$E_Y := \bigcup_{x \in Y} (\{\, x \,\} \times G_Y(x))$$

で定めれば，$\mathbf{Y} \mapsto \left({}^*Y, E_Y\right)$ は充満忠実な埋め込みである．

4.4. **小尺度と大尺度のアナロジー.** 小尺度と大尺度のアナロジーの源泉はこれまで述べてきたことから明らかであろう．どちらも空間的集合だというだけのことである．一般の空間的集合について成立する定理は，当然，特殊な空間的集合である小尺度空間（Π_1^{st}）と大尺度空間（Σ_1^{st}）でも成立し，その証明は共通の構造を持つことになる．しかしながら，一方の尺度で成立する定理であっても，その証明が空間的関係の定義可能性に依存しているならば，他方の尺度で成立するとは限らず，仮に成立するとしても証明が共通の構造を持つとは限らない．

ここで述べたものとは異なるタイプのアナロジーも存在する．次のような定理に現れるアナロジーである．

(1) ノルム空間上の線形写像が連続であることと有界型であることとは同値である．
(2) 局所凸位相線形空間と連続線形写像の成す圏と凸有界型線形空間と有界型線形写像の成す圏は同値である（[18] を参照）．

次節で述べる開錐を通した対応もこの種のアナロジーの一種である．これらのアナロジーを超準的に眺めると，無限小の逆数は無限大であり，無限大の逆数は無限小である，という順序代数的な法則に由来するものと考えられる（[22]）．これは本稿で扱ってきたアナロジーとは異なるものであることに注意せよ．

4.5. **その他のトポロジー.** 小尺度空間とは Π_1^{st}–空間的関係を持つ集合であり，大尺度空間とは Σ_1^{st}–空間的関係を持つ集合なのであった．大胆に換言すれば「小尺度トポロジーは Π_1^{st}–集合の幾何的研究」であり「大尺度トポロジーは Σ_1^{st}–集合の幾何的研究」ということである．したがって Π_1^{st} でも Σ_1^{st} でもない集合の幾何的研究は小尺度でも大尺度でもないトポロジーと呼びうるものになっている．しかし，Π_1^{st} でも Σ_1^{st} でもない（が何らかの複雑さの論理式で定義可能な）空間的関係と対応するような，自然な標準的構造は未知である．単に標準的な対応物が望みなら，$\bigcap_{i_1\in\mathbb{U}}\bigcup_{i_2\in\mathbb{U}}\cdots{}^*A_{i_1i_2\cdots}$ 又は $\bigcup_{i_1\in\mathbb{U}}\bigcap_{i_2\in\mathbb{U}}\cdots{}^*A_{i_1i_2\cdots}$ の形の定義を持つのだから，多重に添え字付けられた集合族 $\{A_{i_1i_2\cdots}\mid i_1,i_2,\ldots\in\mathbb{U}\}$ をそれと思えばよい．しかしこれは扱い難い．

既存の一般位相的な空間概念の多くは 2–フィルター空間や 2–イデアル空間になっているのであった．第 2.1 節でも述べたように，一般の $n\in\mathbb{N}$ に対して n–フィルター空間や n–イデアル空間を考えることもできる．これらは超準的な n–項関係を持つ集合と対応する．このような空間的集合の幾何学的な様相は十分に研究されているとは言えない．

