2 相熱流の不変等温面と分数冪熱流の不変臨界点

東北大学・大学院情報科学研究科　坂口 茂
Shigeru Sakaguchi
Graduate School of Information Sciences,
Tohoku University

本稿の目的は熱流の対称性優決定問題に関する著者と H. Kang 氏（Inha 大学）との共同研究 [KS2] および著者と N. De Nitti 氏（Friedrich-Alexander 大学）との共同研究 [DS] の一部の概説である。前者においては, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$ の有界開集合 Ω, Ω の特性関数 $\mathcal{X}_\Omega$ と 2 つの相異なる正定数 $\sigma_\pm$ に対して $\sigma(x) = \sigma_+ \mathcal{X}_\Omega(x) + \sigma_-(1 - \mathcal{X}_\Omega(x))$ とおき, 2 相熱方程式 $u_t - \mathrm{div}(\sigma \nabla u) = 0$ の初期値 $\mathcal{X}_\Omega$ に対する Cauchy 問題を考える。$\partial\Omega$ が $C^{2,\alpha}$ 級のとき, もし $\partial\Omega$ が常に等温面ならば Ω は一つの球に限ることを Serrin の平面移動法 [Se] を直接 Ω と $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ に同時に適用して示す。伝送条件が重要な役割を果たす。$\partial\Omega$ が C^6 級のときは, 同じ結論が [CMS] の方法を用いて得られる。なお, [CMS] の方法はまず $\partial\Omega$ の平均曲率が一定であることを示し, Alexandrov の球面定理 [A] を適用するものであった。後者は熱方程式 $u_t - \Delta u = 0$ の解 $u = u(x,t)$ の不変臨界点 p $(\nabla u(p,t) = 0, t > 0)$ と領域の対称性に関する結果 [MS] を部分的に分数冪熱方程式 $u_t + (-\Delta)^s u = 0$ $(0 < s < 1)$ に対して示すものである。もちろん, 熱方程式の場合に使えた全ての手法が非局所方程式である分数冪熱方程式に対して使えるとは限らず, 新たな困難さが伴う。

1　2 相熱流の不変等温面

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$ の $m (\geq 1)$ 個の有界領域 $\{\Omega_j\}$ からなる有界開集合 $\Omega = \bigcup_{j=1}^{m} \Omega_j$ を考える。ある数 $0 < \alpha < 1$ に対して, 各 $\partial\Omega_j$ は $C^{2,\alpha}$ 級であり, $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ とする。伝導係数 $\sigma = \sigma(x)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ を 2 つの相異なる正定数

σ_-, σ_+ を用いて次で定める。

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_+ & \text{if } \ x \in \Omega = \bigcup_{j=1}^{m} \Omega_j, \\ \sigma_- & \text{if } \ x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

このような多相媒質上の拡散問題は既に [CMS, CSU, KS1, Sa1, Sa2, Sa3] で扱われている。関数 $u = u(x,t)$ を次の初期値問題の有界な一意解とする。

$$u_t = \operatorname{div}(\sigma \nabla u) \quad \text{in } \ \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \ \text{ and } \ u = \mathcal{X}_\Omega \ \text{ on } \mathbb{R}^N \times \{0\} \tag{1.2}$$

ここで $\mathcal{X}_\Omega$ は集合 Ω の特性関数である。最大値原理から次が成り立つ。

$$0 < u(x,t) < 1 \ ((x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0, +\infty)) \tag{1.3}$$

関数 $u^\pm = u^\pm(x,t)$ を次で定める。

$$u(x,t) = \begin{cases} u^+(x,t) & \text{if } \ x \in \overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{m} \overline{\Omega}_j, \\ u^-(x,t) & \text{if } \ x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases} \tag{1.4}$$

界面 $\partial\Omega$ 上次の伝送条件が成り立つ。

$$\sigma_+ \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \sigma_- \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \text{ and } u^+ = u^- \text{ on } \partial\Omega \times (0, +\infty) \tag{1.5}$$

ここで, $\nu = \nu(x)$ $(x \in \partial\Omega)$ は $\partial\Omega$ の単位外法線ベクトルである。このとき, 次の定理が成り立つ。

