d-covers of posets of nilpotent subgroups

山口大学・教育学部　飯寄信保
Nobuo Iiyori
Department of Mathematics, Faculty of Education,
Yamaguchi University, Yamaguchi 753-8511, Japan
iiyori@yamaguchi-u.ac.jp

千葉大学・教育学部　澤辺正人
Masato Sawabe
Department of Mathematics, Faculty of Education,
Chiba University, Chiba 263-8522, Japan
sawabe@faculty.chiba-u.jp

この報告は 2022 年 2 月 17 日（木）にオンライン形式で行った講演をおおよそ再現するものである. 講演内容はある種のベキ零部分群族に対して d-cover という概念を導入し, その cover に関するいくつかの考察である. 本研究の詳細については論文 [3] を参照されたい.

1　はじめに

記号の準備などから述べる. G を有限群とし $e \in G$ を単位元とする. $\mathrm{Sgp}(G)$ で G の部分群全体を表す. 要素 $x \in G$ の位数を $o(x) \in \mathbb{N}$ で表す. 最小公倍数 $\mathrm{lcm}\{o(g) \mid g \in G\} \in \mathbb{N}$ を $\exp(G)$ で表し, これを G の指数という. 本講演の主対象は, 自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 次のベキ零部分群からなる族 $\mathcal{N}(G,n)$ である.

$$\mathcal{N}(G,n) = \{H \in \mathrm{Sgp}(G) \mid \text{べき零群 } H \neq \{e\},\ \exp(H)|n\ \} \subsetneqq \mathrm{Sgp}(G)$$

指数 $\exp(H)$ の条件を導入するに至った経緯を述べる. G 上の方程式 $X^n = e$ の解集合 $L_n(G) = \{g \in G \mid g^n = e\} \subsetneqq G$ は有限群論の中で重要な役割を果たす. フロベニウス予想 [5] においてはもちろんのこと, 群指標 [2, Section 9] や群に関する Quiver の表現 [4] などでも扱われている. そこで $L_n(G)$ の部分群版を考えたい. $g \in L_n(G)$ に対して g で生成される巡回群 $H = \langle g \rangle$ の位数 $|H| = o(g)$ は定義から n を割り切る. このとき巡回群の特殊性から $|H|$ は $\exp(H)$ と同一である. 即ち $\exp(H)$ は n を割り切る. そこでこの条件を一般に課し $\mathrm{Sgp}(G,n) = \{H \in \mathrm{Sgp}(G) \mid \exp(H)|n\ \}$ に着目する. より一般に任意の部分群族 $\mathcal{H}(G) \subsetneqq \mathrm{Sgp}(G)$ に対して次を導入する.

$$\mathcal{H}(G,n) = \{H \in \mathcal{H}(G) \mid \exp(H)|n\ \}$$

特に我々が注目している部分群族 $\mathcal{H}(G)$ として次を挙げることが出来る.

$\mathcal{N}_\pi(G) =$（非自明なベキ零 π-部分群全体）$(\pi \subsetneqq \pi(G))$
$\mathcal{S}_p(G) = \mathcal{N}_{\{p\}}(G) =$（非自明な p-部分群全体）$(\pi = \{p\} \subsetneqq \pi(G))$
$\mathcal{N}(G) = \mathcal{N}_{\pi(G)}(G) =$（非自明なベキ零部分群全体）$(\pi = \pi(G))$
$\mathcal{A}b(G) =$（非自明な可換部分群全体）$\subsetneqq \mathcal{N}(G)$

そこで $\mathcal{H} = \mathcal{N}_\pi, \mathcal{S}_p, \mathcal{N}, \mathcal{A}b$ などに対して $\mathcal{H}(G,n)$ を考察する.

2 ホモトピー同値性

d-cover の議論に入る前に関連する複体の間のホモトピー同値性の結果を述べる.

命題 2.1（Proposition 2.4, 2.5 in [3]） G を有限群とする.

1. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{N}(G,n) \simeq \mathcal{N}_{\pi(n)}(G)$ が成り立つ.
2. 任意の $p \in \pi(G)$ と $m,n,d \in \mathbb{N}$ に対して次が成り立つ.

$$\mathcal{A}b(G,p^m) \simeq \mathcal{S}_p(G,p^n) \simeq \mathcal{N}(G,p^d) \simeq \mathcal{S}_p(G)$$

n を素数巾 p^m にすれば (2) より様々な $\mathcal{H}(G,n)$ は Brown 複体 $\mathcal{S}_p(G)$ とホモトピー同値になる. これは将来的に $\mathcal{S}_p(G)$ の可縮性に関する Quillen 予想（cf. [7, page 118]）を考察する際に様々な視点を与えてくれる. また (1) のホモトピー同値性の証明では poset map である包含写像 $\varphi : \mathcal{N}(G,n) \hookrightarrow \mathcal{N}_{\pi(n)}(G)$ を応用する. 即ち任意の $K \in \mathcal{N}_{\pi(n)}(G)$ に対して逆像 $\varphi^{-1}(\mathcal{N}_{\pi(n)}(G)_{\leqq K}) \subseteqq \mathcal{N}(G,n)$ が可縮であることを示し, Quillen のファイバー定理（cf. [7, Theorem 4.2.1]）を用いてホモトピー同値性を導く. (2) の論法も同様である.

3 $\mathcal{N}(G,n)$ の d-cover

任意に $K \in \mathcal{N}(G,n)$ をとる. 定義から $\exp(K)|n$ より任意の $y \in K$ に対して $\pi(o(y)) \subseteqq \pi(n)$ および $\pi(K) \subseteqq \pi(n)$ が成り立つ. 任意に $q \in \pi(K)$ を選び $K_q \in \mathrm{Syl}_q(K)$, $x \in Z(K_q)$, $o(x) = q \in \pi(n)$ をとると K のべき零性から $K \subseteqq C_G(x)$ となる. 即ち $K \in \mathcal{N}(C_G(x),n)$ $(x \in L_q(G)^\sharp, q \in \pi(n))$ である. 以上の議論から次を得る.

$$\mathcal{N}(G,n) = \bigcup_{p\in\pi(n)} \bigcup_{x\in L_p(G)^\sharp} \mathcal{N}(C_G(x),n)$$

これを $\mathcal{N}(G,n)$ の **cover** と呼ぶことにする. 特にある $x_1,\ldots,x_d \in \bigcup_{p\in\pi(n)} L_p(G)^\sharp$ が存在し

$$\mathcal{N}(G,n) = \mathcal{N}(C_G(x_1),n) \cup \mathcal{N}(C_G(x_2),n) \cup \cdots \cup \mathcal{N}(C_G(x_d),n) \tag{3.1}$$

となるとき, これを $\mathcal{N}(G,n)$ の d-**cover** と呼ぶ. $\{\langle y\rangle \mid y \in L_n(G)\} \subseteqq \mathcal{N}(G,n)$ より (3.1) から

$$L_n(G) = L_n(C_G(x_1)) \cup L_n(C_G(x_2)) \cup \cdots \cup L_n(C_G(x_d)) \tag{3.2}$$

が成り立つことにも注意する. ここでは詳細に立ち入らないが, 次のような用語と量を用意しておくことは有効である.

定義 3.1（Definition 3.1 in [3]） $\mathcal{N}(G,n)$ の d-cover (3.1) の記号を用いる.

1. 各 $1 \leqq j \leqq d$ に対して次が成り立つとき d-cover (3.1) を irreducible と呼ぶ.

$$\mathcal{N}(G,n) \neq \bigcup_{\substack{1\leqq i\leqq d\\ i\neq j}} \mathcal{N}(C_G(x_i),n)$$

   一方 irreducible でない d-cover (3.1) を reducible と呼ぶ.
2. d-cover (3.1) を満たす最小の自然数 $d \in \mathbb{N}$ を $\ell_{G,n}$ で表す.

d-cover (3.1) を持つ $\mathcal{N}(G,n)$ の可縮性について次の命題が成り立つ.

命題 3.2（Proposition 3.3 in [3]） $\mathcal{N}(G,n)$ の d-cover (3.1) の下で次が成り立つ.

1. 各 $1 \leqq i \leqq d$ に対して $\mathcal{N}(C_G(x_i),n)$ は可縮である.
2. 部分集合 $\{x_i \mid 1 \leqq i \leqq d\} \subseteqq G$ で生成された G の部分群 $\langle x_i \mid 1 \leqq i \leqq d\rangle$ がベキ零部分群ならば $\mathcal{N}(G,n)$ は可縮である. 特に $x_1, x_2, \ldots, x_d$ が互いに可換ならば $\mathcal{N}(G,n)$ は可縮である.

