一般化シンク関数とノルムの漸近展開

Houry Melkonian (University of Exeter, UK)

竹内 慎吾 (芝浦工業大学)

Shingo Takeuchi
Department of Mathematical Sciences
Shibaura Institute of Technology

本研究は共著論文 [6] に基づく．本稿は発表時のスライドに口頭で述べた内容やその後の進展を加筆したものである．

1　イントロダクション

1.1　シンク関数

シンク関数

$$\operatorname{sinc} x := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0). \end{cases}$$

シンク関数は工学において重要な関数である．大きな特徴として短形波のフーリエ変換であることがあげられる．主な応用例としては通信理論におけるシャノンのサンプリング定理や，数値計算の近似理論におけるシンク近似法（Whittaker，Stenger 等）がある．

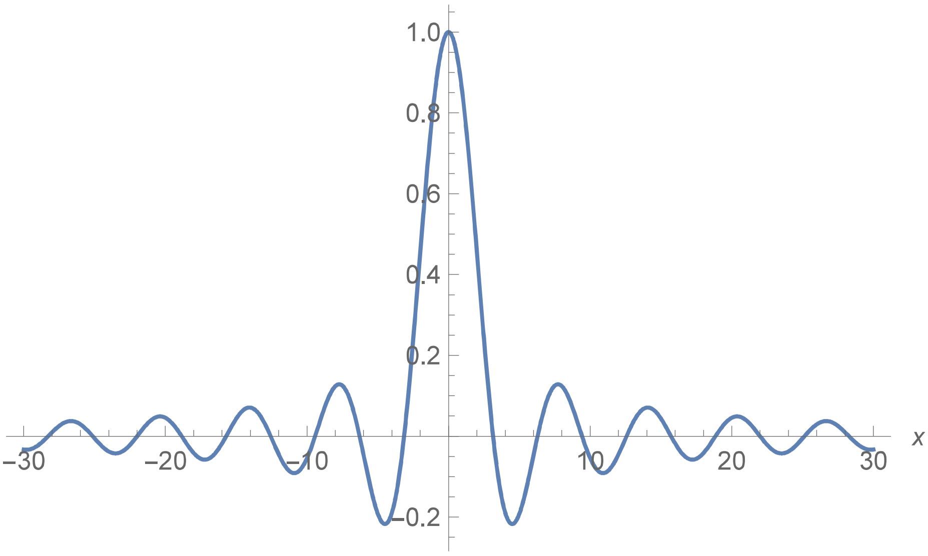

図 1　$\operatorname{sinc} x$ のグラフ

シャノンのサンプリング定理 (Shannon (1949))

関数 $x:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ のフーリエ変換

$$X(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

に対して，ある $W>0$ が存在し，$X(\omega)=0$ $(|\omega|\geq W)$ であるとする．このとき，$T:=\pi/W$ とおくと，

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\operatorname{sinc}\left[\pi\left(n-\frac{t}{T}\right)\right].$$

シンク関数は応用分野では “$\operatorname{sinc} x$” と書き表すことが多いようだが，数学ではそのまま “$\frac{\sin x}{x}$” と書き表すことが多いようである．本稿では行幅の関係で “$\operatorname{sinc} x$” と書くこともあるが，主に “$\frac{\sin x}{x}$” と書き表すことにする．

1.2　シンク関数のノルム

まずシンク関数のノルムについて次の不等式が知られている．

ボールの積分不等式 (Ball [1])

$$\sqrt{m}\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|^m dx \le \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2.2214 \quad (m \ge 2)$$

等号は $m=2$ のとき，またそのときに限る．

ボールの積分不等式は [1] において「n 次元単位超立方体を $(n-1)$ 次元超平面で切った断面積の最大値は $\sqrt{2}$ である」ことの証明に用いられた．

遠方では次の定理が成り立つ．

漸近展開 (Borwein-Borwein-Leonard [3], Kerman-Ol'hava-Spektor [5])

ある c_j $(j \ge 3)$ が存在して，

$$\sqrt{m}\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|^m dx \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\left(1-\frac{3}{20}\frac{1}{m}-\frac{13}{1120}\frac{1}{m^2}\right)+\sum_{j=3}^\infty \frac{c_j}{m^j} \quad (m \to \infty).$$

