Kono-Yagita の予想たちとその周辺

芝浦工業大学・システム理工学部　亀子　正喜
MASAKI KAMEKO
COLLEGE OF SYSTEMS ENGINEERING AND SCIENCE,
SHIBAURA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

今回の RIMS 研究集会「有限群のコホモロジー論とその周辺」で 2022 年 2 月 18 日に “Kono-Yagita の予想たちとその周辺” という題で話をさせていただきました. 話したかったことの一部しか話せなかったように記憶しております. この機会に講演後の進展も含めて書きます.

1 Introduction

題目にあげた Kono-Yagita の予想たちというのは Kono-Yagita の論文 [3] にある Conjectures 4, 5 のことです. Kono-Yagita の論文は コンパクトリー群の分類空間の Brown-Peterson コホモロジーについてのものですのでまずコンパクトリー群の分類空間のコホモロジー, 次に一般コホモロジーの一種である Brown-Peterson コホモロジーについて簡単に復習します.

有限群は 0 次元リー群ですのでコンパクトリー群の一種です. コンパクトリー群 G に対しては分類空間と呼ばれる位相空間 BG が存在します. 位相空間は局所有限 CW 複体となるものだけを考えていきます. 分類空間の構成方法はいく通りかありますが G が自由に作用する可縮な位相空間 EG を構成してからそれを G の作用で割って得られる位相空間を BG と定義します, この方法で定義すると位相空間としての一意性がありませんがどのような EG を選んでも BG はすべてホモトピー同値になりますので特異コホモロジーや複素コボルディズム理論などの一般コホモロジーなどのホモトピー不変量を考える上では問題にはなりません.

Kono-Yagita の論文では Brown-Peterson コホモロジー $BP^*(X)$ とそれに関連した一般コホモロジーとして $P(n)^*(X)$, $K(n)^*(X)$ が取り扱われています. 一般コホモロジー $h^*(X)$ はコホモロジーの Eilenberg-Steenrod の公理で次元公理 $H^* = H^0$ 以外を満たす関手, として定義できます. この定義から Aiyah-Hirzebruch スペクト

ル系列を用いてコホモロジーと係数 h^* から計算できます. Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列の E_2-項は

$$E_2^{p,q} = H^p(X; h^q)$$

で与えられます. E_2-項は普通の特異コホモロジーです. ですので普通のコホモロジーと幾何学的な意味合いを持つ複素コボルディズム理論や K-理論の関連を与えてくれるのが Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列ということになります. Brown-Peterson コホモロジーは複素コボルディズム理論を素数 p で局所化したものから得られる一般コホモロジーでその係数環は

$$\mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \dots]$$

です. ここで v_i の次数は

$$\deg v_i = 2 - 2p^i$$

となります.

2 Brown-Peterson コホモロジーについての予想

コンパクトリー群の中で連結かつ単連結なものなものを考えると以下の単純リー群の直積とホモトピー同値になります.

$$SU(n), (n \geq 2),\ \ Sp(n)\ (n \geq 2),\ \ Spin(n)\ (n \geq 7),\ \ G_2,\ \ F_4,\ \ E_6,\ \ E_7,\ \ E_8.$$

ここで p を 7 以上の素数とするとこれらの分類空間の $\mathbb{Z}_{(p)}$-係数コホモロジー環は偶数次の生成元から生成される多項式環になります. ですので $BP^*(BG)$ へ収束する Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列の E_2-項も奇数次の生成元を持たないのでその微分はすべてゼロとなり $E_2 = E_\infty$ が成り立ちます. それゆえに

$$BP^*(BG) = BP^*[y_1, \dots, y_n]$$

となりますので何も新しいことは出てきません.