定理 1.1 ([KS2]) もし, ある関数 $a : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ が存在して

$$u(x,t) = a(t) \ ((x,t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty)) \tag{1.6}$$

を満たせば Ω は一つの球に限る。つまり, $m = 1$ かつ $\Omega = \Omega_1$ は球である。

注意 1.2 $\partial\Omega$ が C^6 級のときは, [CMS, Theorem 1.5 とその証明, pp. 335–341] の方法により, 仮定 (1.6) から各 $\partial\Omega_j$ $(j = 1, \dots, m)$ の平均曲率は $a(t), \sigma_+, \sigma_-$ に依存するある一つの定数となることを示すことができる。従って, *Alexandrov* のシャボン玉定理

[A] より, 各 $\partial\Omega_j$ $(j = 1, \dots, m)$ は全て同じ半径の球面となり, さらに, $\partial\Omega$ 上の伝送条件 (1.5) と $\partial\Omega$ 以外での $u(x,t)$ の x に関する実解析性より, $m = 1$ かつ $\partial\Omega$ が一つの球面という結論に達する。[CMS, Theorem 1.5 とその証明, pp. 335–341] の方法は次の段階に分けられる。

(i) *Laplace-Stieltjes* 変換 $v_\lambda(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(x,t)dt$ $(\lambda > 0)$ による楕円型境界値問題への帰着

(ii) $\partial\Omega$ の両側近傍での $\partial\Omega$ への距離関数と仮定 (1.6) を用いた *WKB* 近似解（優解と劣解）の構成（ここで, 距離関数の 6 階微分を用いるために $\partial\Omega$ が C^6 級であるという仮定を必要とする）

(iii) $\lambda \to +\infty$ の挙動と伝送条件 (1.5) からの $\partial\Omega$ の平均曲率一定の結論の導出 (ここで, $\lambda \to +\infty$ の挙動は $t \to +0$ の挙動に相当することに注意する）

(iv) *Alexandrov* のシャボン玉定理 [A] の適用

これに対して, 滑らかさについて $\partial\Omega$ が $C^{2,\alpha}$ 級のみを必要とする [KS2] の方法は次である。

(i) 特に $\lambda = 1$ の場合の *Laplace-Stieltjes* 変換 $v(x) = \int_0^\infty e^{-t} u(x,t)dt$ による楕円型境界値問題への帰着（ここで, 数 1 には特に意味は無い。一つの正定数 λ を考えるので十分という意味である）

(ii) 仮定 (1.6) の下での *Serrin* [Se] の平面移動法の適用（ここで, 界面 $\partial\Omega$ のそれぞれ片側から境界上への v の C^2 級境界正則性を必要とし, これは $\partial\Omega$ が $C^{2,\alpha}$ 級であることで保証される）

2 定理 1.1 の証明の概略

初期値問題 (1.2) の解 u に対して, 関数 $v = v(x)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ を次で定める。

$$v(x) = \int_0^\infty e^{-t} u(x,t)dt$$

仮定 (1.6) に鑑み, 定数 a^* $(0 < a^* < 1)$ を次で定める。

$$a^* = \int_0^\infty e^{-t} a(t) dt$$

関数 $v^\pm = v^\pm(x)$ を次で定める。

$$v(x) = \begin{cases} v^+(x) & \text{if } \ x \in \overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^m \overline{\Omega}_j, \\ v^-(x) & \text{if } \ x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

このとき, 関数 $v^\pm$ は次を満たす。

$$a^* < v^+ < 1 \quad \text{and} \quad -\sigma_+ \Delta v^+ + v^+ = 1 \ \text{ in } \Omega, \tag{2.2}$$

$$0 < v^- < a^* \quad \text{and} \quad -\sigma_- \Delta v^- + v^- = 0 \ \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \tag{2.3}$$

$$v^+ = v^- = a^* \quad \text{and} \quad \sigma_+ \frac{\partial v^+}{\partial \nu} = \sigma_- \frac{\partial v^-}{\partial \nu} \ \text{ on } \partial\Omega, \tag{2.4}$$

$$\lim_{|x| \to \infty} v^-(x) = 0. \tag{2.5}$$

ここで, (2.2) と (2.3) の不等式は最大値の原理から従い, (2.4) は界面 $\partial\Omega$ 上の伝送条件 (1.5) および仮定 (1.6) から従う。また, (2.5) は熱拡散方程式 $u_t = \text{div}(\sigma \nabla u)$ の基本解のガウス評価から得られる。