ここで，$f(m) \sim \sum_{k=0}^\infty a_k/m^k$ $(m \to \infty)$ であるとは，任意の $n=1,2,\dots$ に対して $f(m)=\sum_{k=0}^{n-1} a_k/m^k + O(1/m^n)$ $(m \to \infty)$ であることをいう．

$1/m$ までの係数は [3] によって，$1/m^2$ の係数は [5] によって得られた．漸近展開の式において，右辺の関数は $m \gg 1$ で上に凸であり，$m \to \infty$ のとき $\sqrt{3\pi/2} \approx 2.1708$ に収束する．図 2 からもその様子が見てとれる．

なお，図 2 において $3<m<4$ 付近に現れている極小点については何も知られていないようである．

1.3 一般化シンク関数

一般化三角関数を用いてシンク関数を一般化する．

まず一般化三角関数 $\sin_{p,q} x$ と一般化円周率 $\pi_{p,q}$ は次のように定義される：$p,\ q \in (1,\infty)$ に対して，

$$F_{p,q}(x) := \int_0^x \frac{dt}{(1-t^q)^{1/p}} \quad (0 \le x \le 1)$$

とし，特に $\pi_{p,q} := 2F_{p,q}(1)$ とする．このとき，

$$\sin_{p,q} x := F_{p,q}^{-1}(x) \quad \left(0 \le x \le \frac{\pi_{p,q}}{2}\right)$$

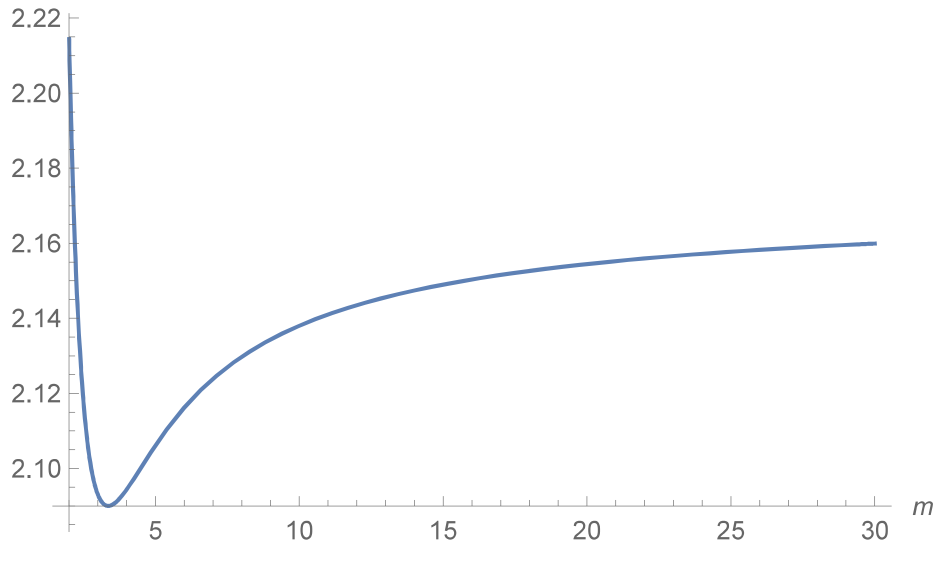

図 2　$\sqrt{m}\int_0^\infty |\operatorname{sinc} x|^m\,dx$ のグラフ（横軸は $m \geq 2$）

と定義する．さらに $\sin_{p,q} x$ を $\sin x$ のような周期 $2\pi_{p,q}$ の奇関数になるように $\mathbb{R}$ 全体に拡張する．特に $\sin_{2,2} x = \sin x$，$\pi_{2,2} = \pi$ である．一般化三角関数 $\sin_{p,q} x$ と一般化円周率 $\pi_{p,q}$ は 1 次元 p ラプラシアンの固有関数とその周期を表すのに便利で，p ラプラシアンを含む微分方程式の振動問題や分岐問題の研究に古くから用いられている．

