Quantitative Stochastic Homogenization of Elliptic Equations with Unbounded Coefficients

京都大学大学院理学研究科・数学教室　綾　朝弘 *
Tomohiro Aya
Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Kyoto University

1　序

本稿では [4] の結果について説明する．**均質化** (homogenizaton) とは微小な分子レベルで周期的な構造を持つ媒体内にある物質の大きなスケールでの様相を調べる問題である．均質化は数学的にはまず偏微分方程式論の分野で考えられてきた [6]．例えば，$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ を C^1 級で周期 1 の関数、$U \subset \mathbb{R}$ を有界な領域とする．$\varepsilon > 0$ に対して以下の楕円型微分方程式

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(a\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)\dfrac{\partial}{\partial x}u^\varepsilon(x)\right) = 0 & (\text{in } U) \\ u^\varepsilon = f & (\text{on } \partial U) \end{cases}$$

の解 u^ε は $\varepsilon \to +0$ として，定数 $\bar{a}$ を用いた以下の方程式

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\bar{a}\dfrac{\partial}{\partial x}u(x)\right) = 0 & (\text{in } U) \\ u = f & (\text{on } \partial U) \end{cases}$$

の解 u に収束することが知られている．係数の周期 ε を小さくすることで空間全体で見たときに係数が平均化，均一化され，それによって解も定数係数の微分方程式の解に収束することを均質化と呼ぶ．係数 a がランダムであるときの均質化の挙動を考える分野が**確率的均質化** (stochastic homogenizaton) である．均質化における係数の周期性に対応するように，確率的均質化ではランダム係数 a に同分布性とエルゴード性を仮定する．確率的均質化の中でも，エルゴード性について定量的な評価を仮定したときに解 u^ε の u への収束の速さについて定量的な評価を得ることを目標にする**定量的確率的均質化** (quantitative stochastic homogenization) の研究が近年盛んに行われている．例えば [11, 10, 8, 9, 3, 1, 2]．これらの研究においてはランダム係数 $\mathbf{a} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ が**一様楕円性**を満たす標本空間が対象であった．すなわち，ある $\lambda > 0$，$\Lambda < \infty$ について

$$\Omega' = \left\{\mathbf{a} : \lambda|\xi|^2 \le \xi \cdot \mathbf{a}(x)\xi \le \Lambda|\xi|^2 \quad (\forall\xi \in \mathbb{R}^d \text{ and a.e. } x \in \mathbb{R}^d)\right\} \tag{1.1}$$

を満たす標本空間が対象であった．本稿では [4] に基づいて係数の**一様楕円性を弱めたときの確率的均質化**について定量的評価が得られるかを調べる．

2　設定

対称行列 $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ に対して $|A|$ を A の作用素ノルムとする．すなわち

$$|A| := \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d, |\xi|=1} |A\xi| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d, |\xi|=1} |\xi \cdot A\xi|.$$

標本空間 Ω を $\mathbb{R}^d$ からサイズ $d \times d$ の正定値行列への写像のうち，可測であり以下の条件を満たすものの集合とする．

*E-mail: aya.tomohiro.42z@st.kyoto-u.ac.jp

- (局所有界性)　任意の有界領域 $U \subset \mathbb{R}^d$ について以下の条件を満たす．

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in U} |\mathbf{a}(x)| + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in U} \left|\mathbf{a}(x)^{-1}\right| < \infty. \tag{2.1}$$

Borel 集合 $U \subset \mathbb{R}^d$ に対して，σ-加法族 $\mathcal{F}_U$ を以下の写像の族で生成される σ-加法族とする．

$$\left\{\mathbf{a} \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} e_i \cdot \mathbf{a}(x) e_j \varphi(x) dx : i,j \in \{1,2,\ldots,d\}, \varphi \in C_c^\infty(U)\right\}.$$

$\mathcal{F}_U$ は係数 $\mathbf{a}$ の U での情報を表す．$\mathcal{F} := \mathcal{F}_{\mathbb{R}^d}$ とする．$y \in \mathbb{R}^d$ について shift operator $T_y : \Omega \to \Omega$ を $(T_y\mathbf{a})(x) := \mathbf{a}(x+y)$ で定める．$T_y : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ についても $T_y(A) := \{T_y\mathbf{a} : \mathbf{a} \in A\}$ で定める．集合 $U, V \subset \mathbb{R}^d$ の距離 $d_\infty(U,V)$ を以下で定める．

$$d_\infty(U,V) := \inf\left\{\|u-v\|_\infty = \max_{1\le i\le d} |u_i - v_i| : u \in U, v \in V\right\}.$$

