Convergence of time-changed α-stable processes by GMC

京都大学 数理解析研究所　大井 拓夢 *
Takumu Ooi
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

1　研究の背景

ガウス自由場, リウヴィル測度, リウヴィルブラウン運動に関する研究が近年盛んに行われている ([1], [4], [9], [11] など). また, これらを含むより広いモデルの研究として, 分数ガウス場の性質 ([12] など) やガウス場から作られるランダムな測度であるガウス乗法カオス (Gaussian multiplicative chaos, GMC) の構成と性質 ([2], [6], [11], [13] など), GMC の収束 ([10], [13] など) などが調べられている. リウヴィルブラウン運動は一様無限三角形分割などのランダムグラフの上のランダムウォークのスケール極限であることが予想され, 一部のモデルについては証明もされている ([3], [8]) ものの, GMC による時間変更過程の収束に関する研究はガウス場や GMC の収束についての先行研究と比較するとそう多くはない.

本稿では GMC による時間変更過程の収束に関する取り組みとして, リウヴィルブラウン運動の対称 α-安定過程版を導入しそれらの収束について説明する.

2　設定と主定理

この節ではリウヴィルブラウン運動の対称 α-安定過程版にあたるマルコフ過程を導入し, それらの収束に関する主定理を述べる. まずは対応するガウス場, ガウス乗法カオス (GMC), 時間変更過程の設定を述べる.

パラメータ $\alpha \in (0,2]$ と次元 $d \in \mathbb{N}$ に対し, ハースト指数 $H := \alpha/2 - d/2$ を定義する. Z^H を確率空間 $(\Omega^{Z^H}, \{\mathbb{P}_x^{Z^H}\}_x)$ 上の $\mathbb{R}^d$ 上の対称 α-安定過程とし, その熱核を $p^H(t,x,y)$ と書く. また, $\lambda > 0$ に対し Z^H の λ 位のグリーン関数を

$$g_\lambda^H(x,y) := \int_0^\infty p^H(t,x,y)e^{-\lambda t}dt$$

で定義する. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の急減少関数全体の集合としたとき, **ガウス場** X^H を次で定義する.

定義 2.1. $X^H := \{X_f^H\}_{f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}$ を平均 0 で共分散核を $\pi^{d/2}g_\lambda^H$ にもつ確率空間 $(\Omega^{X^H}, \mathbb{P}^{X^H})$ 上のガウス場と定める. すなわち, 任意の $n \geq 1$ と $f_1, \cdots f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し, $(X_{f_1}^H, \cdots, X_{f_n}^H)$ は $\Omega^{X^H} \times \cdots \times \Omega^{X^H}$ 上の確率変数で, $1 \leq i,j \leq n$ に対し平均 $\mathbb{E}^{X^H}[X_{f_i}^H] = 0$ で共分散が

$$\mathbb{E}^{X^H}[X_{f_i}^H X_{f_j}^H] = \pi^{d/2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} g_\lambda^H(x,y)f_i(x)f_j(y)dxdy$$

の多変量正規分布に従うものである.

* ooitaku@kurims.kyoto-u.ac.jp

ここで $d=2, \alpha=2$ としたときの X^H が (正質量の) **ガウス自由場**と呼ばれるガウス場であるため, 上の X^H はガウス自由場の α-安定版とみなすことができる. また, H の 0 への極限を取ると g_λ^H は g_λ^0 へ各点収束するため, この意味でガウス場 X^H は X^0 へ収束している.