5. 空間的集合のホモロジー

McCord [30] は超準解析に基づく位相空間のホモロジーを与えた．アイデアは極めて明快である．X を $\mathbb{U}$ に属す位相空間，G を ${}^*\mathbb{U}$ に属す（内的）加群とする．${}^*X^{p+1}$ の元 $(a_0,\ldots,a_p)$ が p–マイクロ単体（microsimplex）であるということを，頂点 $a_0,\ldots,a_p$ がある $\mu_X(x)$（$\mu_X(x)$ は x の近傍系の単子）に属すことと定める．G を係数とする p–マイクロ単体の形式的な内的超有限和の全体を $M_p(X;G)$ とし，通常の方法で境界準同型 $\partial_p\colon M_p(X;G)\to M_{p-1}(X;G)$ を定めると，$M_\bullet(X;G)$ は鎖複体を成す．この構成は標準位相空間の圏 $\mathfrak{Top}\cap\mathbb{U}$ から鎖複体の圏 $\mathfrak{Ch}$ への関手になっている．これと鎖複体のホモロジー関手 $H_\bullet^M$ との合成を G–係数 McCord ホモロジー関手と定める．これは完全性公理を含むホモロジー公理（[13]）を全て満たす．McCord の構成法を改変することで完全正則空間（[28]）や一様空間（[21]）の McCord ホモロジーを構成することもできる．コホモロジーも同様に構成できる（[39, 48]）．

McCord ホモロジーは無限に細かい被覆の Vietoris–Čech ホモロジー（[45, 5, 10]）**のような**ものであり，McCord コホモロジーは無限に細かい被覆の Alexander–Spanier コホモロジー（[1, 43]）**のような**ものである．もちろん，McCord ホモロジーは有限鎖ではなく**超**有限鎖をもとに作られるので，これらは正確には異なるものである．一方，McCord 理論と Čech–Vietoris 理論及び Alexander–Spanier 理論は，適当な条件のもとで同型となることが知られている（[16, 23, 48]）．

本節では，上の構成をさらに一般化して，空間的集合に対するホモロジー論を構成する．これは小尺度と大尺度の空間のホモロジー論を同時に与えるものになっている．このことを利用して，球面の部分集合の小尺度空間としてのホモロジーと，開錐の無限遠点全体の大尺度空間としてのホモロジーとの間の準同型を構成する．

5.1. **空間的集合のホモロジー群.** いま $\mathbf{X}$ を空間的集合，G を ${}^*\mathbb{U}$ に属す（内的）加群とする．各 $p\in\mathbb{N}$ に対し，${}^*X^{p+1}$ の元 $(a_0,\ldots,a_p)$ が p–**単体**（simplex）であるということを $\bigcap_{i=0}^p E_X[a_i]\neq\varnothing$ が成り立つことと定める．

注意 5.1. 我々の単体の定義は (X,X,E_X) の Vietoris 複体に於ける単体の定義と等しい．その他にも，Čech 複体に於ける単体の定義 $\bigcap_{i=0}^p E_X^{-1}[a_i]\neq\varnothing$ や，Rips 複体に於ける単体の定義 $E_X[a_i]\cap E_X[a_j]\neq\varnothing$ を用いることもできる．これらは E_X が同値関係のときには一致するが，一般の場合には一致しない．どの定義を採用しても，ある箇所では議論が上手くいくが，代わりに別の箇所では上手くいかない，というトレードオフがある．この点はすぐ後で述べる．

G を係数とする p–単体の形式的な内的超有限和の全体を $M_p(\mathbf{X};G)$ と定める．境界準同型 $\partial_p\colon M_p(\mathbf{X};G)\to M_{p-1}(\mathbf{X};G)$ を

$$\partial_p g(a_0,\ldots,a_p):=\sum_{i=0}^p(-1)^i g(a_0,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,a_p)$$

と定めることで $M_\bullet(\mathbf{X};G)$ は鎖複体を成す．ただし $M_{-1}(\mathbf{X};G)=0$, $\partial_0=0$ とする．（代わりに $M_{-1}(\mathbf{X};G)=G$ かつ $\partial_0\sum g_i\sigma_i=\sum g_i$ と定めれば簡約ホモロジー群の定義が得られる．）

