Crossed Burnside rings and cohomological Mackey 2-motives

近畿大学・理工学部理学科数学コース　小田 文仁
Fumihito Oda
Department of Mathematics,
Kindai University

概要

Balmer と Dell'Ambrogio は $\Bbbk$ 線型 Mackey 2-motives の双圏から $\Bbbk$ 線型 cohomological Mackey 2-motives の双圏への擬関手 $\mathcal{P}$ を導入した．ただし，$\Bbbk$ は任意の可換環とする．彼らは有限群 G の $\Bbbk$ 上の斜バーンサイド環から群環 $\Bbbk G$ の中心 $Z\Bbbk G$ への環準同型写像を用いて，$\mathcal{P}$ が一般の Mackey 2-motives を cohomological Mackey 2-motives にうつすことを証明した ([BD21, Theorem 5.3])．我々は cohomological Mackey 2-motives のモチーフ的分解の振る舞いを Mackey 2-motives のモチーフ的分解の擬関手 $\mathcal{P}$ による像として研究する．

謝辞 研究代表者の飛田明彦さんを始め，関係者のみなさまには大変お世話になりました．この場をかりて御礼申し上げます．

本稿は，吉田知行氏，竹ヶ原裕元氏との共同研究 [OTY] に基づく報告である．

G は有限群，$\Bbbk$ は可換環とする．Mackey 2-functors と Mackey 2-motives の Balmer-Dell'Ambrogio 理論 ([BD20]) は，非常に多くの研究分野に応用可能である．その理論は以下に示す多くの圏のアーベル圏としての分解が Mackey 2-motives に制御されていることを示している：

- 表現論における $\Bbbk$ 上の G の群環 $\Bbbk G$ に対する $\Bbbk G$-加群の圏 $\mathcal{M}(G) = \Bbbk G\text{-}\mathbf{mod}$.
- 表現論における $\Bbbk G$-**mod** の導来圏 $\mathcal{M}(G) = \mathrm{D}(\Bbbk G)$.
- 同変ホモトピー論における G-spectra のホモトピー圏 $\mathcal{M}(G) = \mathrm{SH}(G)$.
- 非可換幾何における G-C^*-代数の Kasparov 圏 $\mathcal{M}(G) = \mathrm{KK}(G)$.

上述のさまざまなアーベル圏を統一的に分解するために，Balmer と Dell'Ambrogio は Mackey 2-motives の概念 - それは Grothendieck による代数幾何学における pure motives の plain 1-圏のアイデアに触発された- に到達した．彼らは $\mathcal{M}(G)$ たちの分解を制御する仕組みの解決策をモチーフ的分解とよばれるある圏における対象間の同値

$$G \simeq (G, e_1) \oplus (G, e_2) \oplus \cdots \oplus (G, e_n), \tag{0.1}$$

ただし，e_i は $\Bbbk$-線型 Mackey 2-motives の双圏 $\Bbbk\widehat{\mathsf{Span}}(G, G)$ ([BD20, Definition 7.1.7]) の単位 1-cell $\mathrm{Id}_G : G \to G$ の自己同型環 $\mathrm{End}_{\Bbbk\widehat{\mathsf{Span}}(G,G)}(\mathrm{Id}_G)$ のべき等元，に見出した．そして，環 $\mathrm{End}_{\Bbbk\widehat{\mathsf{Span}}(G,G)}(\mathrm{Id}_G)$ が Yoshida により導入された斜バーンサイド環 $\mathrm{B}^{\mathrm{c}}_{\Bbbk}(G)$ ([Yo97]) と同型であることを証明した ([BD20, Theorem 7.4.5])．さらに，彼らは [BD21] で cohomological Mackey 2-functors と cohomological Mackey 2-motives の理論を紹介した．通常 Mackey 2-motive と cohomological Mackey 2-motive の関係を詳細に解析するために，彼らは [BD21] で 通常 Mackey 2-motive を cohomological Mackey 2-motive にうつす擬関手 $\mathcal{P}$ を導入した．対象間の同値 (0.1) に Mackey 2-functor $\mathcal{M}$ を施すことによりアーベル圏の分解

