

非専門家向け数学基礎教育 - 数値計算ソフトウェアのすすめ -

東京大学 数理・情報教育研究センター 藤原毅夫

本稿では「教育数学」に関して、これまで考えてきたことの一端を述べたい。これらは

1. 科学における言語の重要性と、言語としての数学。
 2. 数学は自然科学ではない。
 3. 科学としての「数学」の特徴。
 4. 計算の重要性。
 5. 数学教育の中に占める計算の役割。
- である。

1 科学のための文章：言葉の重要性

1.1 論理的な記述のための文章と情緒的な記述のための文章

1.1.1 大学で、日本語教育が必要である

1.1.1.1 はじめに：言語表現には、論理的な表現と、情緒的な表現の2種類がある。日本語では、他の言葉と比べても、その主語の選び方、あいまいさや間接的な表現が、言葉としての独特の余韻や想像力をかきたてる。中世からの文学の歩みがそのような日本語表現の伝統となり、さらにはそれが現在の日本語全体の中にある文学的表現形式を形作ってきた。そのため、優れた日本語といわれるスタイルはむしろ科学的記述には不向きであるとさえ言える。

我国で、高校までに現代国語として教えられ、あるいは作文として訓練されるのは、もっぱら伝統の延長線上にある文学的・情緒的表現である。日本語教育の教材も文学や文芸評論である。読み手により多様な受け取り方が可能であり、1人の読み手にとっても読むたびに新しい受け取り方ができる作品が、優れた文学として評価されてきた。「多様な受け取り方の可能性」は日本語のみならず、すべての文学に共通した評価の視点であるのかもしれない。だとすれば、逆に日本語は優れた「文学のための言語」であるといってもよい。

一方、理工学分野や社会的な業務でのコミュニケーションのためには、曖昧さや情緒を排除し、主語を明示した表現が必要である。これを技術表現（テクニカル・ライティング）と呼ぼう。特に理工系で要求される技術報告や論文のための表現では、当然のことであるが、受け手やその読む環境によって異なる意味を持ち得る表現では全く役目を果たさない。

理工系学生にとっても、技術表現はあまり注意を払って来なかった新しい表現の形であるため、「技術表現を書く」訓練が必要になる。

1.1.1.2 日本語の言語的特徴： 文学を軸として発展した日本語の文章についてもう少し考えてみたい。外国人留学生と接触して驚かされるのは、彼らが直ぐ日本語を話すようになることである。これは、日本語の柔軟性がその基本にあるからであろう。

古文の「をかし」のように状況によって意味を変える語や、あるいは古典文学の文章構成で見る柔軟性こそが伝統的な日本語の特徴である。その特徴の、特に重要であると考えられる部分を列挙する（「科学技術系のライティング技法」（小山透，慶應義塾大学出版会，2011）参照）：

1. 主語が省略可。
2. 述語が最後に来るため、肯定か否定か、どのような動作をするのか、しないのかは、最後にならないと分からない。
3. 述語には単数複数および人称の区別がない。
4. 文章の構造が柔軟。
5. 接続詞の意味が曖昧。
6. 多義的表現および同音多義，比喩表現が多い。
7. 複雑な敬語（尊敬語，謙譲語，丁寧語）の頻繁な出現。

日本語文法は複雑で例外が多い。例えば助詞の使い方は多様で曖昧である。例外が多いのは、いい加減さ，柔軟性の裏返しである。日本語で技術表現をするのは難しくはないが，日常的な日本語の表現法と違ってくるので，充分意識して書かねばならない。

1.2 技術表現あるいは明晰な文章

技術表現のために，一番に気をつけるべき点は，伝えたいことが相手に正確に伝わるということであり，曖昧さをなくすことである。

1.2.1 技術表現の文章

1.1.1.2 で書いた日本語の特徴のいずれもが、文章を多義的にする、すなわち一意的な理解が難しくなる原因である。技術表現の中では、それらすべてに注意する。すなわち