これを用いて一般化シンク関数を次のように定義する：

$$\operatorname{sinc}_{p,q} x := \begin{cases} \dfrac{\sin_{p,q} x}{x} & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0). \end{cases}$$

特に，$\sin_p x := \sin_{p,p} x$，$\pi_p := \pi_{p,p}$，$\operatorname{sinc}_p x := \operatorname{sinc}_{p,p} x$ で表す．

さらに $\cos_{p,q} x$ を $\sin_{p,q} x$ の導関数として定義しておく．このとき $|\cos_{p,q} x|^p + |\sin_{p,q} x|^q = 1$ が成り立つことに注意する．また，$\cos_{p,q} x$ はそのまま微分すると

$$(\cos_{p,q} x)' = -\frac{q}{p}|\cos_{p,q} x|^{2-p}|\sin_{p,q} x|^{q-2}\sin_{p,q} x$$

であって（$p \neq 2$ のときは）再び $\cos_{p,q} x$ を含む形となるが，$(p-1)$ 乗してから微分すると

$$(|\cos_{p,q} x|^{p-2}\cos_{p,q} x)' = -\frac{(p-1)q}{p}|\sin_{p,q} x|^{q-2}\sin_{p,q} x$$

であることに注意する．なお，この式は $\sin_{p,q} x$ が p ラプラシアンの（非斉次固有値問題の）固有関数であることを表している．

さて，D. Edmunds (University of Sussex) はボールの積分不等式（[1]）およびノルムの漸近展開公式（[3, 5]）を一般化シンク関数に対して拡張する問題を提唱し，部分的な回答として，1 パラメータの一般化シンク関数のノルムに対して次の定理を証明した．

漸近展開 (Edmunds-Melkonian [4])

$p \in (1, \infty)$ に対して，ある γ_j $(j \geq 2)$ が存在し，

$$\begin{aligned} m^{1/p} \int_0^\infty & \left| \frac{\sin_p x}{x} \right|^m dx \\ & \sim \frac{(p(p+1))^{1/p}}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \left[1 - \frac{(p+1)(p^2-p-1)}{2p(2p+1)} \frac{1}{m} \right] \\ & \qquad + \frac{1}{p} \sum_{j=2}^\infty \Gamma\left(j + \frac{1}{p}\right) \frac{\gamma_j}{m^j} \quad (m \to \infty). \end{aligned}$$

この漸近展開の式は $p = 2$ のとき [3] の結果に一致する．右辺の関数は $p < (1+\sqrt{5})/2$ の場合は $p^2 - p - 1 < 0$ だから，$m \gg 1$ では下に凸となり，$m \to \infty$ のとき上方から極限値 $(p(p+1))^{1/p}\Gamma(1/p)/p$ に収束することがわかる．したがって，この場合は極小点だけでなく極大点も存在するはずである．$p = 2$ のときは図 2 のように上に凸で下方からの収束であったから，様子が著しく異なっている．

なお，$1/m^2$ の係数は [4] では得られていない（$p = 2$ のときは [5] によって得られている）．また，ボールの積分不等式の拡張についても [4] では言及されていない．

1.4 主結果

本研究はシンク関数のノルムに注目する．具体的にはシンク関数の L^m ノルムについて，m に関する漸近展開の公式を一般化することを目的とする．

我々は [4] の 1 パラメータの結果を 2 パラメータに拡張した．

主定理 (Melkonian-T. [6])

$p,\ q \in (1,\infty)$ に対して，ある γ_j $(j \geq 2)$ が存在し，

$$
\begin{aligned}
&m^{1/q} \int_0^\infty \left| \frac{\sin_{p,q} x}{x} \right|^m dx \\
&\quad \sim \frac{(p(q+1))^{1/q}}{q} \Gamma\left(\frac{1}{q}\right) \left[1 - \frac{(q+1)(pq^2+2pq-3q^2+p-2q)}{2q^2(2q+1)} \frac{1}{m} \right] \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{q} \sum_{j=2}^\infty \Gamma\left(j + \frac{1}{q}\right) \frac{\gamma_j}{m^j} \quad (m \to \infty).
\end{aligned}
$$