いま $f\colon\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ を空間的写像とする．各 $p\in\mathbb{N}$ に対して $M_p(f;G)\colon M_p(\mathbf{X};G)\to M_p(\mathbf{Y};G)$ を

$$M_p(f;G)\,g(a_0,\ldots,a_p):=g(f(a_0),\ldots,f(a_p))$$

と定めると，$M_\bullet(f;G)$ は鎖写像となっている．

以上より $M_\bullet(-;G)$ は $\mathfrak{Sp}$ から鎖複体の圏 $\mathfrak{Ch}$ への関手である．これと鎖複体のホモロジー関手 $H_p\colon\mathfrak{Ch}\to\mathfrak{Ab}$ の合成を $H_p^M(-;G)\colon\mathfrak{Sp}\to\mathfrak{Ab}$ とする．これが所望のホモロジー関手である．同様にして空間的集合対の相対ホモロジー群の定義も得られる．

定理 5.2 (超鎖ホモトピー不変性)．$f, g \colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ を空間的写像とする．空間的関係 E_Y が同値関係になっていると仮定する．もし $f \simeq g$ ならば，$M_\bullet(f; G)$ と $M_\bullet(g; G)$ は鎖ホモトピー同値，したがって $H_p^M(f; G) = H_p^M(g; G)$ が成り立つ．

証明．概略だけ述べる．f と g が近接しているときにはプリズム準同型が $M_\bullet(f; G)$ と $M_\bullet(g; G)$ の間の鎖ホモトピーになっている．一般の場合には，f と g の間の超鎖ホモトピーを取り，プリズム準同型の内的な超有限列を作り，超有限和を取ることで鎖ホモトピーが得られる． □

注意 5.3. 超鎖ホモトピー不変性の証明では，f と g が近接しているとき，p–単体 $(a_0, \ldots, a_p)$ に対して $(f(a_0), \ldots, f(a_i), g(a_i), \ldots, g(a_p))$ が $p+1$–単体になるという性質を用いる．E_Y が同値関係とは限らない場合にはこの性質が壊れる．単体の定義を他の定義に置き換えてもこのことは変わらない．

5.2. **緩振動関数と開錐のホモロジー群.** 小尺度空間の圏 $\mathfrak{Flt}$ と大尺度空間の圏 $\mathfrak{Idl}$ とでそれぞれ別個に代数的不変量を構成した場合には，圏を跨ぐような代数的不変量間の射は個別的に構成してやる必要があった．一方，空間的集合の圏 $\mathfrak{Sp}$ では $\mathfrak{Flt}$ と $\mathfrak{Idl}$ を繋ぐような射を含むゆえ，代数的不変量間の射は（関手的である限り）自動的に得られる．ここではそのような例をひとつ挙げる．

定義 5.4. $\mathbf{X}$ を連結な粗空間，$\mathbf{Y}$ を一様空間とする．写像 $f \colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ が**緩振動**（slowly oscillating）とは，任意の $E \in \mathcal{I}_X$ と $U \in \mathcal{F}_Y$ に対し，ある $B \in \mathcal{B}_X$（$\mathcal{B}_X$ は $\mathcal{I}_X$ の誘導する前有界型）が存在して，任意の $(x, y) \in E \setminus (B \times B)$ に対して $(f(x), f(y)) \in U$ が成り立つときを言う．

緩振動関数は一種の空間的写像と見做せる．

事実 5.5 ([22])**.** $\mathbf{X}$ を $\mathbb{U}$ に属す連結な粗空間，$\mathbf{Y}$ を $\mathbb{U}$ に属す一様空間，$f \colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ を $\mathbb{U}$ に属す写像とする．${}^*\mathbf{X}$ と ${}^*\mathbf{Y}$ を通常のように空間的集合と見做す．また ${}^*\mathbf{X}_{\mathrm{inf}}$ を ${}^*\mathbf{X}$ の近標準的でない点（つまり無限遠点）全体の成す部分空間的集合とする．以下は同値：

(1) f は緩振動である．
(2) ${}^*f \colon {}^*\mathbf{X}_{\mathrm{inf}} \to {}^*\mathbf{Y}$ は空間的である．

