UPPER TAIL LARGE DEVIATION RATE FUNCTION FOR CHEMICAL DISTANCE IN SUPERCRITICAL PERCOLATION

明治大学理工学部 中島秀太
Shuta Nakajima
Graduate School of Science and Technology,
Meiji University

Abstract. 本稿では, 2022 年 12 月 19 日から 22 日に行われた研究集会「確率論シンポジウム」における講演内容をもとに, Barbara Dembin 氏 (ETH) との共同研究 [4] について, 概要を述べる.

1. Introduction

1.1. **Percolation.** Percolation モデルは Broadbent と Hammersley により 1957 年に導入された多孔物質を流れる流体を記述するモデルである. モデルは次のように定義される. 隣接している $\mathbb{Z}^d$ の二点をつなぐ辺の全体を $E(\mathbb{Z}^d)$ で表す. 各辺 $e \in E(\mathbb{Z}^d)$ に, 確率 p で open, 確率 $1-p$ で closed という状態を独立に与える. さらに, open な辺だけを集めたグラフ $\mathcal{G}_p = (\mathbb{Z}^d, \{e \in E(\mathbb{Z}^d) :\ e$ は open$\})$ を Percolation graph と呼ぶ. 物理的には, 辺が open である時, 流体が流れると考える. 二つの頂点 x, y が $\mathcal{G}_p$ の同じ連結成分に含まれるとき, x と y はつながっているといい, $x \leftrightarrow y$ と書く. さらに $\mathcal{C}(x)$ を x を含む $\mathcal{G}_p$ の連結成分とし, x を含むクラスターと呼ぶ. Percolation モデルの研究では, p が変わるとき $\mathcal{C}(x)$ の性質がどのように変わるかという問題が重要な研究対象となる. 実際次の事が知られている.

定理 1 (Aizenmann-Kesten-Newman '85 [1]). *Suppose $d \geq 2$. There exists $p_c(d) \in (0,1)$ such that*

- *for $p < p_c(d)$,*

$$\mathbb{P}(|\mathcal{C}(x)| < \infty, \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d) = 1;$$

- *for $p > p_c(d)$,*

$$\mathbb{P}(\exists x;\ |\mathcal{C}(x)| = \infty; \quad \forall y \notin \mathcal{C}(x),\ |\mathcal{C}(y)| < \infty) = 1.$$

この $p_c(d)$ を d 次元 Percolation モデルの臨界確率と呼ぶ. さらに $p < p_c(d)$ となる時, 劣臨界領域; $p > p_c(d)$ となる時, 優臨界領域と呼ぶ. 定理 1 によれば, 劣臨界領域では無限クラスターは存在せず, 一方優臨界領域では唯一つの無限クラスターが存在することがわかる. このようにある値を境に、現象が

Date: December 28, 2022.
2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60K37; secondary 60K35; 82A51.
Key words and phrases. Percolation, Chemical distance, First-passage percolation.

急激に変わることを相転移と呼ぶ. Percolation モデルは相転移が起こる最も単純 (に定義できる) かつ面白いモデルの一つである.