しかし, p を 2, 3, 5 とすると $p = 2$ に対して

$$Spin(n)\ (n \geq 7),\ \ G_2,\ \ F_4,\ \ E_6,\ \ E_7,\ \ E_8,$$

$p = 3$ に対して

$$F_4,\ \ E_6,\ \ E_7,\ \ E_8,$$

$p = 5$ に対して

$$E_8$$

の分類空間の $\mathbb{Z}_{(p)}$-係数コホモロジー環は奇数次の 0 でない元をもち, 多項式環にもなりません. さらに Brown-Peterson コホモロジーへ収束する Atiyah-Hirzebruch

スペクトル系列は自明でなくなります. このような状況下でも以下のような命題を考えることができます.

(1) $BP^*(BG)$ は奇数次の生成元を持たない

(2) $BP^*(BG)$ はねじれ元（torsion）を持たない

(3) $BP^*(BG)$ はべき零元を持たない

(4) $BP^*(BG)$ は有限 BP^*BP-加群として BP^*-flat であり

$$BP^*(BG \times BG') \simeq BP^*(BG) \otimes_{BP^*} BP^*(BG')$$

が成り立つ.

(5) $K(n)^*(BG) = K(n)^* \otimes_{BP^*} (BG)$

(6) $BP^*(BG)$ は G の複素表現の Chern 類の積で生成される

(7) A を G の有限アーベル部分群として A とその間の包含写像のなす圏を考えて得られる準同型

$$BP^*(BG) \to \lim_{\leftarrow} BP^*(BA)$$

は単射

Conjecture 2.1 (Conjecture 4 in [3]) *Conjecture 4* としてすべてのコンパクトリー群に対して上の (1)〜(5), (7) が成り立つ.

$p \geq 7$ で G が単連結であれば 上の (1)〜(5), (7) が成り立ちます. さらに (3) と (7) は同値であること, (3) から (1), (2) が導かれること, (4) から (5) がいえることが Kono-Yagita の論文 [3] で証明されています. また (2), (4), (6) がすべてのコンパクトリー群に対して成り立つであろうという予想は Landweber が述べています.

$$\begin{tikzcd}
(1) & (3) \arrow[l] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl] & (7) & (4) \arrow[r] & (5) \\
(2) & & (6) \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

(1), (4) が正しければ $K(n)^*(BG)$ は 0 でない奇数次の元を持たないということになりますが有限群の場合は $K(n)^{odd}(BG) = \{0\}$ は Hopkins-Kuhn-Ravenel の予想として知られていました. この予想を意識しつつ多くの数学者が $K(n)^*(BG)$ の計算を行なっています. しかし, この予想には反例が構成されています. Kritz ([4]), Kriz-Lee ([5]) は p が奇素数のとき $GL_4(\mathbb{Z}/p)$ の p-Sylow 群 G に対して $K(n)^{odd}(BG) \neq \{0\}$ を示しました. ですので一般には Conjecture 2.1 は成り立ちません. さらに Kriz の反例から (1) も成り立たない可能性が強いと思われるように

なっていると思っていますが私自身は Conjecture 2.1 の (1) が一般の G について成り立つ可能性はあるのではないかと思っています.

サイクル写像の観点から Conjecture 2.1 の (1) についてコメントしておきます. Totaro は複素線形代数群 G に対してその分類空間を複素代数多様体の余極限として捉えて代数多様体に対して定義される Chow 環 CH^*BG を分類空間 BG に対して定義しサイクル写像

$$CH^iBG \to H^{2i}(BG;\mathbb{Z})$$

が複素コボルディズム理論 $MU^{2i}(BG)$ を経由することを示しました. さらに

$$CH^iBG_{(p)} \to BP^*(BG) \otimes_{BP^*} \mathbb{Z}_{(p)}$$

が $BP^{odd}(BG) = \{0\}$ となる複素線形代数群 G に対して成り立つと予想しています. ここで $BP^{odd}(BG) = \{0\}$ となる複素線形代数群 G という条件は上の Kriz の反例を意識したもののようです. しかし Conjecture 2.1 の (1) が成り立つならば $BP^{odd}(BG) = \{0\}$ という条件を取り除くことができます.