定理 1.1 の証明は有界開集合 Ω の内部上の関数 v^+ および外部開集合 $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ 上の関数 v^- に同時に Serrin の平面移動法を適用することに尽きる。 内部問題については Serrin [Se] があり, 外部問題については Reichel [R] や Sirakov [Si] があるが, 同時に適用した例はおそらく [KS2] が初めてではないだろうか。なお, 過度境界条件については, Serrin, Reichel, Sirakov は解および解の外法線微分が定数であるというものであったが, [KS2] においては**伝送条件** (2.4) である。詳しい証明は [KS2] を参照してほしい。

3 分数冪熱流の不変臨界点

N. De Nitti 氏（Friedrich-Alexander 大学）との共同研究 [DS] は複数の問題を扱っているが, ここでは有界領域上の初期斉次 Dirichlet 境界値問題に絞って紹介する。分数

冪熱方程式 は $u_t + (-\Delta)^s u = 0$ $(0 < s < 1)$ と書かれる。Garofalo による概説論文 [G] を参照すると

$$(-\Delta)^s f(x) = C_{N,s} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2f(x) - f(x+y) - f(x-y)}{|y|^{N+2s}} dy$$

ここで $C_{N,s}$ は正規化の正定数である。Ω を $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ の $C^{1,1}$ 級有界領域で $0 \in \Omega$ を満たすとする。$u = u(x,t)$ を次の初期斉次 Dirichlet 境界値問題の一意解とする。

$$u_t + (-\Delta)^s u = 0 \quad \text{in} \ \ \Omega \times (0, +\infty), \tag{3.1}$$

$$u = u_0 \quad \text{on} \ \ \Omega \times \{0\}, \tag{3.2}$$

$$u = 0 \quad \text{in} \ \ \left(\mathbb{R}^N \setminus \Omega\right) \times (0, +\infty) \tag{3.3}$$

この問題の適切性については [FR] や [FKV] を参照せよ。ここで, 初期関数 u_0 は特に次の部分空間 $\mathcal{B}$ から選ぶ。

$$\mathcal{B} = \{u_0 \in C_0^\infty(B_\delta(0)) \mid \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \omega u_0(r\omega) d\omega = 0 \ \ \text{for every } 0 < r < \delta\}$$

ただし, $\delta > 0$ は $B_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < \delta\} \subset \Omega$ を満たすとする。$\mathcal{B}$ の積分条件は balance law と呼ばれ [MS] で導入されたもので, 発散定理によればすぐに $\nabla u_0(0) = 0$ となるための十分条件であることがわかる。このとき, 次の定理が成り立つ。

定理 3.1 ([DS, Theorem 3.2]) $\nabla u(0,t) = 0$ $(t > 0, u_0 \in \mathcal{B})$ が成り立つための必要十分条件はある $R > 0$ が存在して $\Omega = B_R(0)$ となることである。

注意 3.2 熱方程式の場合（$s = 1$ に相当）は [MS] の結果の一部である。

4 定理 3.1 の証明の概略

まず, **十分性の証明**を考える。$\Omega = B_R(0)$ とする。初期斉次 Dirichlet 境界値問題 (3.1)–(3.3) の解 u と $\lambda > 0$ に対して, 関数 $w_\lambda = w_\lambda(x)$ を次で定める。

$$w_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(x,t) dt \ (x \in \mathbb{R}^N)$$

w_λ は次を満たす。

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s w_\lambda + \lambda w_\lambda = u_0 &\quad \text{in } \ \Omega, \\ w_\lambda = 0 &\quad \text{in } \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{aligned}$$