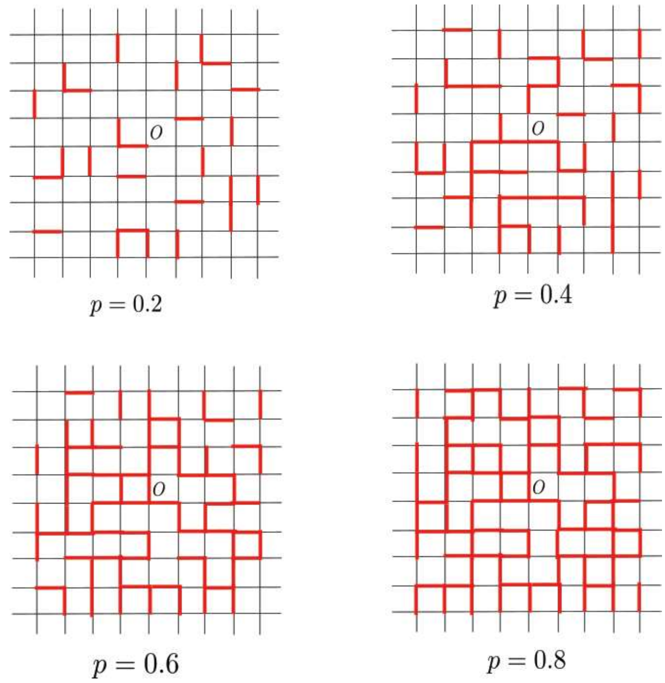

FIGURE 1. 2D Percolation graphs (red) as p moves

1.2. **Chemical Distance.** Percolation graph のグラフ距離を Chemical distance と呼び, $\mathcal{D}(x, y)$ で表す. これは化学反応が open な辺のみを通過し, その通過時間を 1 と解釈すると, $\mathcal{D}(x, y)$ は時刻 0 で x から始まった化学反応が y に到達する時刻と考えられることから来ている. 1980 年あたりから Chemical distance の漸近的な挙動が研究されるようになった. 特に次の結果が知られている.

定理 2 (Garet-Marchand '04)**.** *For any $x \in \mathbb{R}^d$, there exists $\mu(x) \geq 0$ such that for any $\delta > 0$,*

$$\mathbb{P}(|\mathcal{D}(0, \lfloor nx \rfloor) - n\mu(x)| > \delta n; 0 \leftrightarrow \lfloor nx \rfloor) \to 0.$$

この $\mu(x)$ を time constant と呼ぶ. 上記の定理は Chemical distance $\mathcal{D}$ に関する大数の法則に対応するものである. 従って, 次の問題として中心極限定理及び大偏差原理を調べるのが自然である. この講究録では大偏差原理について扱う.

2. 大偏差原理と先行研究

一般に, 大偏差原理は起こりにくい出来事の確率やその背景を調べる学問である. それらの研究は, 起こりにくい出来事をどう実現するかという戦略を

決定することにつながる．さらに, 統計力学において大偏差原理は、多くの重要な結果を導く道具としても知られており、重要な研究テーマの一つである．次の結果は, Chemical distance に関する大偏差原理の研究において古典的なものとして有名である．以降, $\mathcal{D}(x) \equiv \mathcal{D}(0, \lfloor x \rfloor)$ と書く．

定理 3 (Antal-Pisztora '96 [2])**.** *Suppose $d \geq 2$ and $p > p_c(d)$. For any $x \in \mathbb{R}^d$, there exist $K, c > 0$ such that*

$$\mathbb{P}\left(Kn \leq \mathcal{D}(nx) < \infty\right) \leq e^{-cn}.$$

Garet と Marchand は上記の結果を time constant まで拡張した．

定理 4 (Garet-Marchand '07 [6])**.** *Suppose $d \geq 2$ and $p > p_c(d)$. For any $x \in \mathbb{R}^d$ and $\epsilon > 0$, there exists $c > 0$ such that*

$$\mathbb{P}\left((1+\epsilon)\mu(x)n \leq \mathcal{D}(nx) < \infty)\right) \leq e^{-cn}.$$

さらに彼らは同じ論文で下尾の大偏差について次を得た．

定理 5 (Garet-Marchand '07 [6])**.** *Suppose $d \geq 2$ and $p > p_c(d)$. For any $x \in \mathbb{R}^d$, the following limit exists and is negative:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\mathcal{D}(nx) < (1-\epsilon)\mu(x)n\right).$$

最後の定理に現れる極限は大偏差原理のレート関数と呼ばれている．本研究の目的は, 上尾大偏差原理のレート関数の存在の証明およびその具体的な記述である．

3. Space-time cutpoint

この章では, 上尾大偏差原理のレート関数の記述及び存在の証明において重要な役割を果たす, space-time cutpoint を導入する．以降では常に $d \geq 3$ 及び $p > p_c(d)$ を仮定する．定義に必要な二つの記法を導入する．任意の $x \in \mathbb{R}^d$, $N > 0$ について, $\Lambda_N(x) = x + [-N, N]^d$ と置く．さらに与えられた $x \in \mathbb{Z}^d$, $s > 0$ について Chemical distance に関する球を $B_s(x) = \{y \in \mathbb{Z}^d | \ \mathcal{D}(x, y) \leq s\}$ で定義する．簡略化のため, $B_s = B_s(0)$ と書くことにする．

