強非拡大性をもつ写像列の不動点近似について

千葉大学・社会科学研究院 青山耕治
Koji Aoyama
Graduate School of Social Sciences,
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47H10, 41A65.
Keywords and phrases. 強非拡大列, 共通不動点, 強収束定理。

概要

強非拡大性をもつ写像列の共通不動点の近似に関して文献 [19] で得られた結果を報告する。

1 はじめに

E を実 Banach 空間, C を E の閉凸部分集合, $\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ の数列, $\{S_n\}$ を C から C への非拡大写像の列とし, C の点列 $\{x_n\}$ を, $u \in C$, $x_1 \in C$ および

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)S_n x_n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.1}$$

で定義する。本稿では, 点列 $\{x_n\}$ が $\{S_n\}$ の共通不動点に強収束するための十分条件に関する結果を取り扱う。

点列 $\{x_n\}$ を扱った研究には様々なものがある $[1–4, 6–8, 8, 9, 11, 12, 15, 17, 22, 26, 27, 32–34, 36, 38–40]$。このうち, 文献 [12] では次の定理が得られた。

定理 1.1 ([12, Theorem 3.4])**.** E が一様凸, E のノルムが一様 Gâteaux 微分可能, 各 S_n が非拡大であり, $\{S_n\}$ の共通不動点が存在し, $\sum_n \alpha = \infty$, $\lim_n \alpha_n = 0$, $x_1 = u$ であり, $\{S_n\}$ が AKTT 条件を満たし, さらに

- $\sum_n |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ または
- 任意の $n \in \mathbb{N}$ 対して $\alpha_n \neq 0$, かつ, $\lim_n \alpha_n/\alpha_{n+1} = 1$

のどちらかが成り立つと仮定する。このとき, (1.1) で定義される点列 $\{x_n\}$ は, $\{S_n\}$ のある共通不動点に強収束する。

また, 文献 [26] には, 定理 1.1 と似た次の定理が述べられている.

定理 1.2 ([26, Theorem 10])**.** E が一様凸, E のノルムが一様 Gâteaux 微分可能, $\{S_n\}$

が強非拡大列であり, $\{S_n\}$ の共通不動点が存在し, $\{S_n\}$ が AKTT 条件を満たし, さらに $\{\alpha_n\}$ が $(0,1)$ の数列で, $\sum_n \alpha = \infty$, $\lim_n \alpha_n = 0$ であるとする。このとき, (1.1) で定義される点列 $\{x_n\}$ は, $\{S_n\}$ のある共通不動点に強収束する。

定理 1.1 と定理 1.2 はよく似ているが, 大雑把にいうと, $\{S_n\}$ に対する仮定は定理 1.1 の方が弱く, $\{\alpha_n\}$ に対する仮定は定理 1.2 の方が弱いので, 互いに独立した結果である。

本稿では, 定理 1.2 の仮定「$\{S_n\}$ が AKTT 条件を満たす」が弱められることを示し (定理 3.1), そして, 定理 3.1 から導かれる結果およびその応用を紹介する。

2 準備

本稿では, E を実 Banach 空間, $\|\cdot\|$ を E のノルム, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合とする。また, E の点列 $\{x_n\}$ が $x \in E$ に収束することを $x_n \to x$ で表す。

S_E を E の単位球面, つまり, $S_E = \{x \in E\colon \|x\| = 1\}$ とする。Banach 空間 E が一様凸 (uniformly convex) であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在し, $x, y \in S_E$, $\|x - y\| \geq \epsilon$ ならば $\|x + y\|/2 \leq 1 - \delta$ が成り立つときをいう。E が一様凸ならば, E が回帰的であることが知られている [28]。

再び, S_E を E の単位球面とする。Banach 空間 E のノルム $\|\cdot\|$ が一様 Gâteaux 微分可能であるとは, 各 $y \in S_E$ に対して, 極限