$\mathbb{P}$ を可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度とし、期待値を $\mathbb{E}$ で書く．σ-加法族 $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ について，$\mathcal{A}$-可測な二乗可積分関数からなる空間を $\mathcal{L}^2(\mathcal{A})$ とする．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ に定常性とエルゴード性に対応する以下の 2 つの仮定を課す．

- ($\mathbb{Z}^d$-translation での定常性) 任意の $z \in \mathbb{Z}^d$ と $A \in \mathcal{F}$ について以下が成立する．

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[T_z A]. \tag{2.2}$$

- (maximal correlation の一様な減少) $r \in (0,1)$ を固定する．$d_\infty(U,V) \ge 1$ を満たす任意の Borel 集合 $U, V \subset \mathbb{R}^d$ について以下が成立する．

$$\rho(\mathcal{F}_U, \mathcal{F}_V) := \sup_{\substack{f\in\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_U)\\ g\in\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_V)}} \frac{\mathrm{Cov}[f,g]}{\mathrm{Var}[f]^{1/2}\mathrm{Var}[g]^{1/2}} \le r. \tag{2.3}$$

$\rho(\mathcal{A},\mathcal{B})$ は 2 つの σ-加法族 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の従属の度合いを表した量であり，$\rho(\mathcal{A},\mathcal{B}) = 0$ であれば $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は独立である。ρ は strong mixing condition を表す量の 1 つとして [7] で触れられており，確率的均質化の文脈では定量的評価として初の結果である [11] においてエルゴード性の仮定に用いられた。

有界 Lipschitz 領域 $U \subset \mathbb{R}^d$ について $\lambda(U)$，$\Lambda(U)$ を以下に定義する．

$$\Lambda(U) := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in U} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d, |\xi|=1} \xi \cdot \mathbf{a}(x)\xi,$$
$$\lambda(U) := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in U} \inf_{\xi\in\mathbb{R}^d, |\xi|=1} \xi \cdot \mathbf{a}(x)\xi.$$

$\lambda(U)$，$\Lambda(U)$ は領域 U での係数 $\mathbf{a}$ の大きさの最小値および最大値を表す確率変数である．局所有界性から以下が成立する．

$$0 < \lambda(U) \le \Lambda(U) < \infty. \tag{2.4}$$

局所有界性 (2.1)，定常性 (2.2)，エルゴード性 (2.3) の仮定を満たすランダム場の例としてランダムチェッカーボードが挙げられる．このランダム場は $\mathbb{R}^d$ 空間を一辺 1 の立方体ごとに区切り，その立方体各々に対して独立同分布な確率変数を係数に割り当てる方法で得られる．具体的には，独立同分布な確率変数 $\{b(z)\}_{z\in\mathbb{Z}^d}$ と，実数から正定値行列への写像 $\mathbb{R} \ni r \mapsto \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^{d\times d}$ を用意する。このとき，ランダム場 $\mathbf{a}(\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ を，任意の $z \in \mathbb{Z}^d$ と $x \in [-1/2, 1/2)^d$ について

$$\mathbf{a}(x) := \mathbf{a}_{b(z)}$$

で定めれば上記の仮定をすべて満たす．ランダムチェッカーボードにおいて，$|\mathbf{a}_{b(0)}|$ や $|\mathbf{a}_{b(0)}^{-1}|$ が確率変数として非有界である，すなわち任意の $C < \infty$ について

$$\mathbb{P}\left[|\mathbf{a}_{b(0)}| + |\mathbf{a}_{b(0)}^{-1}| > C\right] > 0$$

を満たす場合において，従来の (1.1) の設定に収まらない拡張になる．

3　主結果

[4] における主結果は一様楕円性を満たさず，かつ非有界な係数を持つ楕円型偏微分方程式における確率的均質化の定量的評価について述べたものである．単位立方体 $\square_0 := (-1/2, 1/2)^d$ 上における係数およびその逆行列の作用素ノルムの最大値が非有界な確率変数である設定を考える．このとき，この確率変数が指数的な可積分性を持つならば確率的均質化の収束のレートが得られることを述べたものが以下の主定理である．以下の主張では Dirichlet 境界条件での楕円型偏微分方程式における確率的均質化について述べる．

定理 3.1. (A. [4]) 節 2 の仮定を満たすとする．実数 $\beta, \gamma \in (3, \infty)$ は $0 < \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} < \frac{1}{3}$ を満たすとする． 以下を満たす実数 M の存在を仮定する．

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\Lambda(\square_0)^{\beta}\right)\right] + \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(\square_0)^{-\gamma}\right)\right] \le M.$$