1. 文を短くし、1文で言うことは1つに限る。
2. 主語を明示する。
3. 主語と述語動詞の一致。
4. 接続詞に注意し、かつ無用な接続詞を挟まない。
5. 修飾語や句は修飾される対象のなるべく近くに置く。
6. 曖昧な語、意味のない比喻を使わない。
7. 読み手は当然分かっているはずだ、という思い込みの排除。

これらはいずれも1つ1つの文を短くすれば、概ね達成される。

1.2.1.1 起承転結の是非：「起承転結」という構造を推奨し、「転」で文意を変えることによって、全体にメリハリが付くとする指導書を見ることがある。初中等教育の中での作文の指導でも、起承転結という構成が推奨されることがあるらしい。

しかし[起承転結]は漢詩、特に絶句の配列の名称であり、そのために良しとされた表現技法である。技術表現の中では、起承転結という構造は意味がないばかりか、有害である。「転」によって、読み手を驚かさず変化を入れることは、正確に事実とその根拠を伝える能力を養うという学校教育の中で理想とするようなものではない。

1.2.1.2 文章全体の構造 -レゲット・ツリー 外国語でも日本語でも、日本人が陥りやすい文章構造について、注意が必要である。次の2つの文章を比べてみよう。それぞれが図1に対応する。

[例文 J] ⁽¹⁾ 試料 A は力学的強度がある。なぜなら ⁽²⁾ 試料は力を加えると曲がり、⁽³⁾ 金槌で叩くと伸び、弾性定数の値は…。⁽⁴⁾ さらに電氣的性質を見ると、伝導度の値が…と高い。⁽⁵⁾ これらは金属を特徴づけるものだから、試料 A は金属である。

[例文 E] ⁽¹⁾ 試料 A が金属であることを確かめたい。そのために、力学的性質と電氣的性質を実験で調べた。まず ⁽²⁾ 力学的

強度がある．例えば，⁽³⁾ 力を加えても折れずに曲がり，⁽⁴⁾ 金槌で叩くと伸び，弾性定数の値は…である．⁽⁵⁾ 電気特性は伝導度の値が…と高い．⁽¹⁾ これらは金属の特徴だから，試料 A は金属であることが確かめられた．

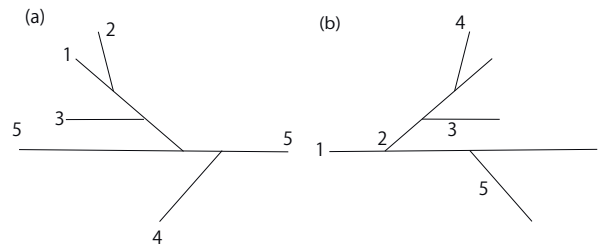


図 1: レゲット・ツリー．(a) 日本文の構造 (例文 J)，(b) 英文の構造 (例文 E)．数字は本文中の番号．

Anthony J. Leggett 教授 (2003 年超伝導および超流動の理論でノーベル物理学賞受賞) が，1960 年代に日本に滞在した際，日本語と英語の論文の構造について述べているものである (日本物理学会誌 vol.21, no.11, pp.790-805 (1966))．

それによると，英語論文の構造は，主文章があつてそこでまず言いたいこと (結論) をハッキリさせる．そこから脇道に逸れる場合には必ず逸れるということと，主張との関連性を明示しながら話を進めるのが，普通の英文の構造である．

一方，日本人の書く論文の多くでは (日本語でも英語でも)，議論が枝道から始まり (何を主張したいのか主たる論旨が不明のまま種々の議論をし)，それらが集まった最後に，主文章が現れて全体の構文もはっきりし言いたいこと (結論) がはっきりする．このような文章では，何をいうために延々と議論しているのかが読み手に把握できない．中等教育段階で，数学の文章問題の出来が悪いといわれるのも，これらに関わりがあるように思える．

1.2.2 技術表現の全体構造：

技術表現では，全体をいくつかの章に分けて，より分かり易くする．

1.2.2.1 技術・科学のための文書の構成： 以下は，技術報告や論文に求められる章の構成である．これにより，議論の流れがより明確になり，読み手の理解が助けられる．