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

が x に関して一様に収束するときをいう。E のノルムが一様に Fréchet 微分可能であるとは, (2.1) が $x, y \in S$ に関して一様に収束するときをいう。このとき, E は一様に滑らか (uniformly smooth) であるという。一様に滑らかな Banach 空間は, 回帰的であることが知られている [28]。

C を E の空でない部分集合, T を C から E への写像とする。このとき, T の不動点の集合を $\mathrm{F}(T)$ で表す。つまり, $\mathrm{F}(T) = \{z \in C\colon z = Tz\}$ である。写像 T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう。写像 $T\colon C \to E$ が強非拡大 (strongly nonexpansive) であるとは, 次の 2 条件が成り立つときをいう [20]。

- T は非拡大である。
- $\{x_n - y_n\}$ が有界で $\|x_n - y_n\| - \|Tx_n - Ty_n\| \to 0$ となる C の任意の点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ に対して, $x_n - y_n - (Tx_n - Ty_n) \to 0$ となる。

Banach 空間 E が非拡大写像に関して不動点性 (fixed point property) をもつとは, 以下が成り立つときをいう。

> D が E の有界閉凸部分集合で, $T\colon D \to D$ が非拡大写像ならば, T は不動点をもつ。

E が一様凸な Banach 空間ならば, または, E が一様に滑らかならば, E は非拡大写像に関して不動点性をもつことが知られている [21,28,30]。

C を E の部分集合, K を C の空でない部分集合とし, Q を C から K の上への写像とする。Q が retraction であるとは, すべての $x \in K$ に対して $Qx = x$ が成り立つときをいう。Q が sunny であるとは

$$x \in C,\ \lambda \geq 0,\ Qx + \lambda(x - Qx) \in C \Rightarrow Q\bigl(Qx + \lambda(x - Qx)\bigr) = Qx$$

が成り立つときをいう。K が C の sunny nonexpansive retract であるとは, C から K の上への sunny で非拡大な retraction が存在するときをいう [25]。非拡大写像の不動点の集合は, ある仮定のもとで sunny nonexpansive retract であることが知られている。

例 2.1 ([19, Lemma 2.3]). E を回帰的な Banach 空間, C を E の空でない閉凸部分集合, $T\colon C \to C$ を非拡大写像とし, $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ であり, E のノルムは一様に Gâteaux 微分可能であり, E は非拡大写像に関して不動点性をもつとする。このとき, $\mathrm{F}(T)$ は C の sunny nonexpansive retract である。

C を E の部分集合, $\{S_n\}$ を C から C への写像の列とする。$\{S_n\}$ が強非拡大性をもつ, または, 強非拡大列 (strongly nonexpansive sequence) であるとは, 次の 2 条件が成り立つときをいう [13,14]。

- 各 S_n は非拡大である。
- $\{x_n - y_n\}$ が有界で $\|x_n - y_n\| - \|S_n x_n - S_n y_n\| \to 0$ となる C の任意の点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ に対して, $x_n - y_n - (S_n x_n - S_n y_n) \to 0$ となる。

強非拡大性をもつ写像列について詳しくは, 文献 [8,13,14,18,19,31] を参照されたい。写像列 $\{S_n\}$ が写像 $T\colon C \to C$ について NST 条件 (I) を満たすとは, 次の条件が成り立つときをいう [24,29]。

> $\mathrm{F}(T) \subset \bigcap_n \mathrm{F}(S_n)$ であり, さらに, $\{y_n\}$ が C の有界点列で, $y_n - S_n y_n \to 0$ ならば, $y_n - Ty_n \to 0$ である。

