接合積の極大部分環について

静岡大学・教育学部　大和田 智義 (Tomoyoshi Ohwada)
Faculty of Education, Shizuoka University

1　序

一般に A が環 M の部分環で $A \subsetneq B \subsetneq M$ を満たす部分環 B が存在しないとき, A は M の極大部分環 (または A は M の部分環として極大である) という.

作用素環論における極大部分環の研究は, 1953 年の Wermer による $\mathbb{T}$ 上の全ての連続関数からなる C^*-環 $C(\mathbb{T})$ における結果 [8] が始まりのようである. 彼は, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ に解析拡大をもつ $C(\mathbb{T})$ の全ての元からなるノルム閉部分環 A は $C(\mathbb{T})$ のノルム閉部分環として極大であることを示した. その後 Hoffman と Singer[1] は, 可換な von Neumann 環における極大部分環の研究として, 単位円 $\mathbb{T}$ 上の Lebesgue 空間 $L^\infty(\mathbb{T})$ の部分環であるハーディー環 $H^\infty(\mathbb{T})$ は $L^\infty(\mathbb{T})$ の弱-$*$ 閉部分環として極大であることを示した. この研究の非可換版として von Neumann 環における接合積の極大部分環の研究がある. ここで扱う接合積とは, 大雑把に言うと, コンパクト可換群 G の双対群を $\hat{G}$ とするとき, $\hat{G}$ の von Neumann 環 N への作用 $\alpha = \{\alpha_g\}_{g \in \hat{G}}$ を用いて構成される von Neumann 環のことである. 特に任意の $g \in \hat{G}$ に対して自己同型写像 α_g が N のユニタリ作用素 u_g によって $\alpha_g(x) = u_g x u_g^*$ $(x \in N)$ と与えられるとき α は内部的であるといい, このとき接合積は N と $L^\infty(G)$ のテンソル積 $N \otimes L^\infty(G)$ と同型になる. 接合積においてハーディー環に対応する部分環として解析的接合積があり, やはり α が内部的である場合, von Neumann 環 N と $H^\infty(G)$ のテンソル積 $N \otimes H^\infty(G)$ と同型である. この接合積における極大部分環の研究は, $G = \mathbb{T}$ の場合に Mcasey-Muhly-Saito [2, 3] によって精力的に行われていて, そこでは不変部分空間の理論を用いて解析的接合積が接合積の σ-弱閉部分環として極大であるための必要十分条件を与えた. その後, Saito[5] はこの結果を一般のコンパクト可換群 G の場合に拡張した.

ここでは, Mcasey-Muhly-Saito および Saito の手法とは異なり, G の双対群 $\hat{G}$ の半群から定義される接合積のスペクトル部分環の理論を用いることで得られた極大部分環に関する結果を, 関数環 $L^\infty(G)$ の設定で説明することを目的とする.

2　基本的なアイデアと準備

簡単のために $G=\mathbb{T}$ として考えると, その双対群 $\hat{G}$ は $\mathbb{Z}$ である．一般に群 G の部分集合 Γ が条件 $\Gamma+\Gamma\subseteq\Gamma$ をみたすとき, $\boldsymbol{\Gamma}$ は $\boldsymbol{G}$ の半群であるというが, $\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,\cdots\}$ とすれば明らかに $\mathbb{Z}_+ + \mathbb{Z}_+ \subseteq \mathbb{Z}_+$ であるので $\mathbb{Z}_+$ は $\mathbb{Z}$ の半群であるが, 更に $\{0\}$ を含む $\mathbb{Z}$ の極大な半群であることが知られている． $L^\infty(\mathbb{T})$ の元 f のフーリエ変換を $\hat{f}$ とかき, $\mathrm{supp}\hat{f}=\{n\in\mathbb{Z}:\hat{f}(n)\neq 0\}$ とする．このときハーディ環 $H^\infty(\mathbb{T})$ は, 半群 $\mathbb{Z}_+$ を用いて

$$H^\infty(\mathbb{T})=\left\{f\in L^\infty(\mathbb{T})\mid \mathrm{supp}\hat{f}\subseteq\mathbb{Z}_+\right\}$$

と表すことが出来る．

同様に $L^\infty(\mathbb{T})=\left\{f\in L^\infty(\mathbb{T})\mid \mathrm{supp}\hat{f}\subseteq\mathbb{Z}\right\}$ かつ $\mathbb{C}=\left\{f\in L^\infty(\mathbb{T})\mid \mathrm{supp}\hat{f}\subseteq\{0\}\right\}$ と表すことが出来るので以下のような対応を得ることが出来る．