このとき，有界 Lipschitz 領域 $U \subseteq \square_0$，$\delta > 0$, $\alpha \in \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{3}\right)$, $p \in (0, 4)$ について，以下を満たす対称行列 $\bar{\mathbf{a}}$ と定数 $c = c(d, r, \beta, \gamma, M, U, \delta, \alpha, p) > 0$, $C = C(d, r, \beta, \gamma, M, U, \delta, \alpha, p) < \infty$ が存在する。

任意の $\varepsilon \in (0, 1]$, $f \in W^{1,2+\delta}(U)$ と以下の偏微分方程式

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\nabla u^{\varepsilon} &= 0 \quad (in\ U), & u^{\varepsilon} &= f \quad (on\ \partial U), \\ -\nabla \cdot \bar{\mathbf{a}}\nabla u &= 0 \quad (in\ U), & u &= f \quad (on\ \partial U), \end{aligned}$$

の弱解 $u^{\varepsilon}, u \in f + H_0^1(U)$ について，以下の不等式が成立する．

$$\mathbb{E}\left[\|u - u^{\varepsilon}\|_{L^2(U)}^p\right]^{\frac{1}{p}} \le C\,\|\nabla f\|_{L^{2+\delta}(U)} \exp\left(-c\,(-\log\varepsilon)^{1-3\alpha}\right).$$

この結果は u_{ε} の u への収束の速さが $\exp\left(-c\,(-\log\varepsilon)^{1-3\alpha}\right)$ といった具体的なレートで評価されているため，定量的な結果であると言える．

非有界な係数を持つ楕円型偏微分方程式の定量的確率的均質化についての先行研究としては [5] が存在する．この論文では [9] の手法を非有界係数へと拡張しており，エルゴード性の仮定として spectral gap 不等式を仮定している．

- (spectral gap 不等式)　$\mathbb{R}^d$ の分割 $\{D\}$ と $\beta \in [0, 1)$，$C = C(d) < \infty$ は以下を満たすとする．

$$\operatorname{diam} D \le (\operatorname{dist} D + 1)^{\beta} \le C \operatorname{diam} D$$

このとき，ランダム場 $\mathbf{a}$ が spectral gap 不等式を満たすとは，定数 C が存在して，任意の $\sigma(\mathbf{a})$-可測な確率変数 $X(\mathbf{a})$ について以下の不等式が成立することをいう．

$$\mathbb{E}\left[(X(\mathbf{a}) - \mathbb{E}[X(\mathbf{a})])^2\right] \le C\,\mathbb{E}\left[\sum_D \left(\int_D \left|\frac{\partial X(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}}\right|_{\mathbf{a}}\right)^2\right]$$

先行研究はこのような Poincaré 型のテクニカルな不等式をエルゴード性として仮定した理論であるが，本研究では maximal correlation ρ の一様な減少のみから定量的評価を得ている．また，[5] では任意の $x \in \mathbb{R}^d$ について $\mathbf{a}(\cdot)$ と $\mathbf{a}(\cdot + x)$ の同分布性を仮定しているが，本研究ではそれよりも弱い $\mathbb{Z}^d$-translation での定常性から定量的評価を得ている．

4　Subadditive argument

この節では定理 3.1 の証明に用いた手法について説明する．[2] の手法を非有界へと拡張する。単位行列を Id と表記する。サイズ $d \times d$ の正定値行列からなる集合上の半順序集合 $\le$ を以下で定める．

$$A \le B \quad \Leftrightarrow \quad \text{任意の } p \in \mathbb{R}^d \text{ について } p \cdot (B - A)p \ge 0.$$

有界 Lipschitz 領域 U と $p \in \mathbb{R}^d$ に対して $\mu(U,p)$ を以下で定義する．

$$\mu(U,p) := \inf_{v \in p\cdot x + H_0^1(U)} \fint_U \frac{1}{2}\nabla v \cdot \mathbf{a}\nabla v. \tag{4.1}$$

U 上で (2.4) が成立するため，$\mu(U,p)$ の定義式の右辺は最小値を持ち，最小になるときの $v \in p\cdot x + H_0^1(U)$ は一意に定まる．この v を $v(\cdot,U,p) \in p\cdot x + H_0^1(U)$ と表す．$v(\cdot,U,p)$ は以下の方程式の弱解になる。

$$-\nabla\cdot\mathbf{a}\nabla v(\cdot,U,p) = 0 \quad (\text{in } U), \qquad v(\cdot,U,p) = l_p \quad (\text{on } \partial U).$$