Kono-Yagita の論文の $p = 2$ で G が連結リー群の場合の計算結果の一部を記してこの節を終わります.

Theorem 2.2 (Kono-Yagita [3]) $p = 2$,

$$G = G_2, F_4, E_6, \mathrm{Spin}(7), \mathrm{Spin}(8), \mathrm{Spin}(9), \mathrm{Spin}(10)$$

の場合, および

$$G = SO(3), SO(4), PU(4n+2)$$

の場合に *Conjecture 2.1* の (1), (2), (3), (7) が成り立つ.

これ以外にも Kono-Yagita の論文では $p = 3$, $G = F_4$ の場合に Conjecture 2.1 の (1), (2), (3), (4), (5), (7) が成り立つことなども Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列の計算を行うことにより示しています.

3 Milnor 作用素についての予想

Kono-Yagita の論文では Theorem 2.2 の証明のため Atiyah-Hirzeburch スペクトル系列の非自明な微分と Milnor 作用素

$$Q_i \colon H^j(X;\mathbb{Z}/2) \to H^{j+2^{i+1}-1}(X;\mathbb{Z}/2)$$

の関連を用いて Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列を計算しているのですが, その Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列の計算をもとにして Kono-Yagita は以下の予想を述べています. Kono-Yagita は p が奇素数の場合についても同様であると予想していますがここでは $p = 2$ の場合を書いておきます.

Conjecture 3.1 (Conjecture 5, [3]) 連結リー群 G の分類空間 BG の mod 2 コホモロジーの奇数次の 0 でない元 x に対してある自然数 i が存在して $m \geq i$ となるすべての m に対して $Q_m x \neq 0$ が成り立つ.

Conjecture 3.1 についていくつかコメントしておきたいと思います.

Conjecture 3.1 には G は連結リー群であるという条件がついています. これを外して有限群を含むコンパクトリー群としてしまうとすぐに反例が出てきます. $B\mathbb{Z}/2$ の mod 2 コホモロジーは

$$\mathbb{Z}/2[x_1, y_2]/(x_1^2 + y_2) = \mathbb{Z}/2[x_1]$$

なので

$$Q_i x_1 y_2^n = x_1^{2^{i+1}} y_2^n = y_2^{n+2^i} \neq 0$$

が成り立ちます. しかし $B\mathbb{Z}/4$ の mod 2 コホモロジーは

$$\mathbb{Z}/2[x_1, y_2]/(x_1^2)$$

なので

$$Q_i x_1 = x_1^{2^{i+1}} = 0$$

がすべての $i \geq 1$ について成り立ちます. ですので有限群 $\mathbb{Z}/4$ の場合には Conjecture 3.1 は成り立ちません. ここで $\mathbb{Z}/4$ に対しては x_1 がべき零であることから Conjecture 3.1 が成り立たないと説明することができます.

さらに位数 8 の二面体群 D_8 と四元数群 Q_8 を考えてみます. BQ_8 の mod 2 コホモロジー環は

$$\mathbb{Z}/2[x_1, y_1, u_8]/(x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2, x_1^2 y_1 + x_1 y_1^2)$$

で BD_8 の mod 2 コホモロジー環は

$$\mathbb{Z}/2[x_1, y_1, u_4]/(x_1 y_1)$$

となります. BQ_8 で Conjecture 3.1 は成り立ちませんが BD_8 で Conjecture 3.1 は成り立ちます. ここで BQ_8 で Conjecture 5 が成り立たない理由について考えてみると x_1 がベキ零であることから Conjecture 3.1 が成り立たないということが言えます. また BD_8 に対して Conjecture 3.1 が成り立つ理由としてはベキ零がないので誘導準同型

$$H^*(BD_8; \mathbb{Z}/2) \to H^*(B(\mathbb{Z}/2)^2; \mathbb{Z}/2)$$

が単射であるから Conjecture 3.1 が成り立つと説明することができます.