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} & \subseteq & H^\infty(\mathbb{T}) & \subseteq & L^\infty(\mathbb{T}) \\ \updownarrow & & \updownarrow\ \text{(maximal)} & & \updownarrow \\ \{0\} & \subseteq & \mathbb{Z}_+ & \subseteq & \mathbb{Z} \end{array}}$$

$H^\infty(\mathbb{T})$ が $\mathbb{C}$ を含む $L^\infty(\mathbb{T})$ の弱- $*$ 閉部分環として極大であるのに対して, $H^\infty(\mathbb{T})$ に対応する半群 $\mathbb{Z}_+$ が $\{0\}$ を含む $\mathbb{Z}$ の半群として極大となっていることは, 極大部分環を双対群の半群の理論を利用して特徴付けることを試みる動機付としては十分である．これまでに多くの解析的接合積の極大性に関する研究がなされてきたが, そのアイデアはアルキメデス的順序を引き起こす半群を固定したうえで, 不変部分空間の理論を用いて展開されている．(cf. [2,3,5–7]) ここではこれらと異なる半群の性質に着目するアプローチにより部分環の構造解析および極大性を考察する．

そのために, 以後の議論に必要な幾つかの定義と準備を行う．ここでは常に G を可換なコンパクト群としその双対群を $\hat{G}$ で表すことにする．von Neumann 環 $L^\infty(\mathbb{T})$ を M とかき M の元 f のフーリエ変換を $\hat{f}$ で表わすとき $\hat{f}$ の台 $\{\hat{h}\in\hat{G}:\hat{f}(\hat{h})\neq 0\}$ を $\mathrm{supp}\hat{f}$ とかく．このときスペクトル部分空間を以下で定義する．

定義 2.1 $\hat{G}$ の任意の部分空間 E に対して M の E に関するスペクトル部分空間 $M(E)$ を

$$M(E)=\left\{f\in M\mid \mathrm{supp}\hat{f}\subseteq E\right\}$$

により定義する．特に E が $\hat{G}$ の半群であるとき $M(E)$ は M の弱 $*$-閉部分環であり, それを $\boldsymbol{M}$ **の半群** $\boldsymbol{E}$ **によるスペクトル部分環**とよぶ．

このとき, 以下の補題はこの研究における基本的な性質を与えている．

補題 2.2 $\hat{G}$ の半群 Γ, Σ に関して以下の条件は同値である.

(i) $M(\Gamma) \subsetneq M(\Sigma)$

(ii) $\Gamma \subsetneq \Sigma$

これにより, スペクトル部分環 $M(\Gamma)$ の極大性を考えるとき, それは半群 Γ の極大性と密接な関係にあることが分かる. 我々の目的は M の弱-$*$ 閉部分環の極大性の研究であるから, M がいつスペクトル部分環として表現できるかは興味深い問題である. M の任意の元 f に関して

$$\alpha_k(f)(g) = f(g+k) \qquad (g, k \in G)$$

とすれば $\alpha = \{\alpha_k\}_{k \in G}$ は M の自己同型群である. このとき, この問題に関して次の定理を得た.

定理 2.3 $M = L^\infty(G)$ とし α を上で与えた自己同型群とする. このとき M の $\mathbb{C}$ を含む弱-$*$ 閉部分環 $\mathfrak{A}$ が α に関して不変, すなわち $\alpha_k(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$ $(k \in G)$ を満たすなら, $\hat{G}$ の $\hat{0}$ を含む半群 Γ が存在して $\mathfrak{A} = M(\Gamma)$ となる.

これより直ちに M の $\mathbb{C}$ を含む α に関して不変な弱-$*$ 閉部分環と $\hat{G}$ の単位元 $\hat{0}$ を含む半群との間に一対一対応がつくことがわかる.

さて, 一般にヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素 T に対して, リースの定理から $(Tx, y) = (x, T^*y)$ $(x, y \in H)$ を満たす T の共役作用素 T^* が定義されるが, von Neumann 環の部分環 N について, N の全ての元 T に対して $T^* \in N$ を満たすとき, N を $*$ 部分環という. 定理 2.3 において, M の $*$ 部分環を考えれば von Neumann 環の $*$ 部分環に対する Galois 対応を得ることが出来る.

系 2.4 M の $\mathbb{C}$ を含む弱-$*$ 閉な $*$ 部分環 $\mathfrak{B}$ が α に関して不変, すなわち $\alpha_k(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$ $(k \in G)$ を満たすなら, $\hat{G}$ の $\hat{0}$ を含む部分群 Γ が存在して $\mathfrak{A} = M(\Gamma)$ となる. すなわち M の $\mathbb{C}$ を含む弱-$*$ 閉な $*$ 部分環と $\hat{G}$ の $\hat{0}$ を含む部分群の間には一対一対応が存在する.