$w_\lambda = G_\lambda u_0$ と書こう。G_λ はこの境界値問題の Green 作用素である。一般の有界領域 Ω に対するこの境界値問題の適切性については [FKV], 解の正則性については [RS, BFV] を参照せよ。特に $\lambda = 0$ の場合の球 $\Omega = B_R(0)$ に対する Green 関数は [Bu, Theorem 3.1] を参照して

$$G(x,y) = \kappa(N,s)|x-y|^{2s-N} \int_0^{r_0(x,y)} \frac{t^{s-1}}{(t+1)^{N/2}} dt \tag{4.1}$$

ここで, $\kappa(N,s)$ は N と s にのみ依存する正定数であり,

$$r_0(x,y) = \frac{(R^2 - |x|^2)(R^2 - |y|^2)}{R^2 |x-y|^2}$$

従って, $G(x,y)$ は 3 変数関数 $\hat{G}$ を用いて次の形に表される。

$$G(x,y) = \hat{G}(|x-y|, |x|, |y|) \tag{4.2}$$

特に $w_0(x) = Gu_0(x) = \int_{B_R(0)} G(x,y) u_0(y) dy \ (x \in B_R(0))$ である。2 つの Hilbert 空間 $H^s(\mathbb{R}^N), \tilde{H}^s(\Omega)$ を導入しよう。

$$\mathcal{E}_s[u,v] = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy$$

とおき, 次のように定める。

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) \mid \mathcal{E}_s[u,u] < \infty\}, \ \tilde{H}^s(\Omega) = \{u \in H^s(\mathbb{R}^N) \mid u \equiv 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\}$$

内積 $< u, v >$ とノルム $\|u\|$ は共に次で与えられる。

$$< u, v > = \int_{\mathbb{R}^N} uv \ dx + \mathcal{E}_s[u,v], \ \|u\|^2 = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \mathcal{E}_s[u,u]$$

補題 4.1 ある定数 $C_0 > 0$ が存在して, 任意の $\lambda > 0$ と $u \in \tilde{H}^s(\Omega)$ に対して, $G_\lambda u \in \tilde{H}^s(\Omega)$ となり,

$$\|G_\lambda u\| \le C_0 \|u\|$$

証明は [FKV] および [DS] を参照せよ。

補題 4.2 *balance law* は $G = G_0$ で保存される。つまり, $u \in \tilde{H}^s(\Omega)$ に対して,

$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \omega u(r\omega)d\omega = 0 \ (0 < r < R)$ ならば $\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \omega(Gu)(\rho\omega)d\omega \ (0 < \rho < R)$ が成り立つ。

証明：[J, (1.2), p.8] の積分公式：$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} g(y \cdot x)d\omega_x = |\mathbb{S}^{N-2}| \int_{-1}^{1}(1-\lambda^2)^{\frac{N-3}{2}} g(\lambda|y|)d\lambda$ と (4.2) を用いて, $0 < \rho < R$ に対して, 次が得られることによる。

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \omega(Gu)(\rho\omega)d\omega \\
&= |\mathbb{S}^{N-2}| \int_0^R t^{N-1}dt \int_{-1}^{1}(1-\lambda^2)^{\frac{N-3}{2}} \lambda \hat{G}(\sqrt{\rho^2+t^2-2\rho t\lambda}, \rho, t)d\lambda \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \eta u(t\eta)d\eta \quad \square
\end{aligned}$$

さて, $w_\lambda = G_\lambda u_0$ つまり $(-\Delta)^s w_\lambda + \lambda w_\lambda = u_0$ は $w_\lambda = G_0(u_0 - \lambda w_\lambda)$ と書けるので, $(I + \lambda G_0)w_\lambda = G_0 u_0$ となる。補題 4.1 を用いて, ある定数 $\lambda_0 > 0$ が存在して

$$G_\lambda u_0 = w_\lambda = (I + \lambda G_0)^{-1} G_0 u_0 = \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k G_0^{k+1} u_0 \quad (0 < \lambda \leq \lambda_0)$$

従って, 補題 4.2 が使えて, $G_\lambda u_0 \ (0 < \lambda \leq \lambda_0)$ は全て balance law を満たす。次に $\lambda_0 < \lambda \leq 2\lambda_0$ に対して同じ議論を繰り返すと

$$G_\lambda u_0 = w_\lambda = (I + (\lambda - \lambda_0)G_{\lambda_0})^{-1} G_{\lambda_0} u_0 = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k G_{\lambda_0}^{k+1} u_0 \quad (\lambda_0 < \lambda \leq 2\lambda_0)$$