$$\mathcal{M}(G) \simeq \mathcal{M}(G, e_1) \oplus \cdots \mathcal{M}(G, e_n)$$

を得ることが [BD20] の 1 つの主目的であった．[BD21] では対象間の同値 (0.1) に擬関手 $\mathcal{P}$ を施すことにより，cohomological Mackey 2-motives のモチーフ的分解

$$G \simeq (G, \rho_G(e_1)) \oplus \cdots \oplus (G, \rho_G(e_n))$$

が得られることを示した．ただし，いくつかの $\rho_G(e_i)$ たちは 0 となる場合もあるという主張である．そこで，以下のような自然な問いが浮かぶ．

問． $\rho_G(e_i) = 0$ **となる原始べき等元** $e_i \in \mathrm{B}^{\mathrm{c}}_{\Bbbk}(G)$ **を特徴付けよ．**

この報告の主目的は，ある特定の環 $\Bbbk$ に対する [BD21, Theorem 5.3] の精密化 (Theorems 3.2, 3.4, 3.5) を与えることである．次の目的は，$\mathbb{Z}$ 上の G の斜バーンサイド環の原始べき等元を決定することである (Theorem 1.2)．完備離散付値環 $\mathcal{O}$ 上の斜バーンサイド環 $B^{\mathrm{c}}_{\mathcal{O}}(G)$ のすべての原始べき等元の振る舞いを調べるために，我々は Bouc が構築した Green functor 理論を $B^{\mathrm{c}}_{\mathcal{O}}(G)$ の分解を与えるため応用する (Proposition 2.5)．

この報告の構成は以下の通り：Section 1 では，斜バーンサイド環の定義と基本的性質を復習する．Section 2 は Bouc による Green functor 理論をまとめる．本質的には [Bo03b] で論じられたことではあるが，応用として $B^{\mathrm{c}}_{\mathcal{O}}(G)$ の分解を与える．Section 3 では，Mackey 2-motives のモチーフ的分解の擬関手 $\mathcal{P}$ による像として，cohomological Mackey 2-motives のモチーフ的分解の振る舞いを記述する．特に，斜バーンサイド環のどの原始べき等元が，Balmer と Dell'Ambrogio が導入した ρ_G ([BD21, Theorem 5.3]) の核に含まれるかを判定するための条件を与える．