写像列 $\{S_n\}$ が AKTT 条件を満たすとは, 次の 2 条件が成り立つときをいう [12]。

- C の空でない有界な部分集合 B に対して

$$\sum_n \sup\{\|S_{n+1}y - S_n y\| : y \in B\} < \infty \tag{2.2}$$

が以下が成り立つ。

- 写像 $T\colon C \to C$ を

$$Ty = \lim_n S_n y \quad (y \in C) \tag{2.3}$$

で定義するとき, $\bigcap_n \mathrm{F}(S_n) = \mathrm{F}(T)$ となる。

AKTT 条件について次のことが知られている [12, Lemma 3.2]。

補助定理 2.2. *C を Banach 空間 E の部分集合, $\{S_n\}$ を C から C への写像の列, B を C の空でない有界な部分集合とし, (2.2) を仮定する。このとき, 以下が成り立つ。*

- *任意の $y \in C$ に対して, $\{S_n y\}$ は収束する。*
- *写像 $T\colon C \to C$ を (2.3) で定義するとき, $\lim_n \sup\{\|Ty - S_n y\| : y \in B\} = 0$ である。*

補助定理 2.2 で, $y \in C$, $B = \{y\}$ のとき, B は C の空でない有界な部分集合であるから, AKTT 条件の前半の仮定 (2.2) のもとで, (2.3) により定義される写像 T は well-defined であることがわかる。

NST 条件 (I) と AKTT 条件の関係は次の通りである。

補助定理 2.3. *C を Banach 空間 E の空でない部分集合, $\{S_n\}$ を C から C への写像の列とし, $\{S_n\}$ は AKTT 条件を満たすと仮定する。このとき, $\{S_n\}$ は, (2.3) で定義される写像 $T\colon C \to C$ について NST 条件 (I) を満たす。*

証明. 仮定より, $\mathrm{F}(T) \subset \bigcap_n \mathrm{F}(S_n)$ であることがすぐにわかる。$\{y_n\}$ を C の有界点列で, $y_n - S_n y_n \to 0$ とする。このとき, C の有界な部分集合 B が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ 対して $y_n \in B$ となる。補助定理 2.2 より, $\lim_n \sup\{\|S_n z - Tz\| : z \in B\} = 0$ であるから

$$\begin{aligned}\|y_n - Ty_n\| &\le \|y_n - S_n y_n\| + \|S_n y_n - Ty_n\| \\ &\le \|y_n - S_n y_n\| + \sup\{\|S_n z - Tz\| : z \in B\} \to 0\end{aligned}$$

となる。したがって, $\{S_n\}$ は T に関して NST 条件 (I) を満たす。 $\square$

3　主結果と系

この節では, 文献 [19] の主結果を述べ, 次に, それから導かれる系を述べる。

定理 3.1 ([19, Theorem 3.1]). E を回帰的な Banach 空間, C を E の空でない閉凸部分集合, $\{S_n\}$ を C から C への強非拡大性をもつ写像の列, F を $\{S_n\}$ の共通不動点の集合, $\{\alpha_n\}$ を $(0,1]$ の数列とし, C の点列 $\{x_n\}$ を $u \in C$, $x_1 \in C$ および任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n) S_n x_n$$

で定義する。さらに, E のノルムは一様 Gâteaux 微分可能であり, E は非拡大写像に関して不動点性をもち, $F \neq \emptyset$, $\alpha_n \to 0$, $\sum_n \alpha_n = \infty$ であり, $\{S_n\}$ は非拡大写像 $T\colon C \to C$ について NST 条件 (I) を満たすと仮定する。このとき, $\{x_n\}$ は $Qu \in F$ に強収束する。ここで, Q は C から F の上への sunny nonexpansive retraction である。

E が一様凸のとき, E は回帰的で, 非拡大写像に関して不動点性をもつことから, 定理 3.1 より次の系が直ちに得られる。

系 3.2. E を一様凸な Banach 空間とし, E のノルムは一様 Gâteaux 微分可能とする。さらに, C, $\{S_n\}$, F, T, $\{\alpha_n\}$, u, $\{x_n\}$ および Q は定理 3.1 と同じとする。このとき, $\{x_n\}$ は Qu に強収束する。