特殊な境界条件と領域（以下で導入するように $U = \square_n := (-\frac{1}{2}3^n, \frac{1}{2}3^n)^d$ で考える）における偏微分方程式の解 $v(\cdot,\square_n,p)$ について収束を調べ，$v(\cdot,\square_n,p)$ で近似することで一般の領域および境界条件での収束を得ることが大まかな方針となる．$\mu(U,p)$ は以下の性質を満たす．

補題 4.1. $\mu(U,p)$ は以下を満たす。

- (二次形式での表現) $\lambda(U)\mathsf{Id} \le \mathbf{a}(U) \le \Lambda(U)\mathsf{Id}$ および以下を満たす正定値行列 $\mathbf{a}(U)$ が存在する．
$$2\mu(U,p) = p\cdot\mathbf{a}(U)p$$
- (劣加法性) $U_1, U_2, \ldots, U_N \subseteq \mathbb{R}^d$ を U の分割とする．このとき以下が成立する．
$$\mu(U,p) \le \sum_{i=1}^{N}\frac{|U_i|}{|U|}\mu(U_i,p)$$

劣加法性は、各々の領域での minimizer $v(\cdot,U_i,p)$ を貼り合わせた関数を $\mu(U,p)$ の定義と比べることで示される．

$\square_n := \left(-\frac{1}{2}3^n, \frac{1}{2}3^n\right)^d$ とする．劣加法性と定常性 (2.2) によりら $\{\mathbb{E}[\mu(\square_n,p)]\}_{n\in\mathbb{N}}$ の単調減少性が従う。

$$\mathbb{E}[\mu(\square_{n+1},p)] \le 3^{-d}\sum_{z\in\{-3^n,0,3^n\}^d}\mathbb{E}[\mu(z+\square_n,p)] = \mathbb{E}[\mu(\square_n,p)]$$

よって以下により homogenized coefficient $\bar{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ を定義できる．

$$p\cdot\bar{\mathbf{a}}p := \lim_{n\to\infty} 2\mathbb{E}[\mu(\square_n,p)] = \lim_{n\to\infty} p\cdot\mathbb{E}[\mathbf{a}(\square_n)]p$$

この $\bar{\mathbf{a}}$ は u^ε の収束先 u の満たす偏微分方程式の係数に一致することが知られている．定量的な結果を得るためには $\mathbf{a}(\square_n)$ の $\bar{\mathbf{a}}$ への収束の速さを評価する必要がある．一様楕円性の仮定のもとで $\mathbf{a}(\square_n)$ の $\bar{\mathbf{a}}$ への収束の速さを評価したものが [2] になる．係数を非有界にするにあたり改めて $\mathbf{a}(\square_n)$ の $\bar{\mathbf{a}}$ への収束の速さ，および $\mathbf{a}(\square_n)$ の収束の速さと偏微分方程式の解の収束の速さとの関係を調べる必要がある．また，上記のように $\bar{\mathbf{a}}$ を単調減少数列の極限で定義したため，$\bar{\mathbf{a}}$ の下からの評価も調べる必要がある．

[2] で導入された別の劣加法量を拡張する．$\mathcal{A}(U) := \{u \in H^1(U) : -\nabla\cdot(\mathbf{a}\nabla u) = 0 \ (\text{in } U)\}$ とする．有界 Lipschitz 領域 U と $p,q \in \mathbb{R}^d$ に対して $\mu(U,p)$ を以下で定義する．

$$\mu_*(U,q) := \sup_{u\in\mathcal{A}(U)}\left(\fint_U -\frac{1}{2}\nabla u\cdot\mathbf{a}\nabla u + q\cdot\nabla u\right) \tag{4.2}$$
$$J(U,p,q) := \mu(U,p) + \mu_*(U,q) - p\cdot q$$

$v(\cdot,U,p) \in l_p + H_0^1(U)$ より $p = \fint_U \nabla v(\cdot,U,p)$ であるため，(4.2) に $v(\cdot,U,p) \in \mathcal{A}(U)$ を test することで J の非負性を得る．すなわち任意の $p,q \in \mathbb{R}^d$ について以下が成立する．

$$J(U,p,q) \ge 0.$$

補題 4.2. $\mu_*(U,p)$ および $J(U,p,q)$ は以下を満たす．

- (二次形式での表現) $\lambda(U)\mathsf{Id} \le \mathbf{a}_*(U) \le \mathbf{a}(U) \le \Lambda(U)\mathsf{Id}$ および以下を満たす正定値行列 $\mathbf{a}_*(U)$ が存在する．
$$2\mu_*(U,q) = q \cdot \mathbf{a}_*(U)^{-1}q$$
- (劣加法性) $U_1, U_2, \ldots, U_N \subseteq \mathbb{R}^d$ を U の分割とする．このとき以下が成立する．
$$J(U,p,q) \le \sum_{i=1}^{N} \frac{|U_i|}{|U|} J(U_i,p,q)$$