本稿では，G は単位元 ϵ をもつ有限群，$\Bbbk$ は単位元をもつ可換環としての記号として固定する．

1 斜バーンサイド環

G の $\Bbbk$ 上の斜バーンサイド環を思い出す ([Bo03b], [OY01], [Yo97])．共役の作用で G 集合とみなした集合 G を G^{c} とかく．**斜 G 集合の圏 (category of crossed G-sets)** は G 集合 G^{c} 上の G 集合の圏である：斜 G 集合とは対 (X,α)，ただし，X は G 集合，$\alpha : X \to G^{\mathrm{c}}$ は G 写像であり，斜 G 集合 (X,α) から (Y,β) への射は，G 写像 $f : X \to Y$ であり $\beta \circ f = \alpha$ を満たすものとする．**斜バーンサイド群 (crossed Burnside group)** $B^{\mathrm{c}}(G)$ は 斜 G 集合の圏の非交和に関する Grothendieck 群である．$[X,\alpha]$ で斜 G 集合 (X,α) の同型類とする．(X,α) と (Y,β) をふたつの斜 G 集合とすると，斜 G 集合の積は，$(X \times Y, \alpha.\beta)$ で定まる斜 G 集合である．ただし， $X \times Y$ は対角作用で定まる G 集合，$\alpha.\beta$ は $(\alpha.\beta)(x,y) = \alpha(x)\beta(y)$ で定まる G 写像 $X \times Y \to G^{\mathrm{c}}$ とする．この斜 G 集合の積は非交和と可換であり，従って，$B^{\mathrm{c}}(G)$ に積を定める．$B^{\mathrm{c}}(G)$ は環の構造を持ち，我々はそれを G の **斜バーンサイド環 (crossed Burnside ring)** と呼ぶ．この環の単位元は $[\bullet, u_\bullet]$，ただし， $\bullet$ は 1 点 G 集合， $u_\bullet$ は $\bullet$ の元を G の単位元にうつす G 写像である．斜 G 集合 $(G/H, m_a)$，ただし，$H \le G$，$m_a : G/H \to G^{\mathrm{c}}$ は $m_a(gH) = {}^g a := gag^{-1}$ $(a \in C_G(H))$，と同型である斜 G 集合は，推移的斜 G 集合と呼ばれる．$\mathcal{P}_G$ は対 (H,a) $(H \le G,\ a \in C_G(H))$ 全体のなす集合とする．群 G は 共役により $\mathcal{P}_G$ に作用し，その G 軌道の完全代表系を $[\mathcal{P}_G]$ と書く．$(H,a) \in \mathcal{P}_G$ に対して，斜 G 集合 $(G/H, m_a)$ の同型類を $[H,a]_G$ または $[(G/H)_a]$ で表す．集合 $\{[H,a]_G \mid (H,a) \in [\mathcal{P}_G]\}$ は $\mathrm{B}^{\mathrm{c}}_{\Bbbk}(G)$ の $\Bbbk$ 基底をなすことが知られている ([OY01, (3.1.c)], [Bo03b, Corollary 2.2.3])．斜バーンサイド環 $\mathrm{B}^{\mathrm{c}}_{\Bbbk}(G)$ はバーンサイド環 $B_{\Bbbk}(G)$ を部分環にもつ (see Lemma (1.1))．係数環が $\Bbbk = \mathbb{Z}$ のとき $B(G)$ (or $B^{\mathrm{c}}(G)$) と書く．

1.1 Some maps between $B(G)$ and $B^{\mathrm{c}}(G)$

環準同型写像 $\alpha^{\Bbbk}_G : \mathrm{B}^{\mathrm{c}}_{\Bbbk}(G) \to B_{\Bbbk}(G)$ を

$$[(G/U)_t] \to [G/U]$$

で，$\iota^{\Bbbk}_G : B_{\Bbbk}(G) \to \mathrm{B}^{\mathrm{c}}_{\Bbbk}(G)$ を

$$[G/U] \mapsto [(G/U)_\epsilon].$$

によりそれぞれ定める．$\alpha^{\Bbbk}_G \circ \iota^{\Bbbk}_G = \mathrm{id}_{B_{\Bbbk}(G)}$ が成り立つので，バーンサイド環 $B(G)$ は $\mathrm{Im}\iota^{\Bbbk}_G$ と同一視できる．

$$\widetilde{B}_{\Bbbk}(G) := \prod_{H \in \mathrm{C}(G)} \Bbbk$$

とする．

$$[G/U] \mapsto (\phi^{\Bbbk}_H(G/U))_{H \in \mathrm{C}(G)},$$

ただし，$\phi^{\Bbbk}_H([G/U]) = \mathrm{inv}_H((G/U)) = \{gU \in G/U \mid H \le {}^g U\}$，で与えられる単射環準同形写像 $\phi^{\Bbbk} : B_{\Bbbk}(G) \to \widetilde{B}_{\Bbbk}(G)$ が存在する．部分群 $H \le G$ に対して

$$\sum \ell_s s \mapsto \sum \ell_s$$

で与えられる環準同型写像 $\varepsilon_H^{\Bbbk}:\Bbbk C_G(H)\to\Bbbk$ は $\Bbbk$ 上の群代数 $\Bbbk C_G(H)$ の **augmentation map** と呼ばれる ([MS02, Definition 3.2.9]). $\Bbbk C_G(H)$ の中心たちの直積環 $\prod_{H\le G} Z\Bbbk C_G(H)$ の G 固定点のなす部分環を

$$\widetilde{B}_{\Bbbk}^{\mathrm{c}}(G)=\left(\prod_{H\le G} Z\Bbbk C_G(H)\right)^G$$

