Some results on von Neumann-Jordan constant for absolute norm [1]

岡山県立大学・情報工学部　三谷健一（Ken-Ichi Mitani）
Okayama Prefectural University

新潟大学・自然科学系　斎藤吉助（Kichi-Suke Saito）
Niigata University

バナッハ空間における幾何学的性質の詳細を調べるために種々の幾何学的定数が導入されている．代表的な定数としてバナッハ空間における中線定理の成立度合いを表す von Neumann-Jordan 定数 (以下, NJ 定数）がある．この定数によって一様 non-square 性や一様正規構造性などの幾何学的性質を評価することができ, さらに James 定数や modulus of smooothness などの幾何学的定数との相互関係が研究されている (e.g., [2, 6, 7, 13, 18])

本研究では, 具体的なバナッハ空間における NJ 定数について考察する．特に, NJ 定数と Banach-Mazur 距離との関係から absolute ノルムにおける NJ 定数の公式を与える．この結果を用いて Day-James 空間や Banaś-Frączek 空間などの具体的な空間における NJ 定数を計算し, さらに Banaś-Frączek 空間上において NJ 定数と characteristic of convexity との関係を与える．

Definition 1 ([4]) Let X be a Banach space. The NJ-constant $C_{\mathrm{NJ}}(X)$ is the smallest constant C for which

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} \leq C$$

holds for all $x, y \in X$ not both 0.

$C_{\mathrm{NJ}}(X)$ の性質として次が知られている．

Proposition 1 (cf. [7]) (i) $1 \leq C_{\mathrm{NJ}}(X) \leq 2$ for all Banach spaces X.
(ii) X is a Hilbert space if and only if $C_{\mathrm{NJ}}(X) = 1$.
(iii) $C_{\mathrm{NJ}}(L_p) = 2^{2/\min\{p,p'\}-1}$, where $1/p + 1/p' = 1, 1 \leq p \leq \infty$.
(iv) X is uniformly non-square if and only if $C_{\mathrm{NJ}}(X) < 2$.
(v) $C_{\mathrm{NJ}}(X) = C_{\mathrm{NJ}}(X^*)$ for all Banach spaces X.

初めに，absolute ノルムにおける NJ 定数を計算する．計算方法は [7] で与えられた NJ 定数と Banach-Mazur 距離との関係を用いる．

[1] *Keywords.* Day-James space, Banach-Mazur distance, von Neumann-Jordan constant

Definition 2 (cf. [14]) For isomorphic Banach spaces X and Y, the Banach-Mazur distance between X and Y, denoted by $d(X,Y)$, is defined to be the infimum of $\|T\| \cdot \|T^{-1}\|$ taken over all bicontinuous linear operators T from X onto Y.

Lemma 1 ([7]) If X and Y are isomorphic Banach spaces, then

$$\frac{C_{\mathrm{NJ}}(X)}{d(X,Y)^2} \leq C_{\mathrm{NJ}}(Y) \leq C_{\mathrm{NJ}}(X)d(X,Y)^2.$$

In particular, if X and Y are isometric, then $C_{\mathrm{NJ}}(X) = C_{\mathrm{NJ}}(Y)$.

Lemma 2 ([7]) Let $X = (X, \|\cdot\|)$ be a non-trivial Banach space and let $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, where $\|\cdot\|_1$ is an equivalent norm on X satisfying, for $\alpha, \beta > 0$,

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \beta\|x\|, \quad x \in X.$$

Then

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}C_{\mathrm{NJ}}(X) \leq C_{\mathrm{NJ}}(X_1) \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2}C_{\mathrm{NJ}}(X).$$

上の補題から absolute ノルムにおける NJ 定数を計算する.

Definition 3 A norm $\|\cdot\|$ on $\mathbb{R}^2$ is said to be absolute if $\|(|x|,|y|)\| = \|(x,y)\|$ for any $x, y \in \mathbb{R}$.

簡単のため $C_{\mathrm{NJ}}((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|))$ を $C_{\mathrm{NJ}}(\|\cdot\|)$ とかく.