したがって次が成り立つ．

定義 5.6. X をノルム空間 V の単位球面のコンパクト部分空間とする．X の**開錐**（open cone）とは

$$OX := \{\, \lambda x \mid \lambda > 0, x \in X \,\}$$

で定義される V の部分空間である．以下，X を一様空間，OX を粗空間と見做す．

次の定理はよく知られた事実である．ここでは超準的証明を与えるが，無限大超実数と無限小超実数は互いの逆数である，という事実が用いられていることに注意されたい．

定理 5.7. X と OX を上と同様とする．このとき $f(x) := x / \|x\|$ で定義される写像 $f \colon OX \to X$ は緩振動である．

証明．絶対性より定理に現れる空間は $\mathbb{U}$ に属すと仮定してよい．$x, y \in {}^*\mathbf{OX}_{\mathrm{inf}}$ について $(x, y) \in G(\mathcal{I}_{OX})$ と仮定する．すなわち $\|x\|$ と $\|y\|$ は無限であり $\|x - y\|$ は有限である．

$$\begin{aligned}
\left\| {}^*f(x) - {}^*f(y) \right\| &= \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{x}{\|y\|} + \frac{x}{\|y\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\
&\leqslant \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{x}{\|y\|} \right\| + \left\| \frac{x}{\|y\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\
&= \frac{\left| \|y\| - \|x\| \right|}{\|y\|} + \frac{\|x - y\|}{\|y\|} \\
&\leqslant \frac{\|y - x\|}{\|y\|} + \frac{\|x - y\|}{\|y\|} \\
&= \frac{\text{finite}}{\text{infinite}} + \frac{\text{finite}}{\text{infinite}} \\
&= \text{infinitesimal}.
\end{aligned}$$

したがって $\left({}^*f(x), {}^*f(y)\right) \in \mu(\mathcal{F}_X)$ である． □

系 5.8. X，OX，f を上と同様とする．緩振動写像 $f \colon OX \to X$ は準同型 $H_\bullet(f; G) : H_\bullet\left({}^*\mathbf{OX}_{\mathrm{inf}}; G\right) \to H_\bullet\left({}^*\mathbf{X}; G\right)$ を誘導する．

5.3. **今後の展望.** 本稿で与えたホモロジー論は「同値的」な空間的集合に対してのみ良く振る舞う．既存の標準的な空間概念の中では一様空間と粗空間に対してのみ良く振る舞うということである．「非同値的」な空間に対しても良く振る舞うホモロジー論の構成はひとつの課題である．

位相空間の特異（コ）ホモロジー群に対して特異ホモトピー群（通常のホモトピー群）が存在するように，位相空間の Čech（コ）ホモロジー群に対しては Čech ホモトピー群が考えられる（[35, 36, 37]）．同様にして McCord ホモロジー群に対応するものとして McCord ホモトピー群を考えることができる．さらに空間的集合への一般化を考えることもできる．これは位相空間や一様空間等の小尺度空間のホモトピー群を与えるのみならず，粗空間のような大尺度空間のホモトピー群をも同時に与えるものでもある．それゆえ，一方の尺度の空間のホモトピー群を計算する為に他方の尺度の空間のホモトピー群の情報を利用することが原理的には可能となる．超準的なホモトピー群と既存の標準的なホモトピー群（[31]）との関係もまた興味深い問題である．

多様体あるいはより一般の微分空間（[20]）のようなリッチな構造を持つ空間は理論上も実践上も特に重要かつ興味深い対象である．ところが，我々の枠組みは空間の一般位相的な側面にのみ着目しており，これらの興味深い空間（の構造）を扱うことができない．我々の枠組みをこうした空間に適合させることは一つの研究の方向性であろう．例えば，de Rham 理論（[8]）や Morse–Floer 理論（[3, 15]）のような空間のリッチな構造を利用した理論を,（エンリッチされた）小尺度空間や大尺度空間を含む空間へと一般化することができれば，これは非常に有用であろう．ホモロジー群やホモトピー群に於けると同様，小尺度空間と大尺度空間が射を通して関連しているときには，一方の代数的データを他方の代数的データの計算に利用できるからである．もちろん，これらは思い付きの域を出ていない段階であり，一層の検討を必要とする．

参考文献

[1] J. W. Alexander, "On the chains of a complex and their duals," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 21, no. 8, pp. 509–511, 1935.