次に**ガウス乗法カオス (GMC)** と呼ばれる, ガウス場から作られるランダムな測度について説明する. GMC はガウス場 X と基礎の測度 dx と $\gamma>0$ に対して形式的には

$$\exp\left(\gamma X(x)-\gamma^2\mathbb{E}[X(x)^2]/2\right)dx$$

と表現されるランダム測度である. ガウス場は必ずしもランダムな関数としては定まらず, 一般にはランダムな超関数であるためこれはあくまで形式的な定義である. 特にガウス自由場に対する GMC は**リウヴィル測度**と呼ばれ, 例えば [11] ではガウス自由場をランダムな関数で近似し, それら近似列の GMC の極限として厳密に構成している. また, log 相関を持つガウス場の GMC の構成 ([2]), ヒルベルト空間の内積を共分散に持つガウス場の GMC の構成 ([13]) など, GMC の構成に関する先行研究は多い. 本稿でもガウス場 X^H を用いて GMC を定めるが, その構成と性質は共分散核 g_λ^H の性質に強く依存している. 具体的には, $H>0$ の時には g_λ^H は有界であり, X^H が各 $x\in\mathbb{R}^d$ 上で定まるため X^H に対する GMC μ^H は

$$d\mu^H(x):=\exp\left(\gamma X^H(x)-\gamma^2\mathbb{E}^{X^H}[X^H(x)^2]/2\right)dx \tag{2.1}$$

で定義できる. 一方で $H=0$ の時には共分散核 g_λ^H は非有界だが, x,y に依存しない定数 C を用いて $\pi^{d/2}g_\lambda^0(x,y)\le\log_+\frac{1}{|x-y|}+C$ と評価でき, [2] や [13] を用いることで $\gamma\in(0,\sqrt{2d})$ の範囲では非退化な GMC μ^0 が構成できる. このとき (2.1) の表記はあくまで形式的な物になる. 一方で $H<0$ のときは共分散核を上からこのような log の関数で抑えられず, 非退化な GMC を構成することができない.

対称 α-安定過程の GMC による時間変更過程の収束を扱うにあたり, α-安定過程と非退化な GMC の両方が存在する範囲で考える必要がある. その範囲は $H\ge0$ かつ $0<\alpha\le2$ であるが, これは $d=2$ のときは $\alpha=2$ のみであり収束を考える上では 1 点だけでは意味がないため考える範囲は $d=1$ かつ $H\ge0$ となる. このとき [13] の定理を適用すると次が成立する.

命題 2.2. *$d=1$, $\gamma\in(0,\sqrt{2})$ のとき, $H\searrow0$ とすると GMC μ^H は次の意味で μ^0 に収束する ;*
任意の $f\in C_c(\mathbb{R})$ に対し, $\int fd\mu^H$ は $\int fd\mu^0$ へ分布収束する.

注 2.3. 命題 2.2 は L^1-regime : $\gamma\in(0,\sqrt{2d})$ での主張である.

次に時間変更過程について簡単に紹介する (正確な定義などは [5], [7], [14] などを参照のこと).

よく知られた結果として, PCAF と滑らかな測度の間にはルヴューズ対応と呼ばれる 1 対 1 の対応がある ([5, Theorem 4.1.1] など). ここで, **PCAF(正値連続加法汎関数)** とは $[0,\infty)$-値の非減少で連続な確率過程で, 更にいくつかの条件を満たすものであり, **滑らかな測度**とは容量 0 の集合で値が 0 になる正のボレル測度で更にいくつか条件を満たすものである. GMC μ^H は $\mathbb{P}^{X^H}$-a.s. で滑らかな測度になることがわかるため, 対応する PCAF $A^H=\{A_t^H\}_{t\ge0}$ が $\mathbb{P}^{X^H}$-a.s. で存在する. この A_t^H の具体的な表現は次のようになる.

$$A_t^H=\int_0^t\exp\left(\gamma X^H(Z_s^H)-\gamma^2\mathbb{E}^{X^H}[X^H(Z_s^H)^2]/2\right)ds. \tag{2.2}$$

ただし (2.2) は $H>0$ のときには正確な表示であるが, $H=0$ のときにはあくまで形式的な表現である. このとき時間変更過程を次のように定義する.

定義 2.4. $(A^H)_t^{-1}:=\inf\{s>0:A_s^H>t\}$ に対し, $\hat{Z}_t^H:=Z^H_{(A^H)_t^{-1}}$ と定めた $\hat{Z}^H$ を Z^H の A^H (あるいは μ^H) による**時間変更過程**と呼ぶ.