Theorem 1 ([8]) Let $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_H$ be absolute norms on $\mathbb{R}^2$. Assume that
(i) $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_H)$ is an inner product space.
(ii) $\|(x,y)\|_X \leq \|(x,y)\|_H$ for any $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(iii) $\|(1,0)\|_X = \|(1,0)\|_H$ and $\|(0,1)\|_X = \|(0,1)\|_H$.
Then

$$C_{\mathrm{NJ}}(\|\cdot\|_X) = M^2, \ \textit{where } M = \max\left\{\frac{\|(x,y)\|_H}{\|(x,y)\|_X} : (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \neq (0,0)\right\}.$$

(証明の概略) Lemma 2 から $C_{\mathrm{NJ}}(\|\cdot\|_X) \leq M^2$. また $\|x\|_H = M\|x\|_X > 0$ なる $x = (u,v)$ をとり, さらに $y = (u,-v)$ とおくと

$$\frac{\|x+y\|_X^2 + \|x-y\|_X^2}{2(\|x\|_X^2 + \|y\|_X^2)} = M^2.$$

よって $C_{\mathrm{NJ}}(\|\cdot\|_X) = M^2$.

この結果は次のように一般化することができる.

Theorem 2 ([10]) Let $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_H$ be absolute norms on $\mathbb{R}^2$. Assume that
(i) $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_H)$ is an inner product space.
(ii) $\alpha\|(x,y)\|_H \le \|(x,y)\|_X \le \beta\|(x,y)\|_H$ for any $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (α, β are the best constants).
(iii) In (ii) it satisfies either $\alpha\|(1,0)\|_H = \|(1,0)\|_X$ and $\alpha\|(0,1)\|_H = \|(0,1)\|_X$, or $\beta\|(1,0)\|_H = \|(1,0)\|_X$ and $\beta\|(0,1)\|_H = \|(0,1)\|_X$.
Then

$$C_{\mathrm{NJ}}(\|\cdot\|_X) = \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

この定理を用いて, Day-James 空間 ℓ_p-ℓ_q における NJ 定数を計算する. Day-James 空間における計算は Yang らが精力的に行っているが, いずれも ℓ_p-ℓ_1,ℓ_p-ℓ_∞ などの特別な場合に対してである ([17, 19, 20, 21]). Theorem 2 を用いることによってそれ以外の場合も一部ではあるが計算することができる.

Definition 4 (cf. [7]) Let $1 \le p, q \le \infty$. The Day-James ℓ_p-ℓ_q space is the space $\mathbb{R}^2$ with the norm $\|\cdot\|_{p,q}$ defined by

$$\|(x,y)\|_{p,q} = \begin{cases} \|(x,y)\|_p, & xy \ge 0, \\ \|(x,y)\|_q, & xy \le 0, \end{cases}$$

where $\|\cdot\|_p$ is the ℓ_p-norm on $\mathbb{R}^2$.

$1 \le q < p < \infty$ に対し, $\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|_X$ を

$$\|(x,y)\|_X = \|T(x,y)\|_{p,q}$$

とおく, ここで

$$T(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y, x+y).$$

Lemma 1 より $C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_q) = C_{\mathrm{NJ}}(\|\cdot\|_X)$ であるから $C_{\mathrm{NJ}}(\|\cdot\|_X)$ を計算すれば十分である. このノルムに対して $\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|_H$ を

$$\|(x,y)\|_H = \sqrt{2^{2/p-1}x^2 + 2^{2/q-1}y^2} \quad (1 \le q < p < \infty)$$

とおくと, $\|\cdot\|_X$ と $\|\cdot\|_H$ は absolute であり Theorem 2 の (i), (ii), (iii) ($\beta = 1$ に関して) をみたす. よって Theorem 2 を適用することで次を得る.

Theorem 3 ([10]) If $1 \leq q \leq 2, q \leq p < \infty$ and $2^{2/p-2/q}(p-1) \leq 1$, then

$$C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_q) = \frac{2^{2/p}(t_0^2 + 2^{2/q-2/p})}{((1+t_0)^q + (1-t_0)^q)^{2/q}}. \tag{1}$$

where

$$t_0 = \sup\Big\{t \in (0,1) : \frac{(2^{2/q-2/p} - t)(1+t)^{q-1}}{(2^{2/q-2/p} + t)(1-t)^{q-1}} \leq 1\Big\}.$$

In particular, if $1 \leq q \leq p \leq 2$, then (1) holds.

Corollary 1 ([17, 19, 21]) If either $1 \leq p \leq 2$, or $p > 2$ and $2^{2/p-2}(p-1) \leq 1$, then

$$C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_1) = 1 + 2^{2/p-2}.$$

Remark 1 Let $1 \leq q \leq 2, q \leq p < \infty$ and $2^{2/p-2/q}(p-1) \leq 1$. If H is an inner product space with $\dim H = 2$, then $C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_q) = d(\ell_p\text{-}\ell_q, H)^2$.

