正数空間上の数猫演算について
(SUNEKO OPERATIONS ON POSITIVE REAL NUMBERS)

高橋眞映 (山形大学 (米沢)/数学・ゲーム工房 (船橋))
(YAMAGATA UNIVERSITY ()YONEZAWA)/LABORATORY OF MATHEMATICS AND GAMES (FUNABASHI))

Abstract. これは、ナンプレゲームをある種の演算と捉え、それを抽象化した演算を数猫演算と称し、正数空間上の数猫演算を研究した速報及びその survey である。

1. 動機

2 項演算、特に半群演算は不等式にも関係して以前から興味がありました ([7] 参照)。実数空間上の連続な半群演算の解明については Abel に端を発しいるようで、その後 Aczél を始め多くの数学者が研究して来ました ([1, 2, 3, 4] 参照)。僕の方は、最近では正数空間上の連続な半群演算を分配律の観点から研究しています ([8, 9, 10] 参照)。

さてナンプレとは、9×9 のマス目があり、空いているマス目に次のルールに従って数を配置する問題です：

(R_1) 各行に 1 から 9 までの数を 1 個ずつ入れる。

(R_2) 各列に 1 から 9 までの数を 1 個ずつ入れる。

(R_3) 9×9 のマス目全体を分割する 3×3 の各ブロックに 1 から 9 までの数を 1 個ずつ入れる。

僕は最近ナンプレを扱った本「数猫」([5, 6]) を眺めていて、そこで取り上げた問題を $I_9=\{1,2,\cdots,9\}$ 上の 2 項演算と見たいと言う考えに至り、この観点を正数空間上の連続半群演算の特徴づけに応用できるのではないかと言う思いに至りました。これが本研究の動機です。

2. 位相空間上の数猫演算の定義

上の動機を実現するため、X を一般の位相空間とし、通常の位相を持つ直積空間 $X \times X$ の n 種類の分割 $\Delta_1 \equiv \{D_{1,i}\}_{i \in I_1}, \cdots, \Delta_n \equiv \{D_{n,i}\}_{i \in I_n}$ を考えます。このとき X 上の連続な 2 項演算 $*$ が X 上の分割の族 $\{\Delta_k\}_{1 \leq k \leq n}$ に関する数猫演算であるとは、

$$\pi_*|_{D_{k,i}} \in Homeo(D_{k,i}, X) \ (1 \leq k \leq n, i \in I_k)$$

が満たされる事を言います。ただし、

$$\pi_*(x, y) = x * y \ (x, y \in X)$$

であり、$Homeo(X_1, X_2)$ は位相空間 X_1 から他の位相空間 X_2 への同相写像の全体を表します。

所でナンプレの原点に戻りましょう。任意の $a \in X$ に対して、

$$I_{row}(X; a) = \{(x, a) \in X \times X : x \in X\}$$

及び

$$I_{col}(X; a) = \{(a, x) \in X \times X : x \in X\}$$

と定義します。従って行分割

$$\Delta_{row}(X) \equiv \{I_{row}(X; a)\}_{a \in X}$$

及び列分割

$$\Delta_{col}(X) \equiv \{I_{col}(X; a)\}_{a \in X}$$

はそれぞれ $X \times X$ の最も基本的で綺麗な分割と考えられます。

$\Delta(X)$ を $X \times X$ の他の分割とします。このときもし X 上の 2 項演算 $*$ が

$$\{\Delta_{row}(X), \Delta_{col}(X), \Delta(X)\}$$

に関する数猫演算ならば、$*$ は単に $\Delta(X)$ に関する標準的数猫演算であると言います。

ナンプレ問題とは、$X = \{1, 2, \cdots, 9\}$ とするとき、9 個からなる 3×3 ブロックによる $X \times X$ の分割に関する標準的数猫演算を、与えられた初期値のもとで決定せよというものです。但し X には離散位相を入れます。上のような数猫演算は有限個とは言え、殆ど無数にあります。それ故ナンプレ本が巷に溢れる理由です。しかしまだその中に半群演算となっているものは見つかっていません。

我々の興味は正数空間 $\mathbf{R}_+$ 上の数猫演算にあるので、次節で $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ 上の代表的分割を与えましょう。

3. $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ 上の代表的分割

以下 $\mathbf{R}_+$ を通常の位相を持つ正数全体の空間とします。次に $\mathbf{R}_+$ 上の正数値関数 $y = f(x)$ $(x > 0)$ のグラフを $G(f)$ で表しましょう。