(1) は poset map $\varphi : \mathcal{N}(C_G(x_i),n) \longrightarrow \mathcal{N}(C_G(x_i),n)$ $(U \mapsto U\langle x_i\rangle)$ が $\mathcal{N}(C_G(x_i),n)$ の錐可縮（cf. [7, Definition 3.3.1]）を引き起こすことを示し, $\mathcal{N}(C_G(x_i),n)$ の可縮性を結論付ける. 一方 (2) は Nerve 定理（cf. page 162 in [7]）を応用して証明される. 部分群複体において Nerve 定理は非常に有効な手段である.

4 $\mathcal{N}(G,n)$ の 1-cover

$\mathcal{N}(G,n)$ の 1-cover (4.1) を考える.

$$\mathcal{N}(G,n) = \mathcal{N}(C_G(s),n) \quad (s \in L_p(G)^\sharp,\ p \in \pi(n)) \tag{4.1}$$

命題 3.2.1 より $\mathcal{N}(G,n)$ は可縮である.

命題 4.1（1-cover の特徴付け; Theorem 4.5 in [3]） 次は同値である.

1. $\mathcal{N}(G,n)$ の 1-cover (4.1) が存在する.
2. G の部分群 $H \leq G$ で $\langle \mathcal{N}(G,n)\rangle \leq H$ かつ $\pi(Z(H)) \cap \pi(n) \neq \emptyset$ なるものが存在する.

実際に (1) を仮定する. $\{Q_1, \ldots, Q_\ell\}$ を $\mathcal{N}(G,n) = \mathcal{N}(C_G(s),n)$ の極大元全体の集合とすると $\langle \mathcal{N}(G,n)\rangle = \langle \mathcal{N}(C_G(s),n)\rangle = \langle Q_1, \ldots, Q_\ell\rangle$ となる. このとき $[Q_i, s] = \{e\}$ $(1 \leqq i \leqq \ell)$ より $Q_i\langle s\rangle \in \mathcal{N}(C_G(s),n)$ となる. ここで Q_i の極大性より $s \in Q_i$ および $s \in \bigcap_{i=1}^{\ell} Z(Q_i) \leqq Z(\langle \mathcal{N}(G,n)\rangle)$ を得る. そこで $H = \langle \mathcal{N}(G,n)\rangle$ とおくと $o(s) = p \in \pi(Z(H)) \cap \pi(n)$ が成り立つ.

逆に (2) を仮定する. 任意に $q \in \pi(Z(H)) \cap \pi(n) \neq \emptyset$ をとると, ある $s \in Z(H)$ が存在し $o(s) = q \in \pi(n)$ となる. このとき $s \in L_q(G)^\sharp$ であり $\langle \mathcal{N}(G,n)\rangle \leq H \leq C_G(s)$ が成り立つ. よって $\mathcal{N}(G,n) = \mathcal{N}(C_G(s),n)$ を得る.

$\mathcal{N}(G,n)$ の 1-cover (4.1) は条件が強いため, 上記のように容易に特徴付けがなされる.

注意 4.2 $\mathcal{N}(G,n)$ の 1-cover (4.1) が存在したとする. $H := \langle \mathcal{N}(C_G(s),n)\rangle = \langle \mathcal{N}(G,n)\rangle \trianglelefteq G$ とおくと $\langle s\rangle \leq H \leq C_G(s)$ となる. 特に $C_p \cong \langle s\rangle \leq Z(H) \trianglelefteq G$ より $\langle s\rangle \leqq O_p(Z(H)) \leq O_p(G)$ である. よって $\mathcal{N}(G,n)$ の 1-cover (4.1) が存在すれば $O_p(G) \neq \{e\}$ が得られる.

5 $\mathcal{N}(G,n)$ の 2-cover

$\mathcal{N}(G,n)$ の 2-cover (5.1) を考える.

$$\mathcal{N}(G,n) = \mathcal{N}(C_G(s),n) \cup \mathcal{N}(C_G(t),n) \quad (s \in L_p(G)^\sharp,\ t \in L_q(G)^\sharp,\ p,q \in \pi(n)) \tag{5.1}$$

命題 3.2.1 より $\mathcal{N}(C_G(x),n)$ $(x = s,t)$ は可縮である. (3.2) より次の関係も重要である.