系 3.2 の二つの仮定「$\{S_n\}$ は非拡大写像 $T\colon C \to C$ について NST 条件 (I) を満たす」および「$\{\alpha_n\}$ は $(0,1]$ の数列」を, 「$\{S_n\}$ は AKTT 条件を満たす」および「$\{\alpha_n\}$ は $(0,1)$ の数列」に置き換えたものが [26, Theorem 10] である。よって, 補助定理 2.3 より, 系 3.2 は [26, Theorem 10] の一般化である。一方, 系 3.2 と定理 1.1 は, 互いに独立の結果である。

定理 3.1 を使うと次の系も得られる。

系 3.3. E, C, $\{\alpha_n\}$ および u を定理 3.1 と同じとし, $T\colon C \to C$ を強非拡大写像, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$ および任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n) T x_n$$

で定義し, $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ を仮定する。このとき, $\{x_n\}$ は Qu へ強収束する。ここで, Q は C から $\mathrm{F}(T)$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

証明. $S_n \equiv T$ として写像列 $\{S_n\}$ を定義すると, $\{S_n\}$ は強非拡大列である。さらに, $\{S_n\}$ が T に関して NST 条件 (I) を満たすことが容易にわかる。よって, 定理 3.1 より結論が得られる。 $\square$

系 3.3 の二つの仮定「E は回帰的で非拡大写像に関して不動点性もつ」および「$\{\alpha_n\}$ は $(0, 1]$ の数列」を, 「E は一様に滑らか」および「$\{\alpha_n\}$ は $(0, 1)$ の数列」に置き換えたものが [26, Theorem 4 (1)] である。よって, 系 3.3 は [26, Theorem 4 (1)] の一般化である。

4 主結果の応用

ここでは, 定理 3.1 の応用例をいくつか紹介する。

まず, 定理 3.1 は, (共通不動点の存在以外に) 制約のない非拡大写像列の共通不動点問題に応用可能である。実際, 所与の非拡大写像の列 $\{T_n\}$ から, 定理 3.1 の仮定を満たす強非拡大性をもつ写像列 $\{S_n\}$ を構成することができる。詳しくは, [19, Theorem 4.1] を参照されたい。

また, 定理 3.1 は, 増大作用素 (accretive operator) の零点問題にも応用できる。実際, 系 3.2 を使うと, 増大作用素の零点近似に関する収束定理 [18, Theorem 3.1] を得ることができる。詳しくは, [19, Theorem 4.5] を参照されたい。

さらに, 定理 3.1 を使うと, viscosity approximation method [23] と呼ばれる不動点近似法に関する収束定理が得られる [19, Theorem 4.6]。この不動点近似法に関しては, [5, 10, 16, 35, 37] を参照されたい。

参考文献

[1] K. Aoyama, *An iterative method for a variational inequality problem over the common fixed point set of nonexpansive mappings*, Nonlinear analysis and convex analysis, 2010, pp. 21–28.

[2] ———, *An iterative method for fixed point problems for sequences of nonexpansive mappings*, Fixed point theory and its applications, 2010, pp. 1–7.

[3] ———, *Halpern's iteration for a sequence of quasinonexpansive type mappings*, Nonlinear mathematics for uncertainty and its applications, 2011, pp. 387–394.

[4] ———, *Approximations to solutions of the variational inequality problem for*

inverse-strongly-monotone mappings, Nonlinear analysis and convex analysis -I-, 2013, pp. 1–9.

[5] ———, *Viscosity approximation method for quasinonexpansive mappings with contraction-like mappings*, Nihonkai Math. J. **27** (2016), 167–180.

[6] K. Aoyama, K. Eshita, and W. Takahashi, *Iteration processes for nonexpansive mappings in convex metric spaces*, Nonlinear analysis and convex analysis, 2007, pp. 31–39.

[7] K. Aoyama, H. Iiduka, and W. Takahashi, *Strong convergence of Halpern's sequence for accretive operators in a Banach space*, Panamer. Math. J. **17** (2007), 75–89.