で表す．環準同型写像 $\tilde{\alpha}_G^{\Bbbk}:\widetilde{B}_{\Bbbk}^{\mathrm{c}}(G)\to\widetilde{B}_{\Bbbk}(G)$ を

$$(x_H)_{H\le G}\mapsto(\varepsilon_H^{\Bbbk}(x_H))_{H\in\mathrm{C}(G)}$$

で，$\tilde{\iota}_G^{\Bbbk}:\widetilde{B}_{\Bbbk}(G)\to\widetilde{B}_{\Bbbk}^{\mathrm{c}}(G)$ を

$$(y_H)_{H\in\mathrm{C}(G)}\mapsto(\widetilde{y}_H)_{H\le G},$$

ただし，$K\le G$ が H の G における共役と同型であるとき $\tilde{y}_H=y_K$ とする，でそれぞれ定める．明らかに，$\tilde{\alpha}_G^{\Bbbk}\circ\tilde{\iota}_G^{\Bbbk}=\mathrm{id}_{\widetilde{B}_{\Bbbk}(G)}$ が成り立つ．部分群 $H\le G$ に対して，

$$\varphi_H^{\Bbbk}([D,s])=\sum_{gD\in(G/D)^H}{}^g s=\sum_{t\in G}\sharp\{gD\in(G/D)^H\mid {}^g s=t\}\cdot t$$

を線型に拡張して定義される環準同型写像 $\varphi_H^{\Bbbk}:\mathrm{B}_{\Bbbk}^{\mathrm{c}}(G)\to\widetilde{B}_{\Bbbk}^{\mathrm{c}}(G)$ が存在する．*Burnside homomorphism* は

$$\varphi^{\Bbbk}=(\varphi_H^{\Bbbk})_{H\in\mathrm{C}(G)}:\mathrm{B}_{\Bbbk}^{\mathrm{c}}(G)\to\widetilde{B}_{\Bbbk}^{\mathrm{c}}(G)$$

として与えられる．簡単のため，$\Bbbk=\mathbb{Z}$ のとき，しばしば φ, ϕ, α_G, ι_G などと $\mathbb{Z}$ を省略して書く． 次の補題を準備する．

Lemma 1.1. (i) *The diagrams*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}_{\Bbbk}^{\mathrm{c}}(G) \arrow[r, "\varphi^{\Bbbk}"] \arrow[d, "\alpha_G^{\Bbbk}"'] & \widetilde{B}_{\Bbbk}^{\mathrm{c}}(G) \arrow[d, "\tilde{\alpha}_G^{\Bbbk}"] \\
B_{\Bbbk}(G) \arrow[r, "\phi^{\Bbbk}"'] & \widetilde{B}_{\Bbbk}(G)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{B}_{\Bbbk}^{\mathrm{c}}(G) \arrow[r, "\varphi^{\Bbbk}"] & \widetilde{B}_{\Bbbk}^{\mathrm{c}}(G) \\
B_{\Bbbk}(G) \arrow[r, "\phi^{\Bbbk}"'] \arrow[u, "\iota_G^{\Bbbk}"] & \widetilde{B}_{\Bbbk}(G) \arrow[u, "\tilde{\iota}_G^{\Bbbk}"']
\end{tikzcd}
\tag{1.1}$$

are commutative.