$$L_n(G) = L_n(C_G(s)) \cup L_n(C_G(t)) \tag{5.2}$$

5.1 $\mathcal{N}(G, p^d)$ の可縮性

定理 5.1（Theorem 5.3 in [3]） $\mathcal{N}(G, n)$ の 2-cover (5.1) が存在したとする．ある素数 $p \in \pi(G)$ と $d \in \mathbb{N}$ に対して $n = p^d$ とする．

1. $[s, t] \neq e$ ならば $p = 2$ かつ $\langle s, t\rangle \cong D_8$ となり $\mathcal{N}(G, 2^d)$ は可縮である．
2. $[s, t] = e$ ならば $\mathcal{N}(G, p^d)$ は可縮である．

(1) における結論「$p = 2$ かつ $\langle s, t\rangle \cong D_8$」は性質 (5.2) のみを用いて導かれる．また $\mathcal{N}(G, 2^d)$ の可縮性は $\langle s, t\rangle \cong D_8$ がべき零群であることから，命題 3.2.2 を用いて導かれる．(2) も同様に $\langle s, t\rangle$ がアーベル群（べき零群）であることから導かれる．命題 2.1 より $\mathcal{N}(G, p^d)$ の可縮性は Brown 複体 $\mathcal{S}_p(G)$ の可縮性でもある．

5.2 シロー部分群

定理 5.2（Theorem 5.4 in [3]） $\mathcal{N}(G, n)$ の既約 2-cover (5.1) が存在したとする．素数 $p \in \pi(G)$ に対して $n = |G|_p$ とする．このとき G の p-ランク $m_p(G)$ は 2 以上である．特に G のシロー p-部分群は非巡回群である．

実際に s と t の位数は共に p である．また (5.1) の既約性から $\langle s\rangle \cap \langle t\rangle = \{e\}$ である．$\mathrm{Syl}_p(G) \subsetneqq \mathcal{N}(G, n)$ より次が成り立つ．

$$\mathrm{Syl}_p(G) = \big(\underbrace{\mathcal{N}(C_G(s), n) \cap \mathrm{Syl}_p(G)}_{\mathcal{D}_s}\big) \cup \big(\underbrace{\mathcal{N}(C_G(t), n) \cap \mathrm{Syl}_p(G)}_{\mathcal{D}_t}\big).$$

再び (5.1) の既約性から $\mathcal{D}_s = \mathrm{Syl}_p(C_G(s))$ および $\mathcal{D}_t = \mathrm{Syl}_p(C_G(t))$ を得る．ここでシロー部分群の個数を数えると次が成り立つ．

$$\begin{aligned} 1 &\equiv |\mathrm{Syl}_p(G)| = |\mathrm{Syl}_p(C_G(s))| + |\mathrm{Syl}_p(C_G(t))| - |\mathrm{Syl}_p(C_G(s)) \cap \mathrm{Syl}_p(C_G(t))| \\ &\equiv 1 + 1 - |\mathrm{Syl}_p(C_G(s)) \cap \mathrm{Syl}_p(C_G(t))| \pmod p. \end{aligned}$$

よって $P \in \mathrm{Syl}_p(C_G(s)) \cap \mathrm{Syl}_p(C_G(t)) \neq \emptyset$ が存在する．このとき P の極大性から $Z(P) \geq \langle s, t\rangle = \langle s\rangle \times \langle t\rangle \cong C_p \times C_p$ が導かれる．

5.3 最大正規 $\{p, q\}$-部分群

定義 5.3（page 218 in [1]） 有限群 G の最大べき零正規部分群をフィッティング部分群といい $F(G)$ で表す．

定理 5.4（Theorem 5.9 in [3]） $\mathcal{N}(G, n)$ の 2-cover (5.1) が存在したとする．このとき $F(G) \cap O_{\{p,q\}}(G) \neq \{e\}$ が成り立つ．

この定理は最小位数の反例を用いて証明される．

5.4 $\mathcal{N}(G, n)$ の $\mathbb{Z}$ 上ホモロジー

定理 5.5（Theorem 5.11 in [3]） $\mathcal{N}(G, n)$ の 2-cover (5.1) が存在したとする．このとき複体 $\mathcal{N}(G, n)$ は連結である．

実際に命題 3.2.1 から $\mathcal{N}(C_G(s),n)$ と $\mathcal{N}(C_G(t),n)$ は可縮よりこれらは共に連結である．よって定理を証明するためには $\mathcal{N}(C_G(s),n)$ と $\mathcal{N}(C_G(t),n)$ が繋がることを示せばよい．この場合繋がらないと仮定して矛盾を導くのである．