3 極大部分環

この章では定理 2.3 の応用として $L^\infty(\mathbb{T})$ の弱-$*$ 閉な極大部分環について考察する.

既に 2 章でも取り上げたハーディー環 $H^\infty(\mathbb{T})$ の極大性をスペクトル部分環の言葉で言い換えると以下のようになる.

例 3.1 可換なコンパクト群 $G = \mathbb{T}$ の双対群は $\hat{G} = \mathbb{Z}$ である. このとき半群 $\mathbb{Z}_+$ に対する M のスペクトル部分環 $M(\mathbb{Z}_+)$ はハーディ環 $H^\infty(\mathbb{T})$ と一致する. すなわちスペクトル部分環 $M(\mathbb{Z}_+)$ は M の $\mathbb{C}$ を含む弱-$*$ 閉部分環として極大である.

ここで, 半群 $\mathbb{Z}_+$ は以下の特徴的な性質

$$\mathbb{Z}_+ \cup (-\mathbb{Z}_+) = \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_+ \cap (-\mathbb{Z}_+) = \{0\}$$

を備えている. 一般に, $\hat{G}$ の半群 $\hat{G}_+$ が条件

$$\hat{G}_+ \cup (-\hat{G}_+) = \hat{G}, \quad \hat{G}_+ \cap (-\hat{G}_+) = \{\hat{0}\}$$

をみたすとき **$\hat{G}_+$ を $\hat{G}$ の正半群**とよぶ. 実際に半群 $\hat{G}_+$ が上の条件を満たすとき, 任意の $x, y \in \hat{G}$ に対して関係 $x \geq y$ を $x - y \in \hat{G}_+$ により定義すれば $\hat{G}_+$ は $\hat{G}$ に全順序を引き起こす. 正半群の選び方により様々な種類の順序が存在する. 重要な順序の例としてアルキメデス的順序がある.

定義 3.2 $\hat{G}_+$ を $\hat{G}$ の正半群とする. $\hat{G}_+$ の $\hat{0}$ でない任意の元 x, y に対してある正整数 n が存在して $nx > y$ となるとき **$\hat{G}_+$ が $\hat{G}$** に引き起こす順序を**アルキメデス的順序**といい, このとき **$\hat{G}_+$ は $\hat{G}$ にアルキメデス的順序を引き起こす**という.

$\mathbb{Z}_+$ は明らかに $\mathbb{Z}$ にアルキメデス的順序を引き起こす. また $\mathbb{Z}$ の正半群は $\mathbb{Z}_+$ だけであることも直ぐにわかるので $\mathbb{Z}$ の正半群が引き起こす順序はアルキメデス的順序だけである. しかし $\mathbb{Z}^2$ ではアルキメデス的順序ではない順序が以下のように導入される.

例 3.3 $G = \mathbb{T}^2$ の双対群 $\hat{G} = \mathbb{Z}^2$ に対して, $\hat{G}_+$ を

$$\hat{G}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \left\{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 \mid k = 0 \text{ かつ } l \geq 0, \text{ または } k > 0\right\}$$

と定義すれば $\hat{G}_+$ は明らかに

$$\hat{G}_+ \cup (-\hat{G}_+) = \hat{G}, \quad \hat{G}_+ \cap (-\hat{G}_+) = \{(0, 0)\}$$

をみたすので正半群である. しかしながら $\hat{G}_+$ の元 $(1, 0), (0, 1)$ をとれば, 任意の正整数 n に対して

$$n(0, 1) - (1, 0) = (-1, n) \notin \hat{G}_+$$

である. すなわち $\hat{G}_+$ はアルキメデス的でない順序を $\hat{G}$ に引き起こす. この $\hat{G}_+$ によって導入される順序は *lexicographic* 順序と呼ばれている.

ハーディ環 $H^\infty(\mathbb{T}) = M(\mathbb{Z}_+)$ の一般化として, 正半群 $\hat{G}_+$ に対して, ハーディ環 $H^\infty(G)$ が以下のスペクトル部分環として定義される.

$$H^\infty(G) \stackrel{\textbf{def}}{=} M(\hat{G}_+) = \left\{f \in M \mid \mathrm{supp}\hat{f} \subseteq \hat{G}_+\right\}$$

このとき $H^\infty(\mathbb{T})$ が $L^\infty(\mathbb{T})$ の弱-$*$ 閉部分環として極大であるように $H^\infty(G)$ がいつ $L^\infty(G)$ の弱-$*$ 閉部分環として極大であるかは興味深い問題である. 実際に全てのハーディ環 $H^\infty(G)$ が極大であるわけではない.