[2] V. Benci and M. Di Nasso, *How to Measure the Infinite.* World Scientific, 2019.

[3] R. Bott, "Morse theory indomitable," *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, vol. 68, pp. 99–114, 1988.

[4] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques, Chapitres 1 à 5.* Springer, 2007.

[5] E. Čech, "Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque," *Fundamenta Mathematicae*, vol. 19, no. 1, pp. 149–183, 1932.

[6] C. C. Chang and H. J. Keisler, *Model Theory*, 3rd ed., ser. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland, 1990, vol. 73.

[7] A. Császár, *Fondements de la topology générale.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960.

[8] G. de Rham, *Differentiable Manifolds: Forms, Currents, Harmonic Forms*, ser. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin, Heidelberg, 1984, vol. 266.

[9] M. Di Nasso, I. Goldbring, and M. Lupini, *Nonstandard Methods in Ramsey Theory and Combinatorial Number Theory*, ser. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Cham, 2019, vol. 2239.

[10] C. H. Dowker, "Homology groups of relations," *The Annals of Mathematics*, vol. 56, no. 1, pp. 84–95, 1952.

[11] A. N. Dranishnikov, "Asymptotic topology," *Russian Mathematical Surveys*, vol. 55, no. 6, pp. 1085–1129, 2000.

[12] J. Dydak, "Ends and simple coarse structures," *Mediterranean Journal of Mathematics*, vol. 17, no. 4, pp. 1–22, 2019.

[13] S. Eilenberg and N. E. Steenrod, "Axiomatic approach to homology theory," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 31, no. 4, pp. 117–120, 1945.

[14] S. Feferman, "Set-theoretic foundations of category theory," in *Reports of the Midwest Category Seminar III*, S. MacLane, Ed. Springer, Berlin, Heidelberg, 1969, pp. 201–247.

[15] A. Floer, "Morse theory for Lagrangian intersections," *Journal of Differential Geometry*, vol. 28, no. 3, pp. 513–547, 1988.

[16] S. Garavaglia, "Homology with equationally compact coefficients," *Fundamenta Mathematicae*, vol. 100, no. 1, pp. 89–95, 1978.

[17] F. Hausdorff, *Grundz´uge der Mengenlehre.* Verlag von Veit & Comp., Leipzig, 1914.

[18] H. Hogbe-Nlend, *Bornologies and Functional Analysis*, ser. North-Holland Mathematics Studies. North-Holland, 1977, vol. 26.

[19] K. Hrbacek, "Axiomatic foundations for nonstandard analysis," *Fundamenta Mathematicae*, vol. 98, no. 1, pp. 1–19, 1978.

[20] P. Iglesias-Zemmour, *Diffeology*, ser. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2013, vol. 185.

[21] T. Imamura, "Nonstandard homology theory for uniform spaces," *Topology and its Applications*, vol. 209, pp. 22–29, 2016, corrigendum in DOI:10.13140/RG.2.2.36585.75368.

[22] ——, "Nonstandard methods in large-scale topology," *Topology and its Applications*, vol. 257, pp. 67–84, 2019.

[23] ——, "Relationship among various Vietoris-type and microsimplicial homology theories," *Archivum Mathematicum*, vol. 57, no. 3, pp. 131–150, 2021.