この漸近展開の式は $p=q$ のとき [4] の結果に一致する．右辺の関数は $p < q(3q+2)/(q+1)^2$ の場合，$m \gg 1$ では下に凸となり，$m \to \infty$ のとき上方から極限値 $(p(q+1))^{1/q}\Gamma(1/q)/q$ に収束することがわかる．したがって，この場合は極小点だけでなく極大点も存在するはずである．なお，$1/m^2$ の係数は得られていない．

この定理の証明は第 3 章で行う．

2 一般化シンク関数の積分

一般化シンク関数の積分はディリクレ積分（シンク関数の積分）の一般化でもある．ここではディリクレ積分についてよく知られた性質の類似物を紹介する．

2.1 $\int_0^\infty \operatorname{sinc} x\, dx = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^\infty \operatorname{sinc}^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}$

定理 1 (Melkonian-T. [6])

$p,\ q \in (1,\infty)$ に対して，

$$
\int_0^\infty \frac{\sin_{p,q} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{\sin_{p,q}(\pi_{p,q} x)}{\sin(\pi x)}\, dx = \int_0^1 \log\left[\cot\left(\frac{\pi}{2\pi_{p,q}} F_{p,q}(u) \right) \right] du,
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left(\frac{\sin_{p,q} x}{x} \right)^2 dx \\
&\qquad = \frac{\pi^2}{2\pi_{p,q}} \int_0^1 \left[\frac{\sin_{p,q}(\pi_{p,q} x)}{\sin(\pi x)} \right]^2 dx = \frac{2\pi}{\pi_{p,q}} \int_0^1 u \cot\left(\frac{\pi}{\pi_{p,q}} F_{p,q}(u) \right) du.
\end{aligned}
$$

この定理の証明は下の定理 1' のそれを参照のこと．

第 1 式の左の等号は，$p=q=2$ の場合は右辺の被積分関数が 1 となるので $\pi/2$ となりディリクレ積分の値を与える．$p=q=2$ 以外の場合，右辺は具体的な積分値を与えるわけではないが，無限区間 $[0,\infty)$ 上の積分を有限区間 $[0,1]$ 上の積分に変形しており，この変形が下の系 2 の証明に役に立つ．第 2 式の左の等号についても同様である．

第 1 式の右の等号は積分関数の逆関数である $\sin_{p,q}$ を用いずに初等関数と積分関数 $F_{p,q}$ の積分に変形できることを意味する．この変形によって例えば Mathematica で次のように数値積分することが可能になる（ガウスの超幾何級数 F を用いて $F_{p,q}(u)=\sin_{p,q}^{-1}u=uF(1/p,1/q;1+1/q;u^q)$ と表せることを利用するとよい）．例えば，

$$\int_0^\infty \frac{\sin_{2,2}x}{x}\,dx \approx 1.5708 \approx \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin_{1.5,2.5}x}{x}\,dx \approx 1.7756, \quad \int_0^\infty \frac{\sin_{2.5,1.5}x}{x}\,dx \approx 1.4987$$

という具合である．第 2 式の右の等号も同様で，

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin_{2,2}x}{x}\right)^2 dx \approx 1.5708 \approx \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin_{1.5,2.5}x}{x}\right)^2 dx \approx 1.6635, \quad \int_0^\infty \left(\frac{\sin_{2.5,1.5}x}{x}\right)^2 dx \approx 1.5095$$

という具合である[*1]．

定理 1 の各式の左の等号をより一般化したのが次の定理である[*2]．

[*1] 一般化シンク関数のこの数値積分は佐藤朔氏（芝浦工業大学大学院 M2）による．

[*2] これはまだ積分の表現方法に改善の余地があるかもしれない．

定理 1' (Melkonian-T. [6])

$p,\ q \in (1,\infty),\ r \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin_{p,q} x}{x}\right)^r dx = \frac{1}{2\pi_{p,q}^{r-1}} \int_0^1 \sin_{p,q}^r (\pi_{p,q} t) L_r(t)\, dt.$$

ここで,

$$L_r(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^{rn}}{(t+n)^r} = -\frac{1}{(r-1)!} \lim_{z\to -t} \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} \left[\frac{\pi}{\varphi(\pi z)}\right].$$

ただし,$\varphi(z) = \sin z$（r が奇数）;$= \tan z$（r が偶数）である.