$d=\alpha=2$ のとき X^H はガウス自由場, μ^H はリウヴィル測度であったが, このときの $\hat{Z}^H$ が**リウヴィルブラウン運動**と呼ばれている. 従って各 $\hat{Z}^H$ はリウヴィルブラウン運動の α-安定過程版に当たるマルコフ過程であると言える.

$\hat{Z}^H$ は右連続で左極限を持つマルコフ過程であるため, 右連続で左極限を持つ関数全体の集合に値を取る確率変数とみなすことができる. また, 右連続で左極限を持つ関数全体の集合上にスコロホッドの J_1-位相を導入することができる ([15]). これらの設定の下で, 次が本稿の主定理である.

定理 2.5. *$d=1$ のとき, 任意の $x\in\mathbb{R}$ と $\gamma\in(0,1)$ に対し $H\searrow 0$ の極限を取ると $\hat{Z}^H$ は $\hat{Z}^0$ に分布収束する.*

注 2.6. 定理 2.5 は L^2-regime : $\gamma\in(0,\sqrt{d})$ での結果である.

注 2.7. $H>0$ のとき, 安定過程 Z^H は 1 点の容量が正であるという性質 (強い再帰性) を持ち, ガウス場 X^H はランダムな関数になり, GMC μ^H はルベーグ測度に対し確率 1 で絶対連続となる. 一方で $H=0$ のときは Z^0 に強い再帰性はなく, X^0 はランダムな関数ではなくランダムな超関数であり, μ^0 はルベーグ測度に対し確率 1 で特異になる. このように $H=0$ で大きく性質が変化するにもかかわらず $Z^H, X^H, \mu^H, \hat{Z}^H$ はそれぞれ (適当な意味で) 収束する.

注 2.8. マルコフ過程が分布収束し, その滑らかな測度も漠収束していても, 一般には, 対応する PCAF や時間変更過程は収束するとは限らない. 実際, $Z^n\equiv Z$ を $\mathbb{R}$ 上のロードマップ δ_{-x} でスピード関数 1 の regular step 過程 (regular step 過程については [5, §2.2.1] を参照のこと) としてマルコフ過程を定め, $d\mu^n:=(\sin(nx)+1)dx$ として滑らかな測度を定めれば, リーマン・ルベーグの補題から $d\mu^n$ は dx へ漠収束するが, 対応する PCAF $\{A^n_t=\int_0^t(\sin(nZ_s)+1)ds\}_t$ は分布収束せず, これらの時間変更過程 $\hat{Z}^n$ も分布収束しない. 更に $\{A^n\}_n$ と $\{\hat{Z}^n\}_n$ のそれぞれは, どのスコロホッド位相に対しても緊密ではなく, 各時刻を止めるごとに分布収束もせず, 従って有限次元分布収束もしない.

3　定理 2.5 の証明の概略

この節では主定理 2.5 の証明の概略を述べる. まず準備として [13] による構成を参考にして $\{X^H\}_H$ を 1 つの確率空間 $(\Omega^X,\mathbb{P}^X)$ 上に次のように構成する. $\mathcal{H}:=L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ に対しその L^2-内積を共分散に持つ確率空間 $(\Omega^X,\mathbb{P}^X)$ 上のガウス場 $X:=\{X_\xi\}_{\xi\in\mathcal{H}}$ を定義する. 線型作用素を

$$Y^H:\mathcal{H}\ni\xi\mapsto\int_R\int_0^\infty e^{-\lambda t/2}p^H(t/2,\cdot,y)\xi(t,y)dtdy\in L^0(\mathbb{R})$$

として定義する. ここで, $L^0(\mathbb{R})$ は可測関数全体の集合で, 局所的な測度収束の位相を導入する. このとき, 閉グラフ定理を用いると任意の $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し $\int Y^Hf\in\mathcal{H}$ が存在し, 更に $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し

$$\langle\int Y^Hf,\int Y^Hg\rangle_{\mathcal{H}}=\int\int g^H_\lambda(x,y)f(x)g(y)dxdy$$

を満たす. 従って $X_{\int Y^H\cdot}$ は X^H と同分布. 主定理は分布収束に関する主張であるため, 特にこのようにして構成した X^H を用いても一般性を失わない.