$\mathbf{a}_*(U) \le \mathbf{a}(U)$ は J の非負性から得られる．J の非負性と定常性から，$\bar{\mathbf{a}}$ の下からの評価を得る．

命題 4.3. $\mathbb{E}[\Lambda(\square_0)], \mathbb{E}[\lambda(\square_0)^{-1}] < \infty$ ならば，homogenized coefficient $\bar{\mathbf{a}}$ は正定値行列であり以下を満たす．
$$\mathbb{E}[\lambda(\square_0)^{-1}]^{-1}\mathsf{Id} \le \bar{\mathbf{a}} \le \mathbb{E}[\Lambda(\square_0)]\mathsf{Id}$$

Proof. 上からの評価については $\{\mathbb{E}[\mu(\square_n,p)]\}_{n\in\mathbb{N}}$ の単調減少性と $\mathbf{a}(U) \le \Lambda(U)\mathsf{Id}$ から以下より従う．
$$p \cdot \bar{\mathbf{a}}p \le \mathbb{E}\left[p \cdot \mathbf{a}(\square_0)p\right] \le p \cdot \mathbb{E}\left[\Lambda(\square_0)\right]p.$$
下からの評価を示す．$\mu_*(U,q) = J(U,0,q)$ の劣加法性と定常性から $\{\mathbb{E}[\mu_*(\square_n,q)]\}_{n\in\mathbb{N}}$ の単調減少性が従う．
$$\mathbb{E}[\mu_*(\square_{n+1},q)] \le 3^{-d} \sum_{z\in\{-3^n,0,3^n\}^d} \mathbb{E}[\mu(z+\square_n,q)] = \mathbb{E}[\mu_*(\square_n,q)]$$
よって $J(U,p,q)$ の正値性より以下が成立する．
$$\begin{aligned} 2\mathbb{E}[\mu(\square_n,p)] &\ge 2p\cdot q - 2\mathbb{E}[\mu_*(\square_n,q)] \\ &\ge 2p\cdot q - 2\mathbb{E}[\mu_*(\square_0,q)] \\ &\ge 2p\cdot q - \mathbb{E}[\lambda(\square_0)^{-1}]|q|^2 \end{aligned}$$
$q = \mathbb{E}[\lambda(\square_0)^{-1}]^{-1}p$ とした後に，両辺を n について下限を取ることで示される． □

$\mathbf{a}_*(U) \le \mathbf{a}(U) \le \Lambda(U)\mathsf{Id}$ であることから，定数 $C(d) < \infty$ が存在し，任意の対称行列 $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{\mathrm{sym}}$ と有界 Lipschitz 領域 U に対して以下の評価が成立する．
$$|\mathbf{a}(U) - \tilde{\mathbf{a}}| + |\mathbf{a}_*(U) - \tilde{\mathbf{a}}| \le C\Lambda(U)^{\frac{1}{2}} \sup_{p\in B_1} \left(J(U,p,\tilde{\mathbf{a}}p)\right)^{\frac{1}{2}}$$
この不等式から，$J(\square_n,p,\bar{\mathbf{a}}p)$ の 0 への収束の速さを評価することが $|\mathbf{a}(\square_n) - \bar{\mathbf{a}}|$ や $|\mathbf{a}_*(\square_n) - \bar{\mathbf{a}}|$ の収束の速さを得ることに繋がると言える．

係数の非有界部分を制御するために以下の概念を導入する．

定義 4.4. $L < \infty$ を固定する．正値実数列の組 $(\{\delta_n\},\{M_n\})$ が，$\delta_0 = M_0 = 1$ かつ $\{\delta_n\}$ が単調減少かつ $\{M_n\}$ が単調増大かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ について以下を満たすとき，$(\{\delta_n\},\{M_n\})$ は *suppressive* (抑圧的) であると呼ぶ。
$$\mathbb{E}\left[\lambda\left(\square_n\right)^{-3} + \Lambda\left(\square_n\right)^3 : \{\lambda\left(\square_n\right) \le \delta_n\} \cup \{\Lambda\left(\square_n\right) \ge M_n\}\right] \le Le^{-n}.$$

suppressive な数列の例を挙げる．$\beta, \gamma > 0$ を固定したときに，以下を満たす $M < \infty$ が存在するとする。
$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\Lambda(\square_0)^{\beta}\right)\right] + \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(\square_0)^{-\gamma}\right)\right] \le M.$$
このとき，$\beta' > 1/\beta$，$\gamma' > 1/\gamma$ について，以下の数列の組 $(\{\delta_n\},\{M_n\})$ が suppressive となる $L(\beta,\gamma,M,\beta',\gamma') < \infty$ が存在する．
$$\delta_n := (n+1)^{-\gamma'} \quad \text{and} \quad M_n := (n+1)^{\beta'}. \tag{4.3}$$