$L^r(t)$ の級数を極限による表現は留数定理による.最初のいくつかを実際に計算すると,

$$L_1(t) = \frac{\pi}{\sin(\pi t)}, \quad L_2(t) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi t)},$$
$$L_3(t) = \frac{\pi^3(2-\sin^2(\pi t))}{2\sin^3(\pi t)}, \quad L_4(t) = \frac{\pi^4(3-2\sin^2(\pi t))}{3\sin^4(\pi t)}$$

となる.

2.2 $(\int_0^\infty \operatorname{sinc} x\, dx)^2 = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \operatorname{sinc}^2 x\, dx\ (=\frac{\pi^2}{4})$

定理 1 から次の興味深い不等式が得られる.

系 2 (Melkonian-T. [6])

$p,\ q \in (1,\infty)$ に対して,

$$\left(\int_0^\infty \frac{\sin_{p,q} x}{x}\, dx\right)^2 \le \frac{\pi_{p,q}}{2} \int_0^\infty \left(\frac{\sin_{p,q} x}{x}\right)^2 dx.$$

等号は $p=q=2$ のときに限る.

この不等式は一見するとシュワルツの不等式の形をしているが,積分区間が無限であるからシュワルツの不等式から直接は得られない.そこで定理 1 の第 1 式の左の等号を用いていったん積分区間を有限にしてからシュワルツの不等式で評価し,次に第 2 式の左の

等号を用いて積分区間を戻す：

$$\left(\int_0^\infty \frac{\sin_{p,q} x}{x}\,dx\right)^2 \overset{\text{定理 1}}{=} \frac{\pi^2}{4}\left(\int_0^1 \frac{\sin_{p,q}(\pi_{p,q}x)}{\sin(\pi x)}\,dx\right)^2$$
$$\le \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \left(\frac{\sin_{p,q}(\pi_{p,q}x)}{\sin(\pi x)}\right)^2 dx \overset{\text{定理 1}}{=} \frac{\pi_{p,q}}{2}\int_0^\infty \left(\frac{\sin_{p,q} x}{x}\right)^2 dx.$$

この不等式の等号成立に関しては，$\sin_{p,q}(\pi_{p,q}x)$ が $x \in (0,1) \setminus \{1/2\}$ において $p,\ q$ に関して狭義単調減少である（[10]）ことからわかる．

この不等式の両辺は定理 1 のところで述べたように超幾何級数を用いて Mathematica で数値計算できるので，実際に pq 平面上で右辺と左辺の差のグラフの概形を描かせると，常に 0 以上であることが見てとれる（図 3）．特に $p=2$ 付近の "海溝" や遠方での挙動を調べると面白そうである．