確率過程の分布収束は緊密性と有限次元分布収束の 2 つの条件と同値であることが知られている ([15, Theorem 11.6.6]). そのため, 組 (Z^H,A^H) の緊密性と (Z^0,A^0) への有限次元分布収束を示すことが大きな目標である. 以下が証明の手順である.
1. Z^H は Z^0 に分布収束する.

2. 各 $T \geq 0$ に対し A^H_T はある確率変数 $\tilde{A}_T$ へ分布収束する.
3. $\{(A^H)^{-1}\}_H$ はスコロホッドの M_1-位相で緊密である. ここで M_1-位相は右連続で左極限を持つ関数全体の空間上の位相であり, J_1-位相よりも弱い位相である (詳しくは [15] を参照のこと).
4. $\{A^H\}_H$ もスコロホッドの M_1-位相で緊密である.
5. $\{A^H\}_H$ と $\{(A^H)^{-1}\}_H$ それぞれの部分列極限は確率 1 で連続かつ狭義単調増加.
6. $\{A^H\}_H$ と $\{(A^H)^{-1}\}_H$ はそれぞれ U-位相で緊密である. ここで U-位相とは広義一様収束の位相である.
7. $\{(Z^H, A^H)\}_H$ は $J_1 \times U$-位相で緊密である.
8. $\tilde{A}$ と同分布な PCAF $\bar{A}$ が存在し μ^0 と対応する. これにより A^0 と $\tilde{A}$ は同分布.
9. (Z^H, A^H) は (Z^0, A^0) に Z^0 が確率 1 で連続になる時刻の集合上で有限次元分布収束する.
10. (Z^H, A^H) は (Z^0, A^0) に $J_1 \times U$-位相の下で分布収束する.
11. $\hat{Z}^H$ は $\hat{Z}^0$ へ分布収束する.

1. は良く知られた古典的な結果である. 2. はグリーン関数の具体的な性質やアスコリ・アルツェラの定理, 占有測度を基礎に持つ GMC の収束などを利用して示すことができる. より具体的には Z^h のディリクレ形式の下での μ^H に対応する PCAF$A^{H,h}$ を導入すると $A^{H,0}$ は Z^0 の占有測度を基礎に持つ GMC とみなせるため [2], [13] や同様の方法で, $A^{H,0}_T$ はある確率変数 $\tilde{A}_T$ に分布収束する. また, 有界リプシッツ連続関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し $a_h(H)$ を $H > 0$ では $\mathbb{E}_x[F(A^{H,h}_T)]$, $H = 0$ では $\mathbb{E}_x[F(\tilde{A}_T)]$ として定め, $\{a_h\}_h$ が同程度連続であることをグリーン関数の性質などを用いて示す. アスコリ・アルツェラの定理と a_h の各点収束から一様収束が従い, その結果 $a_H(H)$ は $a_0(0)$ に収束する. 3. は 2. と M_1-位相での緊密性の同値条件から従い, 4. も同様に従う. 5. は PCAF の性質やガウス場 X^H の定常性と X^H と Z^H の二重のランダム性を用いて示すことができる. 6. は 3., 4., 5. とスコロホッド位相の基礎的な性質から従う. 7. は 1. と 6. から直ちに従う. 8. については [1, Appendix A] の方法を参考にして具体的に $\bar{A}$ を構成し, その後 μ^H の収束や A^H の分布収束を利用して $\bar{A}$ と μ^0 が対応することが示される. 9. は $(Z^h, A^{H,h})$ を Z^h の関数とみなし連続写像定理を用いれば, 残りは基本的に 2. と同様の方法で証明できる. 10. は 7. と 9. から直ちに従い, 11. は逆写像を取る操作のスコロホッド位相での連続性と合成関数に関するスコロホッド位相での連続性 ([15, Theorem 13.2.2]) から従う.