A を G の基本アーベル 2-部分群として誘導準同型

$$H^*(BG; \mathbb{Z}/2) \to \varprojlim H^*(BA; \mathbb{Z}/2)$$

を考えると Quillen の定理からこの準同型の核はべき零根基になります．また $H^*(BA;\mathbb{Z}/2)$ では Conjecture 3.1 が成り立っているので $H^*(BG;\mathbb{Z}/2)$ がベキ零元を持たなければ Conjecture 3.1 は成り立ちます．ですのでもしも Conjecture 5 の反例が見つかるのであれば BG の mod 2 コホモロジー環はべき零元を持たねばなりません．

Kono-Yagita の論文では Adams の予想として p が奇素数の時に連結リー群 G に対し

$$H^*(BG;\mathbb{Z}/p) \to \lim_{\leftarrow} H^*(BA;\mathbb{Z}/p)$$

が単射が成り立つという予想があげてあります．この予想では p を奇素数としていますが，これは $p=2$ の場合には上の誘導準同型は単射にならないことがわかっているからです．Kono-Yagita の論文ではこの例として $G = \mathrm{Spin}(11)$, E_7 をあげています．しかしながら Kono-Yagita の Conjecture 5 自体は $p=2$ の場合を除外していません．

$p=2$ のとき, Conjecture 3.1 について考える時にはコホモロジー環がべき零元を持つような分類空間を考える必要がありますがそのような例は単連結な単純リー群では $\mathrm{Spin}(n)$, $n>8$ かつ $n \equiv 3,4,5 \mod 8$ と E_7 しか知られていません．これら以外の単純リー群の分類空間の mod 2 コホモロジーは BE_8 の物を除いてベキ零元を持ちません．また BE_8 の mod 2 コホモロジーは未解決問題です．単連結でない連結リー群で $\mathbb{Z}/4$ と似た Conjecture 3.1 の反例を探そうとしても適当なものが見当たりません．$SU(n)$ の中心は $\mathbb{Z}/n$ なので $SU(4)/(\mathbb{Z}/4)$ が候補として挙げられそうですがこれでは反例になりません．$SU(8)/(\mathbb{Z}/8)$ が候補になりますがこのリー群の分類空間のコホモロジーの計算はかなり複雑で私の知る限り文献にはこの計算結果はありません．BE_7 のコホモロジーの計算と同じ程度に複雑です．

4 ある連結リー群について

前節で Conjecture 3.1 を考えるときにはベキ零元を取り扱う必要があることを確認しました．連結リー群 G の分類空間でその mod 2 コホモロジーがべき零元を持つものとして $G = \mathrm{Spin}(11)$, E_7 が知られています．しかし，これらの mod 2 コホモロジーは複雑で取り扱いにくいので, Kono-Yagita の論文ではこれらの分類空間の Brown-Peterson コホモロジーは計算されていません．より簡単な mod 2 コホモロジーをもつ分類空間があればその mod 2 コホモロジーや Brown-Peterson コホモロジーの計算を通して Conjecture 3.1 や Conjecture 2.1 についてのより深い洞察が得られます．そのような連結リー群の候補として次の連結リー群 G を考えました．

$SU(n)$ の中心は 1 の n 乗根のスカラー行列を生成元とする位数 n の巡回群です. ですので $SU(2)$ の中心は $\{\pm 1\}$ です. ここで $\{(-1,-1,1),(-1,1,-1)\}$ で生成される $SU(2)^3$ の部分群を Γ とします. そして商群

$$G = SU(2)^3/\Gamma.$$

を考えます. この群の分類空間の mod 2 コホモロジーは容易に計算でき, この mod 2 コホモロジーはベキ零元をもつというのが論文 [1] の第一の主張です.