- 1．序 (Introduction)
- 2．研究方法 (Methods)
- 3．結果 (Results)
- 4．考察・議論 (Discussion)
- 5．結論 (Conclusion)

このように，直線的構造を持つ文章表現を，学校では意識して教育すべきである．これは実は「考え方」を整理することでもある．

1.2.2.2 感想文は要らない： レポートや，卒業論文の下書き原稿に「面白かったです」「難しかったです」という類の文を見ることがある．初等教育以来の，作文教育の成果であろうか．しかし，必要なのは，どのような困難が何故あってどのように克服したのか，という，誰にとっても役立つ情報である．

1.3 生き方によって言葉は変化し，言葉によって生き方が変わる

1.3.1 生活の中での考え方

1.3.1.1 考え方の問題： 日本語に「ひらがな」「カタカナ」「漢字」があることは，外国人にとって厄介なことであるが，話し言葉としての日本語は学びやすいようである．外国人にとっての困難は，表現の多様性・多義性と共に，言葉と深く係わった「日本文化の複雑さ」にある．

社会の均一性と閉鎖性が他者を無言のうちに排除する空気を作る，というのは「島国」に共通した問題である．私たちもそのような伝統の中にいるということであろう．「多様性を尊重する」ことは，我々にとっては実は思った以上に難しいのかもしれない．

1.3.1.2 科学と敬語： 日本語における敬語（尊敬語，謙譲語，丁寧語）の存在も厄介な問題である．科学の分野での議論に重要な 互いの対等性

を損なうから、尊敬語、謙譲語を使いながらでは、本当の議論にならないこともある。外国に行ったとき、お互いにファーストネームで呼び合い、殊更に丁寧な言い方もせずに議論するのは、気持ちが良い。

1.3.2 国語教育の問題 -論理国語と文学国語-

2018年に教育指導要領の改訂があった（高等学校学習指導要領解説 国語編 文部科学省平成30年7月）。国語科目の中で、論理国語と文学国語という区別ができ、我が意を得たりと思った。

「論理国語」：選択科目「論理国語」は、多様な文章等を多面的・多角的に理解し、創造的に思考して自分の考えを形成し、論理的に表現する能力を育成する科目として、主として「思考力・判断力・表現力等」の創造的・論理的思考の側面の力を育成する。

「文学国語」：選択科目「文学国語」は、小説、随筆、詩歌、脚本等に描かれた人物の心情や情景、表現の仕方等を読み味わい評価するとともに、それらの創作に関わる能力を育成する科目として、主として「思考力・判断力・表現力等」の感性・情緒の側面の力を育成する。

しかし残念ながら、「論理国語」と「文学国語」の違いが何を意味しているか、上の定義では理解できない。特に「論理国語」が何を言いたいのかが明確でない。

技術表現と文学の違いをいっているのだと想像する。前者は「事実を事実として記述」することであり誰でも同じように理解できる表現、後者は「創造や感性に対する情緒的記述」である。記述する対象と目的を明確に区別し、文章構造の違いを意識しなくてはいけない。1つの文章の2つの側面と考えたら、実現不可能である。

1.3.3 グローバル化の中で 母国語で科学をする国

1.3.3.1 日本近代化の過程：日本は、母国語で科学ができる数少ない国の1つである。高等教育を母国語で行うことのできる国は、英語圏を除くと、フランス、ドイツ、日本、中国くらいではないだろうか。しかし、ヨーロッパでも中国でも、もはや高等教育での自国語使用は急速に危うくなってきている。

日本語で科学ができるということは、日本語や日本人が優れているからではない。明治初期から中頃の、近代化に直面した日本人学者による血の滲むような努力の成果である。

明治の開国とともに工学寮（後に工部大学校）の設置、帝国大学の設置などの教育の近代化＝欧化の中で、外国人教師・技師が招聘され、外国で学んでいた少数の日本人が召還され、高等教育の整備と産業近代化を推進した。¹ 講義は英独仏語を中心に行われ、学生たちも懸命にそれに応えた。その結果、1880年には工部大学校は第1期卒業生23名を送り出し、その内11名を国費により海外留学に派遣した。² 開国当初の外国人教師が任期が終えて帰国した後、明治15年頃からは、卒業生の中から帝国大学その他で専門教育の場に立つ者もあった。彼らもまた外国語で教育にあたった。