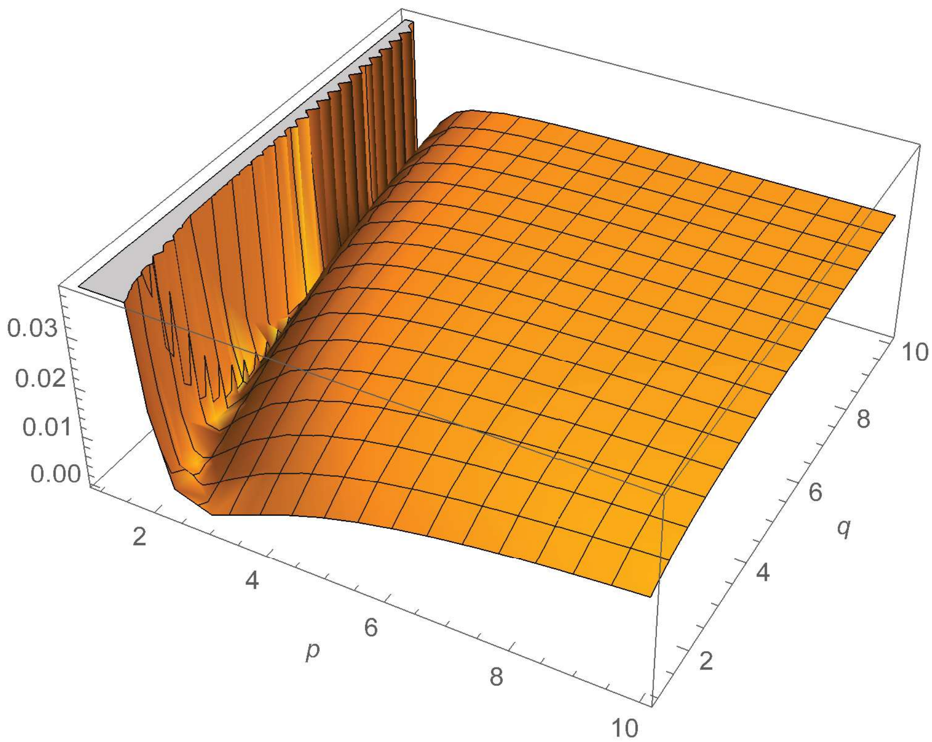

図 3　右辺と左辺の差のグラフ

2.3 $\int_0^\infty \mathrm{sinc}^2 x\,dx = \int_0^\infty \mathrm{sinc}\,x\,dx = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx\ (=\frac{\pi^2}{4})$

定理 3 (Melkonian-T. [6])

$q \in (1,\infty)$ に対して，$q^* = q/(q-1)$ とするとき，

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin_{q^*,q} x}{x}\right|^q dx = \frac{q^*}{2^{2/q}} \int_0^\infty \left|\frac{\sin_{2,q} x}{x}\right|^{q-2} \frac{\sin_{2,q} x}{x}\,dx$$
$$= 2^{1-2/q} \int_0^\infty \frac{1-\cos_{2,q} x}{x^q}\,dx.$$

この不等式において特に $q=2$ とするとこの節の見出しにある等式となる．

証明は次のように行う．左の等号を示す．倍角公式（[11]）：

$$\sin_{2,q}(2^{2/q}x) = 2^{2/q} \sin_{q^*,q} x |\cos_{q^*,q} x|^{q^*-2} \cos_{q^*,q} x$$

により

$$|\sin_{2,q}(2^{2/q}x)|^{q-2} \sin_{2,q}(2^{2/q}x) = 2^{2/q^*} |\sin_{q^*,q} x|^{q-2} \sin_{q^*,q} x \cos_{q^*,q} x$$
$$= \frac{2^{2/q^*}}{q}(|\sin_{q^*,q} x|^q)'$$

であることに注意する．部分積分してからこれを用いると，

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin_{q^*,q} x}{x}\right|^q dx = \left[\frac{1}{1-q}x^{1-q}|\sin_{q^*,q} x|^q\right]_0^\infty - \frac{1}{1-q}\int_0^\infty x^{1-q}(|\sin_{q^*,q} x|^q)'\,dx$$
$$= \frac{q^*}{2^{2/q^*}} \int_0^\infty x^{1-q}|\sin_{2,q}(2^{2/q}x)|^{q-2} \sin_{2,q}(2^{2/q}x)\,dx$$
$$= \frac{q^*}{2^{2/q}} \int_0^\infty \left|\frac{\sin_{2,q} x}{x}\right|^{q-2} \frac{\sin_{2,q} x}{x}\,dx$$

となって左の等号を得る．次に右の等号を示す．第 1.3 節で述べたように

$$-(|\cos_{p,q} x|^{p-2} \cos_{p,q} x)' = \frac{q}{p^*}|\sin_{p,q} x|^{q-2} \sin_{p,q} x$$

であるから，これを用いてから部分積分すると

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin_{p,q} x}{x}\right|^{q-2} \frac{\sin_{p,q} x}{x}\,dx = \frac{p^*}{q^*}\int_0^\infty \frac{1-|\cos_{p,q} x|^{p-2}\cos_{p,q} x}{x^q}\,dx$$

を導ける．特に $p=2$ として

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin_{2,q} x}{x}\right|^{q-2} \frac{\sin_{2,q} x}{x}\,dx = \frac{2}{q^*}\int_0^\infty \frac{1-\cos_{2,q} x}{x^q}\,dx$$