次に Banaś-Frączek 空間を考える.

Definition 5 ([3, 16]). For $\lambda > 1$, the Banaś-Frączek space $\mathbb{R}^2_\lambda$ is the space $\mathbb{R}^2$ with the norm $|\cdot|_\lambda$ defined by

$$|(x,y)|_\lambda = \max\big\{\lambda|x|, \|(x,y)\|_2\big\}.$$

[8] で述べたように, この空間は ℓ_2-ℓ_1 空間の一つの一般化とみなすことができる. この空間における NJ 定数の値は Yang[16] によって次のように得られている.

Theorem 4 ([16]) For $\lambda > 1$,

$$C_{\mathrm{NJ}}(\mathbb{R}^2_\lambda) = 2 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

ここでは Banaś-Frączek 空間を含む次の 2 次元ノルム空間を導入し，この空間の NJ 定数を Theorem 2 を用いて計算する.

Definition 6. For $a \geq b \geq 1$ and $1 \leq p < \infty$, $\mathbb{R}^2_{a,b,p}$ is defined as $\mathbb{R}^2$ with the norm $\|\cdot\|$ on $\mathbb{R}^2$ by

$$\|(x,y)\| = \max\{a|x|, b|y|, \|(x,y)\|_p\}.$$

$1/a^p + 1/b^p \leq 1$ のとき $C_{\mathrm{NJ}}(\mathbb{R}^2_{a,b,p}) = 2$. また $a = b = 1$ のとき $\|(x,y)\| = \|(x,y)\|_p$ であるから $a > 1, 1/a^p + 1/b^p > 1$ の場合のみ考えればよい．ここで, $a \geq b \geq 1$ に対し, $\mathbb{R}^2$ のノルム $\|\cdot\|_H$ を

$$\|(x,y)\|_H = \|(ax, by)\|_2.$$

と定義する.

$p \geq 2$ とする．上の $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_H$ は absolute であり，さらに Theorem 2 の (i)，(ii)，(iii) の条件をみたす．よって Theorem 2 を適用することで次を得る．

Theorem 5 ([8]) Let $a > 1, a \geq b \geq 1$ and $p \geq 2$ with $\dfrac{1}{a^p} + \dfrac{1}{b^p} > 1$.
(i) If $b \leq a(a^p - 1)^{\frac{p-2}{2p}}$, then

$$C_{\mathrm{NJ}}(\mathbb{R}^2_{a,b,p}) = 1 + b^2\Big(1 - \frac{1}{a^p}\Big)^{\frac{2}{p}}.$$

(ii) If $b > a(a^p - 1)^{\frac{p-2}{2p}}$, then

$$C_{\mathrm{NJ}}(\mathbb{R}^2_{a,b,p}) = b^2\Big(1 + \Big(\frac{a}{b}\Big)^{\frac{2p}{p-2}}\Big)^{1-\frac{2}{p}}.$$

In particular, $C_{\mathrm{NJ}}(\mathbb{R}^2_{a,b,p}) = d(\mathbb{R}^2_{a,b,p}, H)^2$, where H is a two-dimensional inner product space.

この結果は Theorem 4 を含む．また，$p < 2$ の場合も同様である．

Theorem 6 ([9]) Let $a > 1, a \geq b \geq 1$ and $p < 2$ with $\frac{1}{a^p} + \frac{1}{b^p} > 1$ and $a^{\frac{2p}{p-2}} + b^{\frac{2p}{p-2}} \leq 1$. Then

$$C_{\mathrm{NJ}}(\mathbb{R}^2_{a,b,p}) = 1 + b^2\Big(1 - \frac{1}{a^p}\Big)^{\frac{2}{p}}.$$

In particular, $C_{\mathrm{NJ}}(\mathbb{R}^2_{a,b,p}) = d(\mathbb{R}^2_{a,b,p}, H)^2$, where H is a two-dimensional inner product space.