$J(\square_n, p, \bar{\mathbf{a}})$ の定量的な評価を得るための目標は

$$\mathbb{E}[J(\square_{n+1}, p, \bar{\mathbf{a}}p)] \le C_n \left(\mathbb{E}[J(\square_n, p, \bar{\mathbf{a}}p)] - \mathbb{E}[J(\square_{n+1}, p, \bar{\mathbf{a}}p)]\right) \tag{4.4}$$

の形式の不等式を得ることである．この不等式を繰り返し用いて以下のような定量的な評価を得ることが出来る．

$$\mathbb{E}[J(\square_n, p, \bar{\mathbf{a}}p)] \le \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{C_k+1}\right)\mathbb{E}[J(\square_0, p, \bar{\mathbf{a}}p)].$$

実際は (4.4) の評価を得ることは難しいため，$\bar{\mathbf{a}}_n := \mathbb{E}\left[\mathbf{a}_*^{-1}(\square_n)\right]^{-1}$ と

$$\tau_n := \sup_{p,q\in B_1}\left(\mathbb{E}\left[J\left(\square_n, p, q\right)\right] - \mathbb{E}\left[J\left(\square_{n+1}, p, q\right)\right]\right)$$

を用いて評価する．

補題 4.5. $(\{\delta_n\}, \{M_n\})$ を suppressive な数列とする．このとき，ある $\kappa = \kappa(d) > 0$, $C = C(d, L) < \infty$ が存在して，任意の $p \in B_1$, $n \in \mathbb{N}$ について以下の不等式が成立する．

$$\mathbb{E}\left[J(\square_n, p, \bar{\mathbf{a}}_n p)\right] \le C\,\frac{M_{n+1}^3}{\delta_{n+1}^3}\left(e^{-\kappa n} + \sum_{m=0}^{n} 3^{-\kappa(n-m)}\tau_m\right) \tag{4.5}$$

補題 4.5 の証明には maximal correlation の一様な減少 (2.3) から multiscale Poincaré 不等式 ([2, Proposition 1.12. and Lemma 1.13.]) と Caccioppoli 不等式を適用することで得られる．(4.5) の $\mathbf{a}$ の大きさに依存する係数 $(M_{n+1}/\delta_{n+1})^3$ は Caccioppoli 不等式に起因する．

補題 4.6 (Caccioppoli 不等式)**.** $u \in H^1(U)$ は以下の方程式

$$-\nabla\cdot(\mathbf{a}\nabla u) = 0 \quad (\text{in } \square_{n+1})$$

を満たすとする．このとき，以下を満たす定数 $C = C(d) < \infty$ が存在する．

$$\fint_{\square_n} |\nabla u|^2 \le C\,\frac{\Lambda(\square_{n+1})^2}{\lambda(\square_{n+1})^2}\,\frac{1}{3^{2n}}\fint_{\square_{n+1}} |u - (u)_{\square_{n+1}}|^2$$

また，Caccioppoli 不等式は L^2-ノルムの評価のため，$\mu(\square_n, p)$ と $\fint_{\square_n} |\nabla v(\cdot, \square_n, p)|^2$ とを変換する必要があり，その過程で (4.1) により $\Lambda(\square_n)/\lambda(\square_n)$ が係数として現れる．Caccioppoli 不等式の係数 $(\Lambda(\square_{n+1})/\lambda(\square_{n+1}))^2$ と合わせて $(M_{n+1}/\delta_{n+1})^3$ で評価される．

(4.3) より，$\Lambda(\square_0)$ や $\lambda(\square_0)^{-1}$ に指数的な可積分性があるならば suppressive な数列として多項式をとることが出来る．その多項式の指数が十分に小さく取れるならば，$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - 1/Ck^{3\alpha}\right) \le C\exp\left(-cn^{1-3\alpha}\right)$ より，補題 4.5 から $\mathbf{a}(\square_n)$ の $\bar{\mathbf{a}}$ への収束の速さの評価を得る．

定理 4.7. $\beta, \gamma \in (3, \infty]$ は $0 < \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} < \frac{1}{3}$ を満たすとする．以下を満たす定数 $M < \infty$ が存在すると仮定する．

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\Lambda(\square_0)^{\beta}\right)\right] + \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(\square_0)^{-\gamma}\right)\right] \le M.$$