定義 1 (Space-time cutpoint)**.** *Fix $\alpha \in [20/21, 1)$. Given $s > 0$ and $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\mathcal{A}_{s,x}(n) \equiv \{\exists t \geq sn, \exists w \in \Lambda_{n^\alpha}(nx); \{w\} = B_t \setminus B_{t-1}\}.$$

位相の分野では, ある点を取り除くと連結性が失われる時, その点を cutpoint と呼ぶ．今回の定義では, 点の周りの辺を closed にすると, そこまでの Chemical distance の球と無限クラスターの連結性が崩れるという意味で cutpoint, また到達時刻と位置に関する制限をしているので, まとめて space-time cutpoint と呼んでいる．

次の定理は, space-time cutpoint に関するレート関数の存在を示している．

定理 6. *For any $\epsilon > 0$ and $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\exists I(\epsilon, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\mathcal{A}_{\epsilon,x}(n)\right).$$

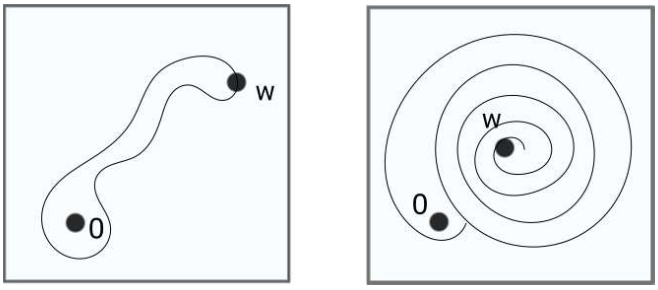

FIGURE 2. Examples of space-time cutpoints: Basic v.s. Pathological

Moreover, I is convex and homogeneous, i.e.,

$$I(\lambda s+(1-\lambda)s', \lambda x+(1-\lambda)x') \le \lambda I(s,x)+(1-\lambda)I(s',x'),$$
$$I(\lambda s, \lambda x)=\lambda I(s,x).$$

4. 主結果

前章で得られたspace-time cutpoint に関するレート関数 I を用いて, Chemical distance の上尾の大偏差原理のレート関数を定義する. 与えられた $\xi > 0$ と $x \in \mathbb{R}^d$ について, 関数 J を次で定義する:

$$J(\xi,u) \equiv \inf\{I(s,u)|\ s>0, u\in\mathbb{R}^d;\ s+\mu(x-u) > (1+\xi)\mu(x)\}.$$

次が主結果となる.

定理 7. *Suppose $d \ge 3$ and $p > p_c(d)$. For any $x \in \mathbb{R}^d$, there exists $\xi_0 > 0$ such that for any $\xi \in (0,\xi_0)$,*

$$J(\xi,u) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mathbb{P}\left((1+\xi)\mu(x)n \le \mathcal{D}(nx) < \infty\right).$$

Moreover, J is continuous in (ξ,u).

Remark 1. 主結果の証明は, [3] で用いられたチューブの議論を発展させたものを用いる. 一方で, Chemical distance は FPP とは違い closed な辺を通ることができないため, チューブと測地線を接触させられないといった問題が起こる. それを解消するために, [6] で得られた結果を取り入れた繰り込みをチューブの議論に応用した.

Remark 2. 上尾の大偏差と二つの cutpoint が対応していることを示すことが, 主結果の証明の鍵となる. さらに ξ が十分小さければ, この二つの cutpoint は独立である事が示され, 上尾大偏差原理のレート関数が cutpoint のレート関数で表される事がわかる. 一方 ξ が大きい時, 同様の結果が成り立つかどうかは不明である.