(ii) *Let $x\in B^{\mathrm{c}}(G)$. If $\varphi^{\Bbbk}(x)=\tilde{\iota}_G^{\Bbbk}(y)$ for some $y\in\widetilde{B}_{\Bbbk}(G)$, then $\iota_G^{\Bbbk}\circ\alpha_G^{\Bbbk}(x)=x$.*

Proof. (i) は明らか．(ii) を示す．$\tilde{\alpha}_G^{\Bbbk}\circ\tilde{\iota}_G^{\Bbbk}=\mathrm{id}_{\widetilde{B}_{\Bbbk}(G)}$ が成り立つので，(i) より，以下が従う：

$$\varphi^{\Bbbk}\circ\iota_G^{\Bbbk}\circ\alpha_G^{\Bbbk}(x)=\tilde{\iota}_G^{\Bbbk}\circ\phi^{\Bbbk}\circ\alpha_G^{\Bbbk}(x)=\tilde{\iota}_G^{\Bbbk}\circ\tilde{\alpha}_G^{\Bbbk}\circ\varphi^{\Bbbk}(x)=\tilde{\iota}_G^{\Bbbk}\circ\tilde{\alpha}_G^{\Bbbk}\circ\tilde{\iota}_G^{\Bbbk}(y)=\tilde{\iota}_G^{\Bbbk}(y)=\varphi^{\Bbbk}(x).$$

従って $\iota_G^{\Bbbk}\circ\alpha_G^{\Bbbk}(x)=x$ が得られる． □

1.2 Primitive idempotents

斜バーンサイド環の原始べき等元は Bouc ([Bo03b]) または [OY01] で得られている．$\mathbb{Q}$ 上のバーンサイド環 $B_{\mathbb{Q}}(G)$ の原始べき等元公式は，Gluck ([Gl81]) と Yoshida ([Yo83]) により独立に与えられた．$B_{\mathbb{Q}}(G)$ の原始べき等元は，G の部分群の共役類により index 付けされている．部分群 H で index 付けされた原始べき等元を $e_H^G\in B_{\mathbb{Q}}(G)$ と書く．バーンサイド環 $B(G)$ の原始べき等元は Dress の定理 ([Dr69], or [Bo00, Corollary 3.3.6]) による．G の部分群 H は，その交換子部分群 $[H,H]$ が H と等しいとき，完全部分群と呼ばれる．$\mathrm{C}^{\infty}(G)$ で G の完全部分群からなる共役類の 1 つの完全代表系を表す．部分群 $H\le G$ は $K\le G$ と G 共役であるとき，$H=_G K$ と書く．部分群 $H\le G$ に対して，剰余群が可解群となる H の最小の正規部分群を H^{∞} と書く．集合

$$\{f_J^G:=\sum_{H^{\infty}=_G J,\,H\in\mathrm{C}(G)}e_H^G\ \mid\ J\in\mathrm{C}^{\infty}(G)\}$$

は $B(G)$ のすべての原始べき等元の集合である ([Be91, Corollary 5.4.8 (Dress)]). 環準同型写像 $\iota_G : B(G) \to B^c(G)$ は，$B^c(G)$ の単位元の直交べき等元たち $\iota_G(f_J^G)$ $(J \in \mathrm{C}^\infty(G))$ の和への分解を与える．我々はべき等元たち $\iota_G(f_J^G)'s$ が実はすべての $B^c(G)$ の原始べき等元であることを証明する．

次の定理は本稿の主定理のひとつであり，Theorem 3.2 の証明に応用される．

Theorem 1.2. *The set of elements $\iota_G(f_J^G)$, for $J \in \mathrm{C}^{(\infty)}(G)$, is the set of primitive idempotents of $B^c(G)$.*

Proof. $B^c(G)$ の任意のべき等元を x とする． [MS02, Corollary 7.2.4] により，$\mathbb{Z}C_G(H)$ $(H \leq G)$ は，自明なべき等元のみをもつので，ある $y \in \widetilde{\Omega}(G)$ に対して $\phi(x) = \tilde{\iota}_G(y)$ と書ける．この事実と Lemma 1.1 (ii) により $\iota_G \circ \alpha_G(x) = x$ が得られる．この事実により，我々は x と $\alpha_G(x) \in B(G)$ を同一視してよい．写像 $\alpha_G : B^c(G) \to B(G)$ は環準同型写像であるから，$\alpha_G(x)$ は $B(G)$ のべき等元であることが従う．従って，$B^c(G)$ のすべてのべき等元は $B(G)$ のすべてのべき等元である． □