その後も、帝国大学卒業生の多くは欧米各地に留学して、大学教育と研究とはどういうものであるかを学んで帰国した。彼らが欧州留学の後、将来の大量の人材需要に対しては国内での高等教育で対応することが必要であると考え、専門用語の日本語化と日本語の教科書作成に多くの努力をした。その結果、我々は今、日本語で科学を学び、行うことができる。

それでもなお、「日本語での技術表現＝技術日本語」の歴史は短い。技術日本語に慣れ親しみ、より身近なものにする必要がある。

1.3.3.2 母国語を大切にしよう：近年、グローバル化の波が急激に世界を変えつつある。我々は小さな島国の中でのみ生活することはもはやできず、日本語だけで生活することもできない。

一方で国際化を急いで、大学で急激に講義の大多数を英語に換えるということは好ましくない。折角できていた母国語による基本概念の理解が難

¹明治初年以降、日本における理工学教育は工学寮（1871年設立、1877年工部大学校と改称。1886年帝国大学工科大学と合併し帝国大学工科大学となる。今日の東京大学工学部・大学院工学系研究科）において、スコットランドにモデルをとり、ヘンリー・ダイアー（1848 - 1918）が率いる外国人お雇い教師により進められた。政府によるお雇い外国人（帝国大学教師、技師、顧問）の総数は、ピーク時の1874年には858名に上った。官雇外国人の国籍は英国（UK）が半数近くであった（H.Dyer, “Dai Nippon, the Britain of the East” (1904) 平野男夫訳「大日本」(実業之日本社 1999); 三好信浩「日本工業教育発達史の研究」(風間書房 2005)。）H.Dyer および開国時の日本の工学教育に関しては、名古屋大学名誉教授、愛知大学教授加藤詔士先生に多くのことを教えていただいた。

²第1期生には、建築の辰野金吾、薬学の高峰讓吉、土木工学の田辺朔郎、機械工学の井口在屋、真野文二等がいる。

しくなり、何よりも多数の日本人から学術・技術を取り上げることになるからである。先人の作ったものはもう少しの間、大切にしていきたい。学部講義に関しては、現状のように、英語の講義は全体の10%~20%ぐらいに留めて、大学院レベルから増やすのが適切であると、筆者は考えている。そうしながら、日本人全体の英語水準が、欧州の非英語国家並みになるように努力するべきである。国際協調の立場から、何を変えるべきか、何を変えてはいけないか、慎重にしかし速やかに考えていきたい。

1.4 数式・数学は言語であり、論理である

論理的記述の重要性を強調し、そのための文章構造について述べた。技術的表現は、何時でも何処でも誰にとっても、同じ意味で受け取られるものでなくてはならない。再三繰り返してきたように、受け手により異なるものでは意味を持たない。したがって、数学や自然科学には、日常用いられている伝統的な日本語の表現手法は不十分あるいは不適切である。

さらに、日本語に限らず、技術表現を用いても、定量的かつ複雑な記述が難しいことが多い。次の文章と式を見比べてみよう。

- 物体に外から力が働かないか、あるいは物体に働いている力が釣り合っているとき、静止している物体は静止し続け、運動している物体はその速度が一定の等速度運動を続ける。これを(運動の第1法則(慣性の法則))という。
- $m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$ (m : 質量, x : 変位, t : 時間)は運動の第1法則を表す。

この2つは全く同じことをいっている。どちらがより内容豊かかは言うまでもあるまい。前者は実験(観測)結果、後者はそれから導き出されたニュートンの運動方程式である。運動方程式は様々な状況下でこれを解くことにより、より一般的な「予測」を可能とする。