Theorem 4.1 上の BG の *mod* 2 コホモロジーは

$$\mathbb{Z}/2[w_2', w_2'', w_3', w_3'', u_{16}]/(f_5, f_9)$$

でそのベキ零根基は g_7, g_8 で生成される. ただし

$$\begin{aligned} f_5 &= w_2' w_3'' + w_2'' w_3', \\ f_9 &= w_3'^2 w_3'' + w_3''^2 w_3', \\ g_7 &= w_2' w_2'' (w_3' + w_3''), \\ g_8 &= w_3' w_3'' (w_2' + w_2'') \end{aligned}$$

である.

分類空間のコホモロジーの計算そのものは $B\mathrm{Spin}(n)$ の計算の簡単な場合と同じでファイバー系列

$$B\mathbb{Z}/2 \to BG \to BSO(3)^3$$

に随伴する Leray-Serre スペクトル系列の簡単な計算問題です.

$B\mathrm{Spin}(11)$ や BE_7 の mod 2 コホモロジーでは複雑すぎて見えないものがこの例では見えてきます. mod 2 コホモロジーだけではなく Brown-Peterson コホモロジーへ収束する Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列の計算もそれほど難しくはありません. 実際に Conjecture 2.1 の (1) が成り立つことを Atiyah-HIrzebruch スペクトル系列の直接計算で確認することは容易です. しかしながら Morava K-理論の計算は高次の非自明な微分の計算が難しいので $K(2)^*(BG)$ ですらかなり難しくなります. まだ論文を書き上げていませんのでここでは結果だけ記しておきます.

Theorem 4.2 上の連結リー群 G の分類空間 BG に対して以下が成り立つ.

(1) $BP^{odd}(BG) = \{0\}$,

(2) $K(1)^{odd}(BG) = K(2)^{odd}(BG) = \{0\}$,

(3) $K(3)^{odd}(BG) \neq \{0\}$.

ですのでこの分類空間 BG は Morava K-理論が奇数次の 0 でない元を持つ場合でも Brown-Peterson コホモロジーが奇数次の 0 でない元を持たない例になります.

また, この分類空間 BG は Conjecture 3.1 の反例も与えてくれます. 以下が [2] の結果です.

Theorem 4.3 上の連結リー群 G の分類空間 BG の mod 2 コホモロジーの次数 13 の元 x_{13} を

$$x_{13} = (Q_1 w_2) w_2''^2 (w_2'^2 + w_2''^2)$$

で定義する. このときすべての $m \geq 1$ に対して

$$Q_m x_{13} = 0$$

が成り立つ.

謝辞：本研究は JSPS 科研費 17K05263 の助成を受けたものです.

References

[1] Masaki Kameko, *Nilpotent elements in the cohomology of the classifying space of a connected Lie group*, to appear in Journal of Topology and Analysis, posted on 2019, DOI 10.48550/arXiv.1906.04499.

[2] ———, *Milnor operations and classifying spaces*, preprint, posted on 2022, DOI 10.48550/arXiv.2210.03284.

[3] Akira Kono and Nobuaki Yagita, *Brown-Peterson and ordinary cohomology theories of classifying spaces for compact Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **339** (1993), no. 2, 781–798, DOI 10.2307/2154298.

[4] Igor Kriz, *Morava K-theory of classifying spaces: some calculations*, Topology **36** (1997), no. 6, 1247–1273, DOI 10.1016/S0040-9383(96)00049-3.

[5] Igor Kriz and Kevin P. Lee, *Odd-degree elements in the Morava $K(n)$ cohomology of finite groups*, Topology Appl. **103** (2000), no. 3, 229–241, DOI 10.1016/S0166-8641(99)00031-0.

[6] Burt Totaro, *Torsion algebraic cycles and complex cobordism*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 2, 467–493, DOI 10.1090/S0894-0347-97-00232-4.

[7] ———, *The Chow ring of a classifying space*, Algebraic K-theory (Seattle, WA, 1997), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 249–281, DOI 10.1090/pspum/067/1743244.