[24] ——, "Nonstandard methods in large-scale topology II," 2020, arXiv:2002.12803v2.

[25] V. Kanovei and M. Reeken, *Nonstandard Analysis, Axiomatically*, ser. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004.

[26] T. Kawai, "Nonstandard Analysis by Axiomatic Method," in *Southeast Asian Conference on Logic: Proceedings of the Logic Conference Singapore, 1981*, ser. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, C.-T. Chong and M. Wicks, Eds., vol. 111, 1983, pp. 55–76.
[27] H. H. Keller, "Die Limes-Uniformisierbarkeit der Limesr´aume," *Mathematische Annalen*, vol. 176, pp. 334–342, 1968.
[28] T. Korppi, "A new microsimplicial homology theory," 2012, preprint, viXra:1205.0081.
[29] S. Lubkin, "Theory of covering spaces," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 104, no. 2, pp. 205–238, 1962.
[30] M. C. McCord, "Non-standard analysis and homology," *Fundamenta Mathematicae*, vol. 74, no. 1, pp. 21–28, 1972.
[31] P. D. Mitchener, B. Norouzizadeh, and T. Schick, "Coarse homotopy groups," *Mathematische Nachrichten*, vol. 293, no. 8, pp. 1515–1533, 2020.
[32] M. L. Nachbin, "Sur les espaces uniformes ordonnés," *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, vol. 226, pp. 774–775, 1948.
[33] E. Nelson, "Internal set theory: A new approach to nonstandard analysis," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 83, no. 6, pp. 1165–1198, 1977.
[34] ——, "The syntax of nonstandard analysis," *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 38, no. 2, pp. 123–134, 1988.
[35] T. Porter, "Čech homotopy I," *Journal of the London Mathematical Society*, vol. s2-6, no. 3, pp. 429–436, 1973.
[36] ——, "Čech homotopy II," *Journal of the London Mathematical Society*, vol. s2-6, no. 4, pp. 667–675, 1973.
[37] ——, "Čech homotopy III," *Bulletin of the London Mathematical Society*, vol. 6, no. 3, pp. 307–311, 1974.
[38] I. Protasov and T. Banakh, *Ball Structures and Colorings of Graphs and Groups*, ser. Mathematical Studies Monograph Series. VNTL Publishers, 2003, vol. 11.
[39] J.-P. Reveillès, "Une approche infinitésimale de la cohomologie de Spanier (An Infinitesimal Approach to the Spanier Cohomology)," *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I, Mathématique*, vol. 298, no. 10, pp. 229–231, 1984.
[40] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, ser. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland, 1966, vol. 42.
[41] J. Roe, *Lectures on Coarse Geometry*, ser. University Lecture Series. American Mathematical Society, 2003, vol. 31.
[42] S. Salbany and T. Todorov, "Nonstandard Analysis in Topology," 2011, preprint, arXiv:1107.3323v1.
[43] E. H. Spanier, "Cohomology theory for general spaces," *Annals of Mathematics*, vol. 49, no. 2, pp. 407–427, 1948.
[44] K. D. Stroyan and W. A. J. Luxemburg, *Introduction to The Theory of Infinitesimals*, ser. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 1976, vol. 72.
[45] L. Vietoris, "Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen," *Mathematische Annalen*, vol. 97, pp. 454–472, 1927.
[46] A. Weil, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, ser. Actualités scientifiques et industrielles. Hermann Éditeurs, 1937, vol. 551.
[47] N. Zava, "Generalisations of coarse spaces," *Topology and its Applications*, vol. 263, pp. 230–256, 2019.
[48] R. T. Živaljević, "On a cohomology theory based on hyperfinite sums of microsimplexes," *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 128, no. 1, pp. 201–208, 1987.

AaaS Bridge, inc., 2-1-3 Amanuma, Suginami-ku, Tokyo 167-0032, Japan
Email address: imamura.takuma.66s@kyoto-u.jp