数学は正しい論理の枠組みを教えてくれる。上の例を待つまでもなく、数学・数式自身は言語であり、道具である。ガリレオの言葉に、「宇宙は数学という言葉で書かれている。」というのがある。また「数学は神が宇宙を書いたアルファベットだ。」ともいう。数学及び数式は、自然現象だけでなく、社会現象や人文科学の現象やデータを記述し理解するためにも、欠かすことのできない言語である。

2 数学が分かるとはどういうことか

2.1 数学とはそもそも何か

2.1.1 学問としての数学

2.1.1.1 数学は何をする学問か： 「数学」は計算をする学問だという一般的な誤解がある。その誤解を解くのは決して容易ではない。

狭義には最も身近な「数」「図形（幾何学）」「計算」が小中学校教育で現れる数学（算数）に含まれることになる。「数学の定義」として最も広く受け入れられているのは、数学とは「量」「（空間、図形に関する幾何学的）構造」「論理」および量や図形の「変化」に関する「方法」や「枠組み」を考える学問である、というものだろう。およそ考え得るすべてのものに共通した枠組みや論理を対象とする。

したがって数学が公理体系を持つだけでなく「公理体系」や論証それ自身も数学の対象となる。つまり、数学それ自身を数学という道具で研究する。またそれらを記述するうえで必要な道具である「数の体系」「集合」なども重要な対象であるし、認知のシステムなどもそれに含まれる。さらに、様々な自然あるいは社会の現象を考えるために作られた「数理モデル」を解析するのも数学の役割である。

数学は西欧の科学の考え方からは「形式科学」に分類され、物理や化学、生物学などの自然科学とははっきりと区別される。自然科学は、最終的には実験や観測によりその真偽が確かめられる経験科学であるのに対して、数学は、数学自身の枠の中で真偽を論理的に明らかにするものだからである。

2.1.1.2 数学の三つの顔： 数学には三つの顔がある。一つは、それ自身が研究・教育の対象となる科学としての側面である。第二は、自然現象や社会現象を記述し、解析するための（論理や推論の規則を含む）道具としての面である。第三は、自然や社会を（量的あるいは質的に）正確に述べる共通言語としての側面である。記述の対象が普遍性を持つよう、人間の思考がより論理的・抽象的となるよう、共通言語としての役割を、数学は果たしてきた。

2.1.1.3 数学の近代化と工学： 19世紀後半以降、数学は抽象化の度合いを強め、やがて20世紀に入ると他の自然科学および応用科学から離れ

で独自の道を進んできた。しかし最近になって、他分野との連携により数学それ自身の学問的発展が促される機会が再び増えてきている。

一般に、工学部向け（あるいは理工系）数学が「やさしい数学」と同義になるような傾向があつが、ちょっと違うと思う。 ϵ - δ 論法や収束性の議論は、現在では工学系カリキュラムでは避けられる傾向にある。しかし本来、大学の工学向け数学の中にきちんと位置付けるべきものである。工学分野では実際にはかなり複雑で難しい数学を用い、数学の成果が工学と直結することも多くなった。応用が数学の新しい分野の開拓を牽引している場合も少なくない。

また計算機の飛躍的発展に伴い、数学の役割も拡大し、周辺科学や社会から、数学の言語あるいは道具としての教育（データサイエンス教育）をより強化するべきであるという要求が強くなってきている。社会科学、人文科学の分野でも数学の道具としての役割が必須のものとなってきた。

2.1.2 言語としての数学

2.1.2.1 公理系： 数学では一つ一つの言葉が厳密に定義され、また記述が曖昧であってはいけない。真偽の判断の対象になる文章（命題）の全体が公理系を成している。他の自然科学では、結果（真偽）の最終的な判定は、観測結果や実験によってなされるのと比べると、対照的である。

2.1.2.2 証明という行為 -数学における証明（proof）： ある命題が正しいことを主張するためにおこなわれる一連の演繹の過程を「証明」という。証明の各段階で、公理、定理等の認められた事実や仮定から論理的推論の規則（演繹）によって新たな命題を導くという手順を経る。他でも「証明」という言葉は用いるが、数学におけるそれとは違う（evidence）。数学的に真であることを主張する命題は、公理に基づいて（論理的過程を経て）証明されなくてはならない。