例 1。実数 α を任意に取って固定します。各 $\lambda > 0$ に対して

$$\mu_{\alpha,\lambda}(x) = \lambda x^{\alpha} \ (x \in \mathbf{R}_+)$$

と定義し、 $\Delta_{\mu_\alpha} = \{G(\mu_{\alpha,\lambda})\}_{\lambda>0}$ と置きます。これは冪関数による分割です。もし $\alpha > 0$ ならば、Δ_{μ_α} は $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ の増加型分割となります。もし $\alpha < 0$ ならば、Δ_{μ_α} は $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ の減少型分割となります。また $\alpha = 0$ の場合は $\Delta_{\mu_\alpha} = \Delta_{row}(\mathbf{R}_+)$ となっています。

次の例は、上の例とは全く異なるものです。

例 2。任意の $\lambda > 0$ に対して、

$$L_\lambda = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ : x + y = \lambda\}.$$

と定義します。このとき、$\{L_\lambda\}_{\lambda>0}$ は $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ の一つの分割を与えます。

4. 主要結果

位相空間 X 上の 2 項演算 $*$ 及び $\varphi \in Homeo(X)$ に対して、

$$x *_\varphi y = \varphi^{-1}(\varphi(x) * \varphi(y)) \ (x, y \in X)$$

と定義します。もし X 上の他の演算 $\star$ が、ある $\varphi \in Homeo(X)$ に対して $\star = *_\varphi$ と書けるとき、$*$ と $\star$ は位相同型である言い、簡単に $* \cong \star$ と書きます。

正数空間 $\mathbf{R}_+$ 上の任意の簡約的連続半群演算は通常積 $\cdot$, 通常和 $+$ 及び通常和のシフト $+'$ のどれかに位相同型であることが知られています ([4, Corollary 4.5] 参照)。ここで通常和のシフトとは

$$x +' y = x + y + 1 \ (x, y \in \mathbf{R}_+)$$

で定義された演算を言います。

次の結果は $\mathbf{R}_+$ 上の任意の簡約的連続半群演算は冪関数の定義する増加型分割に関する数猫演算とそうでないものに分かれる事を主張しています。

定理 1。$\alpha > 0$ とする。このとき

(i) $\mathbf{R}_+$ 上の $\cdot$ または $+$ と位相同型な演算は $\Delta_{\mu_\alpha}(\mathbf{R}_+)$ に関する数猫演算である。

(ii) $\mathbf{R}_+$ 上の $+'$ と位相同型な演算は $\Delta_{\mu_\alpha}(\mathbf{R}_+)$ に関する数猫演算でない。

次の結果は $\mathbf{R}_+$ 上の通常積と位相同型な 2 項演算を行分割及び列分割に関する数猫演算で特徴付けたものです。

定理 2。$\mathbf{R}_+$ 上の簡約的連続半群演算 $*$ に対して次は同値である。

(i) $*$ は $\Delta_{col}(\mathbf{R}_+)$ に関する数猫演算である。

(ii) $*$ は $\Delta_{row}(\mathbf{R}_+)$ に関する数猫演算である。

(iii) $*$ は $\mathbf{R}_+$ 上の通常積 $\cdot$ と位相同型、つまり $* \cong \cdot$ である。

次の結果は定理 1, 2 の自然な帰結です。

系 1。$\alpha > 0$ 及び $*$ を $\mathbf{R}_+$ 上の簡約的連続半群演算とする。このとき、$*$ が $\Delta_{\mu_\alpha}(\mathbf{R}_+)$ に関する標準的数猫演算であるための必要十分条件は、それが $\mathbf{R}_+$ 上の通常積と位相同型となることである。

5. 問題

系 1 において、$\alpha < 0$ の場合、つまり Δ_{μ_α} が減少型分割の場合はどうなるか考察して見ましょう。

任意の実数 α に対して、分割 Δ_{μ_α} に関する $\mathbf{R}_+$ 上の標準的数猫演算の全体を

$$\mathcal{S}_{neko}(\Delta_{\mu_\alpha}) \equiv \mathcal{S}_{neko}(\mathbf{R}_+; \Delta_{\mu_\alpha})$$

で表す事にします。$\mathbf{R}_+$ 上の簡約的連続半群演算の全体を $\mathcal{A}(\mathbf{R}_+)$ で表すとき、集合

$$\mathcal{S}_{neko}(\Delta_{\mu_\alpha}) \cap \mathcal{A}(\mathbf{R}_+)$$

を決定する事に興味があります。

しかしながら、主要結果からこれは $Homeo(\mathbf{R}_+)$ の部分集合

$$Homeo(\mathbf{R}_+; \mathcal{S}_{neko}(\Delta_{\mu_\alpha})) := \{\varphi \in Homeo(\mathbf{R}_+) : \cdot_\varphi \in \mathcal{S}_{neko}(\Delta_{\mu_\alpha})\}$$