を得る．

3 主定理の証明

$$I_{p,q}(m) := m^{1/q}\int_0^\infty \left|\frac{\sin_{p,q} x}{x}\right|^m dx \quad (p,q,m\in(1,\infty))$$

主定理を再掲する：

定理 4 (Melkonian-T. [6])

$p,\ q\in(1,\infty)$ に対して，ある $\gamma_j\ (j\geq 2)$ が存在し，

$$\begin{aligned} &I_{p,q}(m)\\ &\sim \frac{(p(q+1))^{1/q}}{q}\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\left[1-\frac{(q+1)(pq^2+2pq-3q^2+p-2q)}{2q^2(2q+1)}\frac{1}{m}\right]\\ &\qquad\qquad +\frac{1}{q}\sum_{j=2}^\infty \Gamma\left(j+\frac{1}{q}\right)\frac{\gamma_j}{m^j} \quad (m\to\infty). \end{aligned}$$

定理 4 の証明のために補題を二つ準備しておく．

補題 1 (Paredes-Uchiyama [9])

$\sin_{p,q} x$ は $x=0$ のある近傍で次のように展開できる：

$$\sin_{p,q} x = x - \frac{1}{p(q+1)}|x|^q x + \frac{1-p+3q-pq}{2p^2(q+1)(2q+1)}|x|^{2q}x+\cdots$$

（一般化マクローリン展開）

補題 2

任意の $\alpha \in (0,\infty)$ に対して，

$$\lim_{m\to\infty} I_{p,q}(m) = \lim_{m\to\infty} m^{1/q}\int_0^\alpha \left|\frac{\sin_{p,q} x}{x}\right|^m dx \ (=: \lim_{m\to\infty} J(m,\alpha))$$

この極限値は α には無関係である．

補題 1 は $p=q=2$ の場合，$\sin x$ のマクローリン展開のことなので，各項の係数はすべてわかる（その結果，定理 4 は γ_2 までわかり [5] の結果と一致する）．それ以外の場合，[9] では第 3 項までしか与えられていない．補題 2 の証明は [6] を参照のこと．

定理 4 の証明は次のように行う．補題 2 より，十分小さい $\alpha \in (0,1)$ を固定して $\lim_{m\to\infty} J(m,\alpha)$ を求めればよい．

$$J(m,\alpha) := m^{1/q}\int_0^\alpha \left|\frac{\sin_{p,q} x}{x}\right|^m dx = \frac{m^{1/q}}{q}\int_0^{\alpha^q} e^{-mf(t)} g(t)\, dt$$

と表せる．ただし，

$$f(t) = -\log\left(\frac{\sin_{p,q}(t^{1/q})}{t^{1/q}}\right), \quad g(t) = t^{1/q-1}$$

である．補題 1 より，

$$\frac{\sin_{p,q}(t^{1/q})}{t^{1/q}} = 1 - \frac{1}{p(q+1)}t + \frac{1-p+3q-pq}{2p^2(q+1)(2q+1)}t^2 + \cdots$$

であるから，$f(t)$ のマクローリン展開の係数が t^2 の項までわかる．漸近展開に関するラプラスの方法（Olver [7]）により，ある γ_j $(j \geq 0)$ が存在し，

$$J(m,\alpha) \sim \frac{m^{1/q}}{q} e^{-mf(0)} \sum_{j=0}^\infty \Gamma\left(j+\frac{1}{q}\right)\frac{\gamma_j}{m^{j+1/q}} = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^\infty \Gamma\left(j+\frac{1}{q}\right)\frac{\gamma_j}{m^j}$$

である．$f(t)$ のマクローリン展開の t^2 までの係数から $\gamma_0,\ \gamma_1$ を得る．

定理 4 の漸近展開の主要項は，次のようにしても求められる．

任意の $\varepsilon \in (0,1)$ をとる．$\alpha = \sin_{p,q}^{-1}\varepsilon$ に対して，

$$\frac{J(m,\alpha)}{m^{1/q}} = \int_0^\alpha \left(\frac{\sin_{p,q} x}{x}\right)^m dx = \int_0^\varepsilon \left(\frac{y}{\sin_{p,q}^{-1} y}\right)^m \frac{dy}{(1-y^q)^{1/p}}$$