$\alpha \in \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{3}\right)$ とする．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ について以下の不等式が成立する定数 $c = c(d, \beta, \gamma, \alpha, M) > 0$, $C = C(d, \beta, \gamma, \alpha, M) < \infty$ が存在する．

$$\mathbb{E}\left[\left|\bar{\mathbf{a}} - \mathbf{a}(\square_n)\right|^2\right] \le C\exp\left(-cn^{1-3\alpha}\right).$$

最後に $\mathbf{a}(\square_n)$ の $\bar{\mathbf{a}}$ への収束の速さを u^ε の u への収束の速さに帰着させる．確率変数 $\Omega(n)$ を以下で定義する．

$$\Omega(n) := \left(\sum_{m=0}^{n} 3^{-(n-m)}\left(3^{-(n-m)d}\sum_{z\in 3^m\mathbb{Z}^d\cap\square_n} |\mathbf{a}(z+\square_m) - \bar{\mathbf{a}}|\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

定常性と Hölder の不等式より，任意の $n\in\mathbb{N}$ について $\mathbb{E}\left[|\bar{\mathbf{a}}-\mathbf{a}(\square_n)|^2\right]\le C\exp\left(-cn^{1-3\alpha}\right)$ ならば $\mathbb{E}\left[\Omega(n)^2\right]\le C\exp\left(-cn^{1-3\alpha}\right)$ が従う．従って，$u^\varepsilon-u$ を $\Omega(n)$ で評価することが目標になる．$\underline{\widehat{H}}^{-1}$-ノルムを以下で定義する．

$$\|u\|_{\underline{\widehat{H}}^{-1}(U)}:=\sup\left\{\fint_U uv : v\in H^1(U), \|v\|_{\underline{H}^1(U)}\le 1\right\}.$$

初めに，領域 $\square_n$，境界条件 $p\cdot x$ における解 $v(\cdot,\square_n,p)$ の $p\cdot x$ への収束について考える．$\nabla v(\cdot,\square_n,p)$ の弱収束を $\underline{\widehat{H}}^{-1}$-ノルムを用いて表したものが以下の命題になる．

命題 4.8. 任意の $n\in\mathbb{N}$ と $p\in B_1$ について以下の 2 つの不等式が成立する定数 $C=C(d)$ が存在する．

$$\|\nabla v(\cdot,\square_n,p)-p\|^2_{\underline{\widehat{H}}^{-1}(\square_n)}\le C\frac{\Lambda(\square_n)}{\lambda(\square_n)}+C3^{2n}\frac{1}{\lambda(\square_n)}\Omega(n),$$
$$\|\mathbf{a}\nabla v(\cdot,\square_n,p)-\bar{\mathbf{a}}p\|^2_{\underline{\widehat{H}}^{-1}(\square_n)}\le C\left(\frac{\Lambda(\square_n)^3}{\lambda(\square_n)}+|\bar{\mathbf{a}}|^2\right)+C3^{2n}\left(\frac{\Lambda(\square_n)^2}{\lambda(\square_n)}+|\bar{\mathbf{a}}|\right)\Omega(n).$$

一般の領域 $U\in\square_0$ と境界条件 f については，$U_r:=\{x\in U:\mathrm{dist}(x,\partial U)>r\}$ について cutoff 関数を

$$0\le\eta_r\le 1,\quad \eta_r=1\ (\text{in } U_{2r}),\quad \eta_r=0\ (\text{in } U\setminus U_r),\quad |\nabla^k\eta_r|\le\frac{C_k}{r^k}$$

で定め，u^ε を $v(\cdot,\square_n,p)$ を用いて

$$w^\varepsilon(x):=u(x)+\varepsilon\eta_r(x)\sum_{i=1}^d\left(\partial_{x_i}u\right)(x)\left(v\left(\frac{x}{\varepsilon},\square_n,e_i\right)-p\cdot\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$$

で近似することで以下の定理を得る．

定理 4.9. 以下を満たす $a>0,\ A<\infty$ の存在を仮定する．

$$a\mathsf{Id}\le\bar{\mathbf{a}}\le A\mathsf{Id}. \tag{4.6}$$

$U\subseteq\square_0$ を有界 Lipschitz 領域，$\delta>0$ とする．このとき，以下を満たす定数 $b=b(d,a,A,U,\delta)>0$, $C=C(d,a,A,U,\delta)<\infty$ が存在する．