Theorem 1.2 より，$J \in \mathrm{C}^\infty(G)$ でインデックス付けされた $B^c(G)$ の原始べき等元を $\overline{f}_J^G$ と表してよい．$\Bbbk = \mathbb{Q}$ のときの可換図式 (1.1) を

$$\begin{tikzcd}
B^c_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[r, "\varphi^{\mathbb{Q}}"] \arrow[d, "\alpha_G^{\mathbb{Q}}"'] & \widetilde{B}^c_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[d, "\tilde{\alpha}_G^{\mathbb{Q}}"] \\
B_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[r, "\phi^{\mathbb{Q}}"'] & \widetilde{B}_{\mathbb{Q}}(G)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B^c_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[r, "\varphi^{\mathbb{Q}}"] & \widetilde{B}^c_{\mathbb{Q}}(G) \\
B_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[r, "\phi^{\mathbb{Q}}"'] \arrow[u, "\iota_G^{\mathbb{Q}}"] & \widetilde{B}_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[u, "\tilde{\iota}_G^{\mathbb{Q}}"']
\end{tikzcd} \tag{1.2}$$

で表す．

φ_1 ([OY01, (4.2)],[Bo03b, 2.3.1]) は $B^c(G)$ から群環 $\mathbb{Z}G$ の中心 $Z\mathbb{Z}G$ への環準同型写像であるから，$\varphi_1(1_{B^c(G)}) = 1$ であることがわかる．より正確に言えば，我々は $\varphi_1^{\mathbb{Q}}$ の像として $Z\mathbb{Z}G$ の単位元を与えるような $B^c(G)$ の元 $x \neq 1_{B^c(G)}$ を得ることができるのである．

Corollary 1.3. *Let $\overline{f}_J^G$ be a primitive idempotent of $B^c(G)$ with $J \in \mathrm{C}^\infty(G)$. Then*

$$\varphi_1^{\mathbb{Q}}(\overline{f}_J^G) = \begin{cases} 1 & J = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. 部分群 $H \leq G$ をとる．このとき，図式 (1.2) より

$$\begin{aligned} \varphi_1^{\mathbb{Q}} \iota_G^{\mathbb{Q}}(e_H^G) &= \tilde{\iota}_G^{\mathbb{Q}} \circ \phi_1^{\mathbb{Q}}(e_H^G) \\ &= \begin{cases} 1 & H = 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

となるので，我々は以下をえる：

$$\begin{aligned} \varphi_1^{\mathbb{Q}}(\overline{f}_J^G) &= \varphi_1^{\mathbb{Q}}(\iota_G^{\mathbb{Q}}(f_J^G)) \\ &= \sum_{H^\infty =_G J, H \in \mathrm{C}(G)} \varphi_1^{\mathbb{Q}}(\iota_G^{\mathbb{Q}}(e_H^G)) \\ &= \begin{cases} 1 & J = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

□

$\mathbb{K}$ を標数 0 の十分大きな体とする．$\mathrm{B}^c_{\mathbb{K}}(G)$ の原始べき等元は [OY01] と [Bo03b] で決定されている．それらの原始べき等元は G の部分群 H と $C_G(H)$ の既約 $\mathbb{K}$ 指標でインデックス付けされている．$e_{H,\theta}$ を $\mathrm{B}^c_{\mathbb{K}}(G)$ の原始べき等とする．$e_{H,\theta}$ は $\widetilde{B}^c_{\mathbb{K}}(G)$ の原始べき等元 $\widetilde{\epsilon}_{H,\theta}$ を用いて $e_{H,\theta} := \varphi^{-1}(\widetilde{\epsilon}_{H,\theta})$ で与えられる ([OY01, Theorem (5.5)]) ので，我々は Theorem 3.4 の証明で用いられる次の結果を得る．

Lemma 1.4. *Let $e_{H,\theta}$ be a primitive idempotent of $\mathrm{B}^c_{\mathbb{K}}(G)$. Then*

$$\varphi_1^{\mathbb{K}}(e_{H,\theta}) = \begin{cases} e_\theta & H = 1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where e_θ is a primitive idempotent of $Z\mathbb{K}C_G(H)$ (c.f. [NT88, Theorem 2.22]).