例 3.4 $G = \mathbb{T}^2$ の双対群 $\hat{G} = \mathbb{Z}^2$ に対して, $\hat{G}_+$ を

$$\hat{G}_+ = \left\{(k,l) \in \mathbb{Z}^2 \mid k = 0 \text{ かつ } l \geq 0, \text{ または } k > 0\right\}$$

により与えると $\hat{G}_+$ は $\hat{G}$ の正半群である. また $\Gamma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ とすれば Γ は $\hat{G}$ の半群であり, 明らかに $\hat{G}_+ \subsetneq \Gamma \subsetneq \hat{G}$ である. このとき補題 *2.2* より

$$H^\infty(G) = M(\hat{G}_+) \subsetneq M(\Gamma) \subsetneq M(\hat{G}) = M$$

である. すなわちハーディ環 $H^\infty(G)$ は極大ではない.

この例から, ハーディ環 $H^\infty(G)$ の極大性は $\hat{G}$ の正半群の性質と密接な関係にあることが分かる. 実際に我々は以下の結果を得ている.

定理 3.5 ([4, Theorem 3.7]) *G を可換なコンパクト群とし $\hat{G}_+$ をその双対群の正半群とする. このとき $M(\hat{G}_+)$ が弱 $*$-閉部分環として極大であるならば, $\hat{G}_+$ は $\hat{G}$ にアルキメデス的順序を引き起こす.*

さて, ここでの興味は定理 3.5 の逆の問題, すなわち正半群 $\hat{G}_+$ が $\hat{G}$ にアルキメデス的順序を引き起こすなら, ハーディ環 $H^\infty(G) = M(\hat{G}_+)$ は M の弱 $*$-閉部分環として極大であるか, であった. 定理 2.3 を用いるためには部分環の α 不変性が必要であるが, これについては Solel による以下の結果がある.

命題 3.6 ([6, Proposition 5.1]) *G を可換なコンパクト群としその双対群を $\hat{G}$ とする. $\hat{G}_+$ を $\hat{G}$ にアルキメデス的順序を引き起こす正半群とすれば, $M^\alpha(\hat{G}_+)$ を含む全ての M の弱-$*$ 閉部分環 $\mathfrak{B}$ は自己同型群 α に関して不変である. すなわち $\alpha_g(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$ $(g \in G)$ である.*

以上より, M の部分環に関する極大性の問題は以下のように解決した.

定理 3.7 *G を可換なコンパクト群とし $\hat{G}_+$ をその双対群の正半群とする. このとき $M^\alpha(\hat{G}_+)$ が弱 $*$-閉部分環として極大であることと $\hat{G}_+$ が $\hat{G}$ にアルキメデス的順序を引き起こすことは同値である.*

ここでは可換な von Neumann 環 $L^\infty(G)$ を考えたが, 一般の接合積を考えた場合, この問題はもう少し複雑である. それは接合積を与える von Neumann 環 N の性質に関係する. しかしこれに関しては未発表の内容を含んでいるため, ここではその詳細は省略する.

参考文献

[1] K. Hoffman and L.M. Singer, *Maximal subalgebras of continuous functions*, Acta Math., **103**(1960), 217–241.

[2] M. McAsey, P. S. Muhly and K-S. Saito, *Non-selfadjoint crossed products* (Invariant subspaces and maximality). Trans. Amer. Math. Soc. **248** (1979), 381–409.

[3] M. McAsey, P. S. Muhly and K-S. Saito, *Non-selfadjoint crossed products III.* J. Operator Theory **12** (1984), 3–22.

[4] T. Ohwada, G. Ji, A. Hasegawa and K-S. Saito, *A note on maximality of analytic crossed products.* J. Math. Anal. Appl., **315**(2006), 216–224.

[5] K-S. Saito, *Invariant subspaces and cocycles in nonselfadjoint crossed products.* J. Funct. Anal. **45** (1982), 177–193.

[6] B. Solel, *Nonselfadjoint crossed products: Invariant subspaces, cocycles and subalgebras.* Indiana Univ. Math. J. **34** (1985), 277–298.

[7] B. Solel, *Maximality of analytic operator algebras.* Israel J. Math. **62** (1988), 63–89.

[8] J. Wermer, *On algebras of continuous functions,* Proc. Amer. Math. Soc. **4**(1953), 866–869.