2.2 数学が分かるということ

数学には「定義」、「式」、命題の「論理」などいろいろな理解への関門がある。しかし少し違う視点から「分かる」ということを考えてみよう。

岡潔は「春宵十話」その他の中で、数学の教育や数学を分かるということについていくつか述べている。数学の「確かさ」は他の学問の「確

かさ」とは違う。数学は前提とする命題が真であれば結論も真である。他の学問の「確かさ」は経験（実験）によって裏付けられた確かさであり、新たな事実（観測や実験）により否定されるかもしれない確かさである。それは経験科学であることによる。数学の「確かさ」は論理によって裏打ちされた微塵の疑いもないものである。だから、「数学を分かる」ということにはこの確かさがなくてはならない、と岡潔は言う。

一方で、「数学を分かるということ」にはすべての学問に共通した側面もある。「分かる」ということは、岡潔が繰り返し述べているように、身体に染み渡る「情緒」的な側面を伴い、「分かる」ということは必ず「分かる喜び」（達成感）が伴うものである。「分かってうれしい」と感じなければ、まだ本当には分かっていないのだと思い返してみることが大切かもしれない。

3 20世紀の重要アルゴリズム問題

IEEE Computer Society と米国物理学会の共同出版による Computing in Science & Engineering の 2000 年 January/February 号（第 1 号）に The Top Ten Algorithm (J. Dongarra and F. Sullivan) という記事が掲載された。

そこで挙げられたのは以下のアルゴリズムである。

1. モンテカルロシミュレーションにおけるメトロポリス法
2. 線形計画法における単体法（シンプレックス法）
3. 線形方程式の逐次解法におけるクリロフ部分空間法
4. 行列の分解（行列の積への分解）
5. フォートラン・コンパイラ
6. 行列の QR 分解
7. クイック・ソート
8. 高速フーリエ展開
9. 整数関係アルゴリズム
10. 高速多重極法（FMM）

ほとんどが大規模線形計算の問題である。このほかに、計算科学の立場から重要なアルゴリズムとして以下のようなものが挙げられる。

11. メルセンヌ・ツイスタ（疑似乱数列生成式）
12. データ圧縮

13. 公開鍵暗号などの暗号理論

これらはいわゆるデータ・サイエンスに関連しており、その重要性和必要性はますます増していくに違いない。

4 証明を身近に - もっとユークリッド幾何学と複素数を中等教育に

数学者ならもちろん証明が重要であることを否定する人はいない。しかし、「証明」という思考の方法を、何処でどうやって身につけるかということについては見解の分かれるところであろう。

筆者は、ユークリッド幾何の中で「証明」を学ぶのが良いと考えている。その理由の1つは、「目に見える分かり易さ」である。解析学などでは、ユークリッド幾何学ほどには、証明の意義が明解ではない。ユークリッド幾何学では、公理、定理、命題、証明の各々の役割が（たとえ厳密ではないにしても）明解であり、何に基づいて何を証明すべきかも、はっきりしている。著者自身の経験を振り返っても、幾何の証明を考えているときは、何が足りないか、何を考えればいいのか、証明の道筋までが非常にはっきりと見えた。平面幾何は、数理的論理を身につけるための教材として、第一級のものである。

複素数の導入も早くやるべきである。整数、有理数、実数の導入と演算規則は、初等教育で学んだ事柄の後付けの議論という印象を免れない。複素数および複素数演算は、思考による新しい代数規則の導入を初めて学ぶ機会であり、大いに価値がある。虚数が実在の数でない、というような誤った理解を持たないためにも、虚数単位 i と平面上の回転を結び付けた理解を、なるべく早く身につけるべきである。