$\varepsilon\in(0,1]$, $f\in W^{1,2+\delta}$ に対して $n\in\mathbb{N}$ を $\square_0\subseteq\varepsilon\square_n$ を満たす最小の整数とし，$u^\varepsilon,u\in f+H_0^1(U)$ を以下の偏微分方程式の弱解とする．

$$\begin{aligned}-\nabla\cdot\mathbf{a}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\nabla u^\varepsilon&=0\quad(\text{in } U),\qquad u^\varepsilon=f\quad(\text{on }\partial U)\\ -\nabla\cdot\bar{\mathbf{a}}\nabla u&=0\quad(\text{in } U),\qquad u=f\quad(\text{on }\partial U)\end{aligned}$$

このとき、任意の $r\in(0,1)$ について以下が成立する．

$$\begin{aligned}\|u-u^\varepsilon\|_{L^2(U)}&\le C\frac{\Lambda(\square_n)+1}{\lambda(\square_n)}\|\nabla f\|_{L^{2+\delta}(U)}\\ &\times\left(r^b+\frac{1}{r^{2+d/2}}\left\{\left(\frac{\Lambda(\square_n)^3+\Lambda(\square_n)}{\lambda(\square_n)}\right)^{\frac12}\varepsilon+\left(\left(\frac{\Lambda(\square_n)^2+1}{\lambda(\square_n)}\right)^{\frac12}+1\right)\Omega(n)^{\frac12}\right\}\right)\end{aligned}\tag{4.7}$$

$\mathbf{a}$ の非有界性から $\Lambda(\square_n)$ や $\lambda(\square_n)^{-1}$ は n が大きくなると ∞ に発散する．しかし，例えば $\Lambda(\square_n):=\sup_{z\in\square_n}\Lambda(z+\square_0)$ のため，$\Lambda(\square_n)$ や $\lambda(\square_n)^{-1}$ は 3^{nd} 個の同分布な確率変数の最大値である．よって，$\Lambda(\square_0)$ や $\lambda(\square_0)^{-1}$ に指数的な可積分性があれば $\Lambda(\square_n)$ や $\lambda(\square_n)^{-1}$ の発散の order は高々n の多項式程度である．よって定理 (3.1) の仮定のもとでは，(4.7) 式における係数 $\Lambda(\square_n)$ や $\lambda(\square_n)^{-1}$ の発散より速い速さ $C\exp\left(-cn^{1-3\alpha}\right)$ で $\Omega(n)$ が収束するため，$u^\varepsilon-u$ の収束の速さも $C\exp\left(-c(-\log\varepsilon)^{1-3\alpha}\right)$ で評価できる．また，(4.6) の仮定は，(4.3) より成立する．このような手順により定理 (3.1) を得ることが出来る．

References

[1] Scott Armstrong, Tuomo Kuusi, and Jean-Christophe Mourrat. Mesoscopic higher regularity and subadditivity in elliptic homogenization. *Communications in Mathematical Physics*, 347(2):315–361, 2016.

[2] Scott Armstrong, Tuomo Kuusi, and Jean-Christophe Mourrat. *Quantitative stochastic homogenization and large-scale regularity*, volume 352 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Cham, 2019.

[3] Scott N. Armstrong and Charles K. Smart. Quantitative stochastic homogenization of convex integral functionals. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série*, 49(2):423–481, 2016.

[4] Tomohiro Aya. Quantitative stochastic homogenization of elliptic equations with unbounded coefficients. *arXiv preprint arXiv:2302.00822*, 2023.

[5] Peter Bella and Michael Kniely. Regularity of random elliptic operators with degenerate coefficients and applications to stochastic homogenization. *arXiv preprint arXiv:2210.01192*, 2022.

[6] Alain Bensoussan, Jacques-Louis Lions, and George Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*, volume 5 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[7] Richard C. Bradley. *Introduction to strong mixing conditions. Vol. 1.* Kendrick Press, Heber City, UT, 2007.

[8] Julian Fischer and Stefan Neukamm. Optimal homogenization rates in stochastic homogenization of nonlinear uniformly elliptic equations and systems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 242(1):343–452, 2021.

[9] Antoine Gloria, Stefan Neukamm, and Felix Otto. Quantitative estimates in stochastic homogenization for correlated coefficient fields. *Analysis & PDE*, 14(8):2497–2537, 2021.

[10] Antoine Gloria and Félix Otto. Quantitative estimates on the periodic approximation of the corrector in stochastic homogenization. In *CEMRACS 2013—modelling and simulation of complex systems: stochastic and deterministic approaches*, volume 48 of *ESAIM Proc. Surveys*, pages 80–97. EDP Sci., Les Ulis, 2015.

[11] V. Yurinskiĭ. Homogenization error estimates for random elliptic operators. In *Mathematics of random media (Blacksburg, VA, 1989)*, volume 27 of *Lectures in Appl. Math.*, pages 285–291. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.