[8] K. Aoyama and Y. Kimura, *Strong convergence theorems for strongly nonexpansive sequences*, Appl. Math. Comput. **217** (2011), 7537–7545.

[9] ———, *A note on the hybrid steepest descent methods*, Fixed point theory and its applications, 2013, pp. 73–80.

[10] ———, *Viscosity approximation methods with a sequence of contractions*, Cubo **16** (2014), 9–20.

[11] K. Aoyama, Y. Kimura, and F. Kohsaka, *Strong convergence theorems for strongly relatively nonexpansive sequences and applications*, J. Nonlinear Anal. Optim. **3** (2012), 67–77.

[12] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Approximation of common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space*, Nonlinear Anal. **67** (2007), 2350–2360.

[13] ———, *On a strongly nonexpansive sequence in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 471–489.

[14] ———, *Strongly nonexpansive sequences and their applications in Banach spaces*, Fixed point theory and its applications, 2008, pp. 1–18.

[15] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:95, 13.

[16] ———, *Viscosity approximation process for a sequence of quasinonexpansive mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:17, 11.

[17] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Proximal point methods for monotone operators in Banach spaces*, Taiwanese J. Math. **15** (2011), 259–281.

[18] K. Aoyama and M. Toyoda, *Approximation of zeros of accretive operators in a Banach space*, Israel J. Math. **220** (2017), 803–816.

[19] ———, *Approximation of common fixed points of strongly nonexpansive sequences in a Banach space*, J. Fixed Point Theory Appl. **21** (2019), Art. 35, 16.

[20] R. E. Bruck and S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 459–470.

[21] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[22] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957–961.

[23] A. Moudafi, *Viscosity approximation methods for fixed-points problems*, J. Math. Anal. Appl. **241** (2000), 46–55.

[24] K. Nakajo, K. Shimoji, and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 11–34.

[25] S. Reich, *Asymptotic behavior of contractions in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **44** (1973), 57–70.

[26] S. Saejung, *Halpern's iteration in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **73** (2010), 3431–3439.

[27] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3641–3645.

[28] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000. Fixed point theory and its applications.

[29] ———, *Viscosity approximation methods for countable families of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **70** (2009), 719–734.

[30] B. Turett, *A dual view of a theorem of Baillon*, Nonlinear analysis and applications (St. Johns, Nfld., 1981), 1982, pp. 279–286.

[31] 青山耕治, 強非拡大写像列について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1667** (2009), 28–38.

[32] ———, バナッハ空間における単調作用素に対する近接点法, 京都大学数理解析研究所講究録 **1841** (2013), 69–76.

[33] ———, 不動点集合上の変分不等式問題と不動点問題の求解法, 京都大学数理解析研究所講究録 **1852** (2013), 15–24.

[34] ———, *Halpern* 型不動点近似アルゴリズムとハイブリッド最急降下法, 京都大学数理解析研究所講究録 **1923** (2014), 172–178.

[35] ———, 非拡大写像および擬非拡大写像の不動点近似法について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1963** (2015), 100–107.

[36] ———, 増大作用素の零点近似について, 京都大学数理解析研究所講究録 **2041** (2017), 92–99.

[37] ———, *An iterative method for generalized split feasibility problems*, 京都大学数理解析研究所講究録 **2065** (2018), 19–29.

[38] ———, *Hilbert* 空間における非拡大写像と擬非拡大写像の不動点近似について, 京都大学数理解析研究所講究録 **2019** (2114), 29–35.

[39] 青山耕治, 木村泰紀, 高橋渉, and 豊田昌史, バナッハ空間上の非拡大写像族の共通不動点の近似について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1585** (2008), 65–76.

[40] 青山耕治, 飯塚秀明, and 高橋渉, *Strong convergence of halpern's sequence for accretive operators in a banach space*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1484** (2006), 59–68.