を決定する事と同値になります。その為に次の結果を示めします。

(I) $\mathbf{R}_+$ 上の可換な 2 項演算 $*$ に対して、もし $\alpha = -1$ ならば、$*$ は分割 Δ_{μ_α} に関する数猫演算にはなり得ない。

(II) もし $\alpha \neq 0$ ならば

$$Homeo(\mathbf{R}_+; \mathcal{S}_{neko}(\Delta_{\mu_\alpha})) = Homeo(\mathbf{R}_+; \mathcal{S}_{neko}(\Delta_{\mu_{1/\alpha}}))$$

が成り立つ。

(III) ゼロでない同符号の実数 a, b に対して、

$$\varphi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} x^a & (0 < x \leq 1) \\ x^b & (x \geq 1). \end{cases}$$

と定義するとき、もし $-1 < \alpha < 0$ ならば、

$$\varphi_{[a,b]} \in Homeo(\mathbf{R}_+; \mathcal{S}_{neko}(\Delta_{\mu_\alpha})) \Leftrightarrow \max\{-a/b, -b/a\} < \alpha$$

である。従って主要結果及び (I), (II), (III) から

$$Homeo(\mathbf{R}_+; \mathcal{S}_{neko}(\Delta_{\mu_\alpha})) \begin{cases} = Homeo(\mathbf{R}_+) & \text{if } \alpha \geq 0 \\ \neq \emptyset, Homeo(\mathbf{R}_+) & \text{if} -1 < \alpha < 0 \\ = \emptyset & \text{if } \alpha = -1 \\ = Homeo(\mathbf{R}_+; \mathcal{S}_{neko}(\Delta_{\mu_{1/\alpha}})) & \text{if } \alpha < -1 \end{cases}$$

が成り立ちます。

それ故 $-1 < \alpha < 0$ の場合 $Homeo(\mathbf{R}_+)$ の非自明な部分集合

$$Homeo(\mathbf{R}_+; \mathcal{S}_{neko}(\Delta_{\mu_\alpha}))$$

を決定しなければならないのですが、これは日暮れて道遠しの感があります。

6. 更なる考察

上の定理は正数空間上の簡約的連続半群演算に限りましたが、これは綺麗な結果を得るためで、実はもっと一般の演算についてもある程度結果を得ることが出来ます。今 $*$ を位相空間 X 上の 2 項演算とし、f, g, h を X からそれ自身への連続写像とします。このとき

$$x *_{f,g,h} y = h(f(x) * g(y)) \ (x, y \in X)$$

と定義しますと $*_{f,g,h}$ は X 上の新しい演算となります。僕は $*_{f,id,id}$ を f による $*$ の列変換演算と呼んでいます。また $*_{id,g,id}$ を g による $*$ の行変換演算と呼んでいます。また $*_{id,id,h}$ を h による $*$ の全変換演算と呼んでいます。ここに id は X からそれ自身への恒等写像を表します。

例えば $\mathbf{R}_+$ 上の通常積 $\cdot$ に対して、$\cdot_{id,1/x,id}$ は関数 $x \mapsto 1/x$ による $\cdot$ の行変換演算ですが、これが所謂「右商演算」です。これも簡単な考察で、3 節の例 2 で定義された分割 $\{L_\lambda\}_{\lambda>0}$ に関する $\mathbf{R}_+$ 上の標準的数猫演算となっています。更に一般に $f, g, h \in Homeo(\mathbf{R}_+)$ を考えるとき、それらの方向 (単調増加か単調減少かという意味で) の適当な組み合せで、やはり同じタイプの数猫演算となります。

さて上の考察を I_9 に変換して見ましょう。先ず I_9 を加法群 Z_9 と同一視し、その上の加法群演算 $\cdot$ を考え、その右商演算

$$x * y = x \cdot y^{-1} \ (x, y \in I_9)$$

を考えます。例えば $1 * 2 = 9$, $2 * 1 = 2$, ……です。このとき $*$ の演算表は以下の通りです：

1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	1	2	3	4	5	6	7	8
8	9	1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	1	2	3	4
4	5	6	7	8	9	1	2	3
3	4	5	6	7	8	9	1	2
2	3	4	5	6	7	8	9	1