5 最後に - 無作法の勧め

大多数の学生にとって学ぶべき数学は「言語と道具としての数学」である。特に道具として、所謂文系分野でも数学の必要性への理解は急速に高まっている。

「使う立場」という意味は、短絡的に「計算するため」と考えられがちであるが、著者はそのように考えているわけではない。「 ε - δ 」論法や「一

様収束」の概念は使う立場にとって必須であるだけではない．大変明確で分かり易いのに，学生からは嫌われるという．

- ・言葉の意味が分からない．
- ・イメージが掴めない．

ということが主たる理由のようだ．理工系学部生にとっても，数学の意味すること，数学の概念を具体的にイメージすることは，決して簡単ではない．それを克服するためには，手を動かしながら，数値的な感覚も鍛え身につける必要がある．近年では，様々な広い分野で，大量のデータを上手に使える新しい現実が見えてくると期待されている．逆に大量のデータをゴミの山にしないためには，データをどう具体的に捉えるか（見えるようにするか）が不可欠となっている．具体的なデータの取り扱いを含む数学教育が必要である理由である．筆者が，数学教育の中に計算ソフトウェアを導入すべきであると考え理由もここにある．

これまでは，計算機を利用する限られた学生だけがプログラミングやコンピュータの仕組みを学んだ．しかし，時代により，分野により，教員の好みにより，プログラミング言語もさまざまである．プログラム言語をしっかりと学ぶことは望ましい．しかしこのような状況のままでは学生が学ばなくてはならないことがネズミ算的に増えていってしまう．計算ソフトウェアを広く講義に取り入れるなら，ビジュアル機能が高くプログラミングに学生の負担が少ないもので，さらにどれか1つを優先的に取り上げてほしい．

そのような計算ソフトウェアがあれば，我々は使い方手引きとモデル・データのみ用意して自由に使えるようにしておき，あとは学生の自学に任せればよい．数学や自然科学，社会科学の講義の後には，学生各自が自由に計算してみたらいい．例えば，一様乱数を発生してみて本当に一様乱数になっているかを確認してみる，あるいはそれらをいかに効率よく大きさの順に並べ直せるか競い合うのもいいだろう．微分方程式を数値的に解いてみて，その時間刻み幅を変えてもいいだろう．観察眼のある学生がいれば，誤差の理論や安定性の議論が必要だと考える．電磁場の空間分布を，3次元の図に描いて楽しむのもいい．原子の空間充填を計算機の中でやってみると，新しい秩序構造が見えてくるかもしれない．脳の機能，神経回路の形成，学習過程のモデル化を考えたり，モデル・データから社会動向や価格変動のダイナミックスを考え数理モデルを提案す

る学生も出てくる。

筆者が学部学生に確率過程の講義をしたときは、レポート課題に対して学生がそれぞれ思い思いの身の丈に合った（Excelであったり、Mathematicaであったりのソフトウェアを用いた）計算を工夫してくれ、面白かった。確率微分方程式を数値的に解き、それを平均したカーブを見せてくれたり、平均したカーブが何を意味するのかまで考えたりしてくれた。道具を持たせれば、筆者の想像を超えた能力を見せてくれる学生が複数人現れ、彼らの将来性を期待させられた。

学生には質問する権利があるから、彼/彼女たち自身の計算結果に基づき、どこからどんな質問が飛んでくるか教員には分からない。そうなれば教員は油断ができなくなり、対等な議論が要求される。うかうかすると学生から軽んじられる。究極の「無作法」である。多数の学生も、「進んだ」学生の後を一生懸命走ろうとする。学生と教員間の緊張関係は楽しい。

東京大学では2019年4月からの数値計算ソフトウェアMATLAB導入が決まった。総ての学生（学部，大学院），研究員，教員，職員が，MATLABの総ての計算ソフトウェアを制限なく使えるようになる。¹ 講義とソフトウェアの関わり方をどうするかという試行錯誤は、これから始まる。

¹MATLABは、コンパイラーを用いないインタプリタ方式のプログラミング言語で、対話型でもスクリプト形式でも使え、可視化も優れているというのが制作者側のうたい文句である。何よりも事前に何かコンパイラをインストールしておく必要がないから、自分のPC上でも、あるいはスマートフォンやタブレットPCからでも使えるのがうれしい。大学や学生個人が特別の施設や設備・機器を準備しないで済むのが良い。