従って, 補題 4.2 が使えて, $G_\lambda u_0 \ (0 < \lambda \leq 2\lambda_0)$ は全て balance law を満たす。これを繰り返せば, $G_\lambda u_0 \ (0 < \lambda)$ は全て balance law を満たす。つまり,

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \omega w_\lambda(\rho\omega)d\omega = 0 \ (\lambda > 0, 0 < \rho < R)$$

これは, Laplace 変換を通して, 次を導く。

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \omega u(\rho\omega, t)d\omega = 0 \ (t > 0, 0 < \rho < R)$$

故に, 発散定理より $\nabla u(0,t) = 0 \ (t > 0)$ が成り立つ。以上で, 十分性の証明が完成した。

最後に, **必要性の証明**を考えよう。初期斉次 Dirichlet 境界値問題 (3.1)–(3.3) の解 u に対して, 関数 $w = w(x)$ を次で定める。

$$w(x) = \int_0^\infty u(x,t)dt$$

有界領域 Ω の Green 関数 $G = G(x,y)$ を用いて,

$$w(x) = \int_{B_\delta(0)} G(x,y)u_0(y)dy \ (x \in \Omega)$$

従って $\nabla u(0,t) = 0$ $(t > 0)$ は

$$0 = \int_{B_\delta(0)} \nabla_x G(0,y)u_0(y)dy \ (u_0 \in \mathcal{B}) \tag{4.3}$$

任意の関数 $\psi \in C^\infty(\mathbb{S}^{N-1})$ で $\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \omega\psi(\omega)d\omega = 0$ を満たすものを与える。さらに, 任意の関数 $\eta \in C_0^\infty(0,\delta)$ に対して $u_0(x) = \eta(|x|)\psi(\frac{x}{|x|}) \in \mathcal{B}$ を考える。このとき, (4.3) は

$$0 = \int_0^\delta \eta(r)\left(r^{N-1}\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \nabla_x G(0,r\omega)\psi(\omega)d\omega\right)dr$$

従って, η と ψ の任意性より, ある $N \times N$ 行列 $M(r)$ が存在して

$$\nabla_x G(0,r\omega) = M(r)\omega \quad (y = r\omega \in B_\delta(0) \setminus \{0\}) \tag{4.4}$$

Poisson の積分公式（[K, Proposition 2.5], [BBKRSV, (1.65)] ）または [Bl] の結果より, $\nabla_x G(0,y)$ は $y \in \Omega \setminus \{0\}$ について実解析的であり, 境界条件から

$$\nabla_x G(0,y) \equiv 0 \ (y \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \tag{4.5}$$

が成り立つ。**熱方程式の場合（$s = 1$ に相当）は [MS] において, $M(r)$ が具体的に求まるのであるが, $0 < s < 1$ の場合はそのようにできない難しさがある。**

ある $R^* > 0$ とある点 $P \in \partial\Omega$ が存在して, 次が成り立つ。

$$B_{R^*}(0) \subset \Omega \quad \text{and} \quad P^* \in \partial B_{R^*}(0) \cap \partial\Omega$$

背理法を用いて, $B_{R^*}(0) = \Omega$ を示そう。さて, 任意の $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$ に対してただ一つ $R(\omega) > 0$ が存在して, 次が成り立つ。

$$\ell_\omega = \{r\omega \in \mathbb{R}^N \mid 0 \le r < R(\omega)\} \subset \Omega \quad \text{and} \quad R(\omega)\omega \in \partial\Omega$$

ここで, ℓ_ω は線分である。特に $P^* = R^*\omega^*$ ($\omega^* = \frac{P^*}{|P^*|}$) である。また, (4.5) と $\nabla_x G(0, y)$ の実解析性より

$$\nabla_x G(0, R(\omega)\omega) = 0 \ (\omega \in \mathbb{S}^{N-1}), \tag{4.6}$$

$$\nabla_x G(0, r\omega) \text{ は } r \in (0, R(\omega)) \text{ について実解析的である。} \tag{4.7}$$