Remark 2 バナッハ空間 X の modulus of convexity $\delta_X(\varepsilon)$ と characteristic of convexity $\varepsilon_0(X)$ は次のように定義される:

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} : \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| = \varepsilon\right\} \quad (0 \leq \varepsilon \leq 2),$$

$$\varepsilon_0(X) = \sup\{\varepsilon \in [0,2] : \delta_X(\varepsilon) = 0\}.$$

高橋 [12] は, すべてのバナッハ空間 X に対して

$$1 + \frac{\varepsilon_0(X)^2}{4} \leq C_{\mathrm{NJ}}(X) \tag{2}$$

が成り立つことを示した．上記の Theorem 5 と Theorem 6 から, Banaś-Frączek 空間上において不等式 (2) の等号条件が得られる ([8, 9]):
$a > 1, a \geq b \geq 1$, $\frac{1}{a^p} + \frac{1}{b^p} > 1$ に対して $X = \mathbb{R}^2_{a,b,p}$ とおく.
(i) $p \geq 2$ のとき (2) の等号条件が成立することと $b \leq a(a^p - 1)^{\frac{p-2}{2p}}$ は同値.
(ii) $p < 2$ のとき, $a^{\frac{2p}{p-2}} + b^{\frac{2p}{p-2}} \leq 1$ ならば (2) の等号が成立.

References

[1] J. Alonso, P. Martín, *A counterexample to a conjecture of G. Zbăganu about the Neumann-Jordan constant*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **51** (2006), 135-141.

[2] J. Alonso, P. Martín, P. L. Papini, *Wheeling around von Neumann-Jordan constant in Banach spaces*, Studia Math. **188** (2008), 135-150.

[3] J. Banaś, K. Frączek, *Deformation of Banach spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **34** (1993), no. 1, 47-53.

[4] J. A. Clarkson, *The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue space*, Ann. of Math. **38** (1937), 114-115.

[5] S. Dhompongsa, P. Piraisangjun, S. Saejung, *Generalised Jordan-von Neumann constants and uniform normal structure*, Bull. Austral. Math. Soc. **67** (2003), 225-240.

[6] A. Jiménez-Melado, E. Llorens-Fuster, S. Saejung, *The von Neumann-Jordan constant, weak orthogonality and normal structure in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 355-364.

[7] M. Kato, L. Maligranda, Y. Takahashi, *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces*, Studia Math. **144** (2001), 275-295.

[8] K.-I. Mitani, K.-S. Saito, Y. Takahashi, *On the von Neumann-Jordan constant of generalized Banaś-Frączek spaces*, Linear Nonlinear Anal. **2** (2016), 311-316.

[9] K.-I. Mitani, K.-S. Saito, Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan constant of generalized Banaś-Frączek spaces*, Proceedings of the 10th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (Chitose, Japan, 2017), 227-232.

[10] K.-I. Mitani, Y. Takahashi, K.-S. Saito, *On von Neumann-Jordan constant of ℓ_p-ℓ_q spaces,* J. Nonlinear Conv. Anal. **19** (2018), 1705-1709.

[11] K.-S. Saito, M. Kato, Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan constant of absolute normalized norms on* $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl. **244** (2000), 515-532.

[12] Y. Takahashi, *Some geometric constants of Banach spaces-a unified approach*, Banach and function spaces II, 191-220, Yokohama Publ., Yokohama, 2008.

[13] Y. Takahashi, M. Kato, *A simple inequality for the von Neumann-Jordan and James constants of a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **359** (2009), 602-609.

[14] N. Tomczak-Jaegermann, *Banach-Mazur Distances and Finite Dimensional Operator Ideals*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 38, Longman, New York 1989.

[15] F. Wang, C. Yang, *An inequality between the James and James type constants in Banach spaces*, Studia Math. **201** (2010), 191-201.

[16] C. Yang, *Jordan-von Neumann constant for Banaś-Frączek space*, Banach J. Math. Anal. **8** (2014), 185-192.

[17] C. Yang, *An inequality between the James type constant and the modulus of smoothness*, J. Math. Anal. Appl. **398** (2013), 622-629.

[18] C. Yang, H. Li, *An inequality between Jordan-von Neumann constant and James constant* , Appl. Math. Letters **23** (2010), 277-281.

[19] C. Yang, H. Li, *On the James type constant of* ℓ_p-ℓ_1, J. Inequal. Appl. **2015**: Article ID 79 (2015).

[20] C. Yang, F. Wang, *On a new geometric constant related to the von Neumann-Jordan constant*, J. Math. Anal. Appl. **324** (2006), 555-565.

[21] C. Yang, F. Wang, *The von Neumann-Jordan constant for a class of Day-James Spaces*, Mediterr. J. Math. **13** (2016), 1127-1133.