注 3.1. 上の証明の 2. と 9. で α-安定過程の具体的なグリーン関数や熱核の性質を用いている. 具体的には次の性質である ;
ある定数 $C \geq 0$ が存在し, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ と $H_1, H_2 > 0$ に対し

$$g^{H_1,H_2}_\lambda(x,y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_{\mathbb{R}} p^{H_1}(t/2,x,z) p^{H_2}(t/2,z,y) dz dt \leq g^0_\lambda(x,y) + C$$

が成立する. また, H_1, H_2 の 0 への極限を取ったとき $g^{H_1,H_2}_\lambda(x,y)$ は $g^0_\lambda(x,y)$ に各点収束する.

一方で, その他の部分では二重のランダム性や測度 μ^H の分布収束や (2. に由来する) PCAF A^H_T の収束などを主に利用しているため, モデルに依存した具体的な性質はあまり利用していない. そのため確率過程のグリーン関数や熱核に適切な仮定を置くことで, もう少しだけ一般のモデルに対して GMC による時間変更過程が, 2 次元の場合にはリウヴィルブラウン運動へ, 1 次元の場合には本稿の主定理の $\hat{Z}^0$ へ収束することを示すことができる.

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP21J20251 の助成を受けたものである.

参考文献

[1] S. ANDRES AND N. KAJINO, Continuity and estimates of the Liouville heat kernel with applications to spectral dimensions. Probab. Theory Related Fields 166 (2016), no. 3-4, 713–752.

[2] N. BERESTYCKI, An elementary approach to Gaussian multiplicative chaos. Electron. Commun. Probab. 22 (2017), Paper No. 27, 12 pp.

[3] N. BERESTYCKI AND E. GWYNNE, Random walks on mated-CRT planar maps and Liouville Brownian motion. Comm. Math. Phys. 395 (2022), no. 2, 773–857.

[4] N. BERESTYCKI AND E. POWELL, Gaussian free field, Liouville quantum gravity and Gaussian multiplicative chaos, lecture note, available at https://homepage.univie.ac.at/nathanael.berestycki/

[5] Z.-Q. CHEN AND M. FUKUSHIMA, Symmetric Markov processes, time change, and boundary theory, Princeton University Press, Princeton, 2012.

[6] M. FUKUSHIMA AND Y. OSHIMA, Gaussian fields, equilibrium potentials and multiplicative chaos for Dirichlet forms. Potential Anal. 55 (2021), no. 2, 285–337.

[7] M. FUKUSHIMA, Y. OSHIMA AND M. TAKEDA, Dirichlet forms and symmetric Markov processes. 2nd rev. and ext. ed. de Gruyter, Berlin, 2011.

[8] E. GWYNNE, J. MILLER AND S. SHEFFIELD, The Tutte embedding of the mated-CRT map converges to Liouville quantum gravity. Ann. Probab. 49 (2021), no. 4, 1677–1717.

[9] C. GARBAN, R. RHODES ABD V. VARGAS, Liouville Brownian motion. Ann. Probab. 44 (2016), no. 4, 3076–3110.

[10] P. HAGER AND E. NEUMAN, The multiplicative chaos of H=0 fractional Brownian fields. Ann. Appl. Probab. 32 (2022), no. 3, 2139–2179.

[11] J.-P. KAHANE, Sur le chaos multiplicatif. Ann. Sci. Math. Québec 9 (1985), no. 2, 105–150.

[12] A. LODHIA, S. SHEFFIELD, X. SUN AND S. WATSON, Fractional Gaussian fields: a survey. Probab. Surv. 13 (2016), 1–56.

[13] A. SHAMOV, On Gaussian multiplicative chaos. J. Funct. Anal. 270 (2016), no. 9, 3224–3261.

[14] 竹田雅好, 桑江一洋, ディリクレ形式入門 （現代基礎数学 20）, 朝倉書店, 2020.

[15] W. WHITT, Stochastic-process limits. An introduction to stochastic-process limits and their application to queues. Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York, 2002.