これは確かに行と列のブロックに関しては 1 から 9 まで埋められていますが、通常の 9 個の 3×3 ブロックについては、どれも 1 から 9 まで埋められていません。つまり重複しています。その意味では通常の数猫演算ではありませんが、しかし見方を変えて、17 本の左下がりの対角線を上手くつないで 9 本の左下がりの対角線と見て、これを $I_9 \times I_9$ の分割と見ると、この積 $\cdot$ に関する右商演算 $*$ は標準的数猫演算となります。

実は加法群演算 $\cdot$ に関する演算表は、

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

ですが、これは右下がり対角線による分割に関する標準的数猫演算となっています。まあ少しは美意識に訴えるものがありそうですね。

所で上の2つの演算表の関係ですが、アナログの場合から推察して、演算 $\cdot$ に関する逆関数：$x \mapsto 1/x$ $(x \in I_9)$ は置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

と読み変えられます。従って第一演算表は第二演算表の置換 σ による「行変換」演算となっています。従って第二演算表を、第1行はそのままにして2行と9行を入れ替え、3行と8行を入れ替え、4行と7行を入れ替え5行と6行を入れ替えたものが第一演算表です。しかし $\sigma^2 = id$ ですから逆も成り立っています。

上の考察は次のような保存問題を示唆します：I_9 の2つの分割 Δ, Δ' に関する標準的数猫演算の集合をそれぞれ $\mathcal{S}_{neko}(I_9; \Delta)$, $\mathcal{S}_{neko}(I_9; \Delta')$ とするとき、どんな変換 T が

$$T(\mathcal{S}_{neko}(I_9; \Delta)) = \mathcal{S}_{neko}(I_9; \Delta')$$

を満たすか？

最後に数猫問題の良問とは何かを考えて見ましょう。

7. Korovkin set

集合 A から他の集合 B への写像の全体を $Map(A, B)$ で表しましょう。次に $K \subseteq A$, $\mathcal{M} \subseteq Map(A, B)$ 及び $f \in \mathcal{M}$ を考えましょう。もし

$$g \in \mathcal{M} : g|_K = f|_K \Rightarrow g = f$$

ならば、K は pair $(\mathcal{M}, f)$ に関する Korovkin set, または単に Korovkin set と言います。もし K が真の Korovkin 部分集合を持たなければ、K は minimal と言います。

数猫問題とは、$A = I_9 \times I_9, B = I_9$, $\mathcal{M}$ を I_9 上の数猫演算全体、$f \in \mathcal{M}$ とするとき、$(\mathcal{M}, f)$ に関する Korovkin set を与えることです。特に minimal Korovkin set を与えることが面白く、良い数猫問題となります。

一般の場合、この Korovkin set 問題はどうなるのでしょうか？特に正数空間上で考えたいのですが、これは難問でしょう。

以上については、もう少し纏まった後、しっかりした証明をつけてどこかに発表するつもりである。

謝辞。This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

References

[1] J. Aczél, Sur les opérations définies pour nombres réels, Bull. Soc. Math. France **76** (1948), 59–64.

[2] J. Aczél, The state of the second part of Hilbert's fifth Problem, Bull. Amer. Math. Soc. **20** (1989), 153–163.

[3] R. Craigen and Z. Páles, The associativity equation revisited, Aequationes Math. **37** (1989), 306–312.

[4] Y. Kobayashi, Y. Nakasuji, S.-E. Takahasi and M. Tsukada, *Continuous semigroup structures on* $\mathbb{R}$*, cancellative semigroups and bands*, Semigroup Forum **90** (2015), 518–531.

[5] 小林ゆう治、塚田 真、金子 博、数猫、数学・ゲーム工房出版 (2018).

[6] 小林ゆう治、塚田 真、金子 博、高橋眞映、はじめての数猫、数学・ゲーム工房出版 (2019).

[7] Y. Nakasuji and S.-E. Takahasi, A reconsideration of Jensen's inequality and its applications, J. Inequal. Appl. **2013**, 2013:408, 11 pp.

[8] S.-E. Takahasi, H. Takagi, T. Miura and H. Oka, *Semigroup operations distributed by the ordinary multiplication or addition on the real numbers*, Publ. Math. Debrecen, **91** (2017), no.3-4, 297-307.

[9] S.-E. Takahasi, T. Miura and H. Oka, *Characterization of distributive semigroup operations on the positive real numbers*, to appear in Semigroup Forum, First Online: 19 February 2019 (https://doi.org/10.1007/s00233-019-10006-3).

[10] H. Oka, T. Miura and S.-E. Takahasi, *Semigroup operations distributed by natural noncancellative semigroup operations on the positive real numbers*, to appear in Semigroup Forum.