が成り立つ．ここで Bhayo-Vuorinen [2] による不等式：

$$(1-y^q)^{\frac{1}{p(q+1)}} < \frac{y}{\sin_{p,q}^{-1} y} < \left(1+\frac{y^q}{p(q+1)}\right)^{-1} \quad (0<y<\varepsilon)$$

より，

$$\int_0^\varepsilon (1-y^q)^{\frac{m}{p(q+1)}-\frac{1}{p}}\,dy < \frac{J(m,\alpha)}{m^{1/q}} < \int_0^\varepsilon \left(1+\frac{y^q}{p(q+1)}\right)^{-m} \frac{dy}{(1-y^q)^{1/p}}$$

が成り立つ．左辺を $L(m,\varepsilon)$，右辺を $R(m,\varepsilon)$ とおくと，$\frac{\Gamma(m+a)}{\Gamma(m+b)} \sim m^{a-b}$ より，

$$\begin{aligned}
L(m,\alpha) &= \int_0^1 - \int_\varepsilon^1 \sim \frac{(p(q+1))^{1/q}}{q}\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\frac{1}{m^{1/q}} - o\left(\frac{1}{m^{1/q}}\right), \\
R(m,\varepsilon) &< \frac{1}{(1-\varepsilon^q)^{1/p}} \int_0^\infty \left(1+\frac{y^q}{p(q+1)}\right)^{-m} dy \\
&\qquad\qquad \sim \frac{1}{(1-\varepsilon^q)^{1/p}} \frac{(p(q+1))^{1/q}}{q}\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\frac{1}{m^{1/q}}
\end{aligned}$$

が示せる．これと $\varepsilon \in (0,1)$ の任意性により

$$\lim_{m\to\infty} I_{p,q}(m) = \frac{(p(q+1))^{1/q}}{q}\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)$$

を得る．

4 今後の課題

- ノルムの増減および漸近展開における $1/m^2$ の係数の決定．
- 系 2 の不等式の精密化と応用．
- 一般化シンク関数に対するボール型積分不等式の発見．
- 一般化シンク関数に対するレッドヘッファー型不等式（[8]）の改良．

参考文献

[1] K. Ball, Cube slicing in $\mathbb{R}^n$, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), no. 3, 465–473.

[2] B.A. Bhayo and M. Vuorinen, On generalized trigonometric functions with two parameters, J. Approx. Theory **164** (2012), no. 10, 1415–1426.

[3] D. Borwein, J.M. Borwein and I.E. Leonard, L_p norms and the sinc function, Amer. Math. Monthly **117** (2010), no. 6, 528–539.

[4] D. Edmunds and H. Melkonian, Behaviour of L_q norms of the sinc_p function, Proc. Am. Math. Soc. **147** (2019) 229–238.

[5] R. Kerman, R. Ol'hava and S. Spektor, An asymptotically sharp form of Ball's integral inequality, Proc. Am. Math. Soc. **143** (2015) 3839–3846.

[6] H. Melkonian and S. Takeuchi, Remarkable properties of the $\mathrm{sinc}_{p,q}$ functions and related integrals, J. Math. Anal. Appl. **499** (2021), no. 1, Paper No. 124981, 14 pp.

[7] F.W.J. Olver, Asymptotics and special functions, Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974.

[8] S. Ozawa and S. Takeuchi, Redheffer-type inequalities for generalized trigonometric functions, J. Inequal. Spec. Funct. **12** (2021), no. 2, 16–22.

[9] L.I. Paredes and K. Uchiyama, Analytic singularities of solutions to certain nonlinear ordinary differential equations associated with p-Laplacian, Tokyo J. Math. **26** (2003), no. 1, 229–240.

[10] S. Takeuchi, The basis property of generalized Jacobian elliptic functions, Commun. Pure Appl. Anal. **13** (2014), no. 6, 2675–2692.

[11] S. Takeuchi, Multiple-angle formulas of generalized trigonometric functions with two parameters, J. Math. Anal. Appl. **444** (2016), no. 2, 1000–1014.