次の Mayer-Vietoris 列はよく知られている．

命題 5.6（Mayer-Vietoris 列; cf. Theorem 25.1 in [6]） X を単体複体とする．A と B を X の部分複体で $X = A \cup B$ を満たすものとする．このとき次の完全系列が存在する．

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_n(A\cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(X) \\ \longrightarrow H_{n-1}(A\cap B) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow \{0\} \end{aligned}$$

$\mathcal{N}(G,n)$ の 2-cover (5.1) において $X = \mathcal{N}(G,n)$, $A = \mathcal{N}(C_G(s),n)$, $B = \mathcal{N}(C_G(t),n)$ とおくと $X = A \cup B$ であり, また $A \cap B = \mathcal{N}(C_G(\langle s,t\rangle),n)$ が成り立つ．よって Mayer-Vietoris 列の応用が可能である．ここで A, B は共に可縮であり, また定理 5.5 から X は連結であることから次が成り立つ．

$$\begin{aligned} &H_0(A) = \mathbb{Z},\ H_n(A) = \{0\}\ (n \geqq 1) \\ &H_0(B) = \mathbb{Z},\ H_n(B) = \{0\}\ (n \geqq 1) \\ &H_0(X) = \mathbb{Z} \end{aligned}$$

よって $n \geqq 2$ $(n-1 \geqq 1)$ に対して Mayer-Vietoris 列から次の完全列を得る．

$$\underbrace{H_n(A)}_{\{0\}} \oplus \underbrace{H_n(B)}_{\{0\}} \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(A\cap B) \longrightarrow \underbrace{H_{n-1}(A)}_{\{0\}} \oplus \underbrace{H_{n-1}(B)}_{\{0\}}$$

即ち $H_n(X) \cong H_{n-1}(A\cap B)$ $(n \geqq 2)$ が成り立つ．1 次のホモロジーについては再び Mayer-Vietoris 列から次の完全列を得る．

$$\underbrace{H_1(A)}_{\{0\}} \oplus \underbrace{H_1(B)}_{\{0\}} \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow H_0(A\cap B) \longrightarrow \underbrace{H_0(A)}_{\mathbb{Z}} \oplus \underbrace{H_0(B)}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \underbrace{H_0(X)}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \{0\}$$

ここで一般に環上の有限生成加群 M_i に関する完全列 $\{0\} \longrightarrow M_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n \longrightarrow \{0\}$ に対して $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \mathrm{rank}(M_i) = 0$ が成り立つ．よって上記の状況の下で次が成り立つ．

$$\mathrm{rank}(H_1(X)) - \mathrm{rank}(H_0(A\cap B)) + 2 - 1 = 0.$$

即ち $\mathrm{rank}(H_1(X)) = \mathrm{rank}(H_0(A\cap B)) - 1$ となり $H_1(X) \oplus \mathbb{Z} \cong H_0(A\cap B)$ が導かれる．以上まとめると次の定理を得る．

定理 5.7（Theorem 5.13 in [3]） $\mathcal{N}(G,n)$ の 2-cover (5.1) が存在したとする．このとき次が成り立つ．

1. $H_n(\mathcal{N}(G,n)) \cong H_{n-1}\big(\mathcal{N}(C_G(\langle s,t\rangle),n)\big)$ $(n \geqq 2)$.
2. $H_1(\mathcal{N}(G,n)) \oplus \mathbb{Z} \cong H_0\big(\mathcal{N}(C_G(\langle s,t\rangle),n)\big)$.

参考文献

[1] D. Gorenstein, “Finite Groups”, Chelsea 1980, 2nd edition.

[2] B. Huppert, “Character theory of finite groups”, De Gruyter Expositions in Mathematics, **25**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1998.

[3] N. Iiyori and M. Sawabe, *d*-covers of posets of nilpotent subgroups, preprint.

[4] N. Iiyori and M. Sawabe, Quiver representations of extended subgroup posets of finite groups, to appear in *Hokkaido Math. J.*

[5] N. Iiyori and H. Yamaki, On a conjecture of Frobenius, *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) **25** (1991), 413–416.

[6] J.R. Munkres, "Elements of algebraic topology", Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.

[7] S.D. Smith, "Subgroup complexes", Mathematical Surveys and Monographs, **179**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.