$B_{R^*}(0) \subsetneq \Omega$ を仮定しよう。このとき, ある球 $B_\varepsilon(Q)$ が存在して

$$\varepsilon > 0,\ \overline{B_\varepsilon}(Q) \subset \Omega \ \text{ and } \ Q \in \partial B_{R^*}(0) \cap \Omega$$

さらに, $\mathbb{R}^N$ の基底 $\{f_1, \ldots, f_N\} \subset \mathbb{S}^{N-1}$ が存在して,

$$(R^* + \frac{\varepsilon}{2})f_i \in \partial B_{R^*+\frac{\varepsilon}{2}}(0) \cap \partial B_\varepsilon(Q) \ (i = 1, \ldots, N)$$

そこで, 任意の $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$ に対して, ただ一組 $(\eta_1, \ldots, \eta_N) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ が存在して $\omega = \sum_{i=1}^N \eta_i f_i \in \mathbb{S}^{N-1}$ このとき, (4.4) より

$$\nabla_x G(0, r\omega) = M(r)\omega = \sum_{i=1}^N \eta_i M(r) f_i = \sum_{i=1}^N \eta_i \nabla_x G(0, r f_i) \ (0 < r < \delta)$$

さらに, (4.7) より,

$$\nabla_x G(0, r\omega) = \sum_{i=1}^N \eta_i \nabla_x G(0, r f_i) \ (0 < r < \min\{R(\omega), R^* + \frac{\varepsilon}{2}\})$$

そこで, $h_i(r) = \nabla_x G(0, r f_i)$ $(i = 1, \ldots, N)$ とおくと, 各 $h_i(r)$ は $r \in (0, R^* + \frac{\varepsilon}{2})$ について実解析的である。C を $B_{R^*}(0)$ を含む $\Omega \cap B_{R^*+\frac{\varepsilon}{2}}(0)$ の連結成分とすると,

$$\nabla_x G(0, r\omega) = \sum_{i=1}^N \eta_i h_i(r) \ (r\omega \in C)$$

従って, $F = \partial\Omega \cap C$ とおくと, (4.6) より

$$\sum_{i=1}^N \eta_i h_i(R(\omega)) = 0 \ (R(\omega)\omega \in F) \tag{4.8}$$

背理法の仮定 $B_{R^*}(0) \subsetneq \Omega$ より, ある $\varepsilon^* > 0$ が存在して, $R(\omega)$ の値域は区間 $(R^*, R^* + \varepsilon^*)$ を含む。従って, $(\eta_1, \ldots, \eta_N) \neq 0$ であること, 各 $h_i(r)$ の実解析性および (4.8) より,

$$\det[h_1(r) \ldots h_N(r)] = 0 \ (0 < r < R^* + \frac{\varepsilon}{2})$$

特に

$$0 = \det[h_1(r)\dots h_N(r)] = \det[M(r)f_1\dots M(r)f_N] = \det M(r)\det[f_1\dots f_N]\ (0<r<\delta)$$

従って $\det[f_1\dots f_N]\neq 0$ より

$$\det M(r) = 0\ (0<r<\delta)$$

これは Green 関数の $r=|y|\to 0^+$ での挙動

$$\nabla_x G(0,y)\sim cr^{-N+2s-1}\omega\ (c\neq 0, y=r\omega, \omega\in\mathbb{S}^{N-1})$$

に矛盾する。

5 今後の課題

課題をいくつか挙げる。

(1) 定理 3.1 は斉次 Dirichlet 条件を扱っているが, 斉次 Neumann 条件の場合にも同様な対称性の定理が成り立つかどうか考察する。斉次 Neumann 条件の場合の適切性は論文 [DRV] で扱われている。

(2) 2 相熱方程式の場合に定理 3.1 に相当する結果を考察する。

(3) 分数冪熱方程式の解の不変等温面について考察する。

6 謝辞

本研究は JSPS 科研費 （基盤研究 (B), 課題番号 18H01126 および 基盤研究 (C), 課題番号 22K03381）の助成を受けたものである。

参考文献

[A] A. D. Alexandrov, Uniqueness theorems for surfaces in the large V, Vestnik Leningrad Univ. **13** (19) (1958), 5–8, English translation: Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **21** (1962), 412–416.