Remark 3. 三次元以上の Chemical distance の上尾の大偏差では, cutpoint が関係していることが上記の主結果からわかる. より正確には, 上尾の大偏差が起こる時, 測地線が cutpoint を通るために, closed な曲面に囲まれるといっ

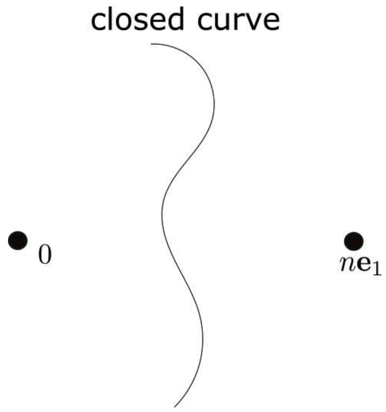

FIGURE 3. 二次元で大偏差が起こる例

た状況が起こる．つまり局所的な領域に測地線が閉じ込められ, そこで長い時間を費やす必要があるため Chemical distance が大きくなると説明できる．その意味で, この大偏差は局所的であると言える．

二次元では, 上尾の大偏差原理は異なる描像を持つと期待している．例えば, 中央に長い closed な曲線でできた壁が存在する場合, 全ての測地線はそれを避けるために長い時間を費やす必要がある．この状況では, 測地線はどこか狭い場所に閉じ込められているわけではないので, 大域的な大偏差であると言える．一方二次元の大偏差でも cutpoint が現れる可能性があり, その場合は局所的な大偏差が現れる．以上より二次元の場合は, 局所及び大域, 両方の描像を考えどちらの寄与が大きいか比較する必要があるため, 問題は複雑である．

5. 今後の展望

今回の結果は, 三次元以上かつ十分小さい ξ という条件がついているので、二次元の場合や ξ が小さい場合に対応する結果を考えるのは自然である．二次元の場合は, 上で述べたように大域的な状況を処理する必要がある．二次元の大偏差原理の問題は, 引き続き Dembin 氏と共同で取り組んでいる．大きな ξ については, 上で述べたように二つの cutpoint を同時に処理する必要がある．この問題はより一般的な multiple cutpoints に関する研究につながっていく．互いに相互作用のある cutpoint 達がどのような幾何学的な構造を持って影響しあっていくかというのは興味深い問題である．将来的には, この問題にも取り組んでいきたい．

また, 一つの cutpoint に関してもいくつかの問題が残っている． 例えば cutpoint に到達する時間の Chemical distance の球がどのような形をしているか, Deviation がどのくらいの大きさかなどは幾何学的な観点からも面白い問題である．さらにそこでの球はところどころバブルを持つ可能性があり, 特異な性質も期待できる．また, そこでの幾何学的な量の詳細な評価は, 大偏差のイベント上での cutpoint の存在など, レート関数以上の情報を得る事にもつながる重要な問題であると期待している．

Acknowledgments

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University

References

[1] M. Aizenman, H. Kesten, and C. M. Newman, Uniqueness of the infinite cluster and continuity of connectivity functions for short and long range percolation, Comm. Math. Phys. Volume 111, pp 505-531, 1987.
[2] P. Antal and A. Pisztora, On the chemical distance for supercritical Bernoulli percolation, Ann. Probab., Volume 24, Number 2, pp 1036–1048, 1996.
[3] C. Cosco and S. Nakajima, A variational formula for large deviations in First-passage percolation under tail estimates, arXiv:2101.08113, 2021.
[4] B. Dembin and S. Nakajima, On the upper tail large deviation rate function for chemical distance in supercritical percolation, arXiv:2211.02605, 2022.
[5] O. Garet and R. Marchand, Asymptotic shape for the chemical distance and first-passage percolation on the infinite Bernoulli cluster, ESAIM: PS, Volume 8, pp 169–199, 2004.
[6] O. Garet and R. Marchand, Large deviations for the chemical distance in supercritical Bernoulli percolation, Ann. Probab., Volume 35, Number 3, pp 833 – 866, 2007.

(Shuta Nakajima) Meiji University, Kanagawa, Japan
Email address: `njima(at)meiji.ac.jp`