[BFV] B. Barrios, A. Figalli and E. Valdinoci, Bootstrap regularity for integro-differential operators and its application to nonlocal minimal surfaces, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. **XIII** (2014), 609-639.

[Bl] S. Blatt, Analyticity for solution of fractional integro-differential equations, Nonlinear Anal., **224** (2022), 113071.

[BBKRSV] K. Bogdan, T. Byczkowski, T. Kulczycki, M. Ryznar, R. Song, and Z. Vondraček, Potential Analysis of Stable Processes and its Extensions, Lecture Notes in Mathematics 1980, Springer-Verlag, Berlin, 2009. Edited by Piotr Graczyk and Andrzej Stos.

[Bu] C. Bucur, Some observations on the Green function for the ball in the fractional Laplace framework, Comm. Pure Appl. Anal., **15** (2016), 657–699.

[CMS] L. Cavallina, R. Magnanini and S. Sakaguchi, Two-phase heat conductors with a surface of the constant flow property, J. Geom. Anal., **31** (2021), 312–345.

[CSU] L. Cavallina, S. Sakaguchi and S. Udagawa, A characterization of a hyperplane in two-phase heat conductors, arXiv:1910.06757v1, Commun. Anal. Geom., to appear.

[DS] N. De Nitti and S. Sakaguchi, The stationary critical points of the fractional heat flow, arXiv:2212.05383v1, preprint.

[DRV] S. Dipierro, X. Ros-Oton and E. Valdinoci, Nonlocal problems with Neumann boundary conditions, Rev. Mat. Iberoam., **33** (2017), 377–416.

[FKV] M. Felsinger, M. Kassmann and P. Voigt, The Dirichlet problem for nonlocal operators, Math. Z., **279** (2015), 779–809.

[FR] X. Fernández-Real and X. Ros-Oton, Boundary regularity for the fractional heat equation, RACSAM, **110** (2016), 49–64.

[G] N. Garofalo, Fractional thoughts, In New Developments in the Analysis of Nonlocal Operators, Contemp. Math., **723** (2019), 1–135.

[J] F. John, Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004. Reprint of the 1955 original.

[KS1] H. Kang and S. Sakaguchi, Large time behavior of temperature in two-phase heat conductors, J. Differential Equations, **303** (2021), 268–276

[KS2] H. Kang and S. Sakaguchi, A symmetry theorem in two-phase heat conductors, in a special issue entitled "When analysis meets geometry – on the 50th birthday of Serrin's problem", Mathematics in Engineering, **5**(3) (2023), 1–7.

[K] T. Kulczycki, Properties of Green function of symmetric stable processes, Probab. Math. Statist., **17**(2, Acta Univ. Wratislav. No. 2029) (1997), 339–364.

[MS] R. Magnanini and S. Sakaguchi, The spatial critical points not moving along the heat flow, J. Analyse Math., 71 (1997), 237–261.

[RS] X. Ros-Oton and J. Serra, The Dirichlet problem for the fractional Laplacian: regularity up to the boundary, J. Math. Pures Appl., **101** (2014), 275–302.

[R] W. Reichel, Radial symmetry for elliptic boundary-value problems on exterior domains, Arch. Rational Mech Anal., **137** (1997), 381–394.

[Sa1] S. Sakaguchi, Two-phase heat conductors with a stationary isothermic surface, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, **48** (2016), 167–187.

[Sa2] S. Sakaguchi, Two-phase heat conductors with a stationary isothermic surface and their related elliptic overdetermined problems, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B80** (2020), 113–132.

[Sa3] S. Sakaguchi, Some characterizations of parallel hyperplanes in multi-layered heat conductors, J. Math. Pures Appl., **140** (2020), 185–210.

[Si] B. Sirakov, Symmetry for exterior elliptic problems and two conjectures in potential theory, Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. Non Lin., **18** (2001), 135–156.

[Se] J. Serrin, A symmetry problem in potential theory, Arch. Rational Mech Anal., **43** (1971), 304–318.