2 Idempotents of a p-local crossed Burnside ring

$\mathcal{O}$ は標数 0 の完備離散付値環，その商体 k は標数 $p > 0$ で十分大きい体とする．$\mathcal{O}$ 上の G の斜バーンサイド環 $B^{\mathrm{c}}_{\mathcal{O}}(G)$ の分解を得るために Bouc 理論のいくつかの結果を復習し，Green functors の基本的性質をまとめる．

2.1 Green functors

左 $\Bbbk$ 加群の圏 $\Bbbk$**-mod** に値をとる G の **Mackey functor** M は，有限 G 集合の圏から $\Bbbk$**-mod** への関手の対 $M = (M_*, M^*)$ で以下の条件を満たすものである：

1. Let X and Y be any finite G-sets, and let i_X (resp. i_Y) denote the canonical injection from X (resp. Y) into $X \sqcup Y$. Then the morphisms
$$(M_*(i_X), M_*(i_Y)) : M(X) \oplus M(Y) \to M(X \sqcup Y),$$
$$\begin{pmatrix} M^*(i_X) \\ M^*(i_Y) \end{pmatrix} : M(X \sqcup Y) \to M(X) \oplus M(Y)$$
are mutually inverse isomorphisms.
2. Let
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & Y \arrow[d, "c"] \\ Z \arrow[r, "d"'] & W \end{tikzcd}$$
be a pull-back diagram of finite G-sets. Then
$$M_*(b) \circ M^*(a) = M^*(d) \circ M_*(c).$$

G の $\Bbbk$ 上の **Green functor** A は，G 集合 X と Y と $\Bbbk$-bilinear maps $A(X) \times A(Y) \to A(X \times Y)$ が以下の性質を満たすような G の $\Bbbk$ 上 Mackey functor A である：

1. If $f : X \to X'$ and $g : Y \to Y'$ are morphisms of G-sets, then the squares
$$\begin{tikzcd} A(X) \times A(Y) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "A_*(f)\times A_*(g)"'] & A(X \times Y) \arrow[d, "A_*(f\times g)"] \\ A(X') \times A(Y') \arrow[r, "\times"'] & A(X' \times Y') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A(X) \times A(Y) \arrow[r, "\times"] & A(X \times Y) \\ A(X') \times A(Y') \arrow[r, "\times"'] \arrow[u, "A^*(f)\times A^*(g)"] & A(X' \times Y') \arrow[u, "A^*(f\times g)"'] \end{tikzcd}$$
are commutative.
2. If X, Y and Z are G-sets, then the square
$$\begin{tikzcd} A(X) \times A(Y) \times A(Z) \arrow[r, "\mathrm{id}_{A(X)}\times(\times)"] \arrow[d, "(\times)\times\mathrm{id}_{A(Z)}"'] & A(X) \times A(Y \times Z) \arrow[d, "\times"] \\ A(X \times Y) \times A(Z) \arrow[r, "\times"'] & A(X \times Y \times Z) \end{tikzcd}$$
is commutative, up to identifications $(X \times Y) \times Z \simeq X \times Y \times Z \simeq X \times (Y \times Z)$.
3. If $\bullet$ denotes the trivial G-set of cardinality 1, there exists an element $\varepsilon_A \in A(\bullet)$, is called the *unit* of A, such that for any G-set X and for any $a \in A(X)$
$$A_*(p_X)(a \times \varepsilon_A) = a = A_*(q_X)(\varepsilon_A \times a)$$
denoting by p_X (resp. q_X) the projection from $X \times \bullet$ (resp. $\bullet \times X$) to X.

G 集合 X，Y，$a \in A(X)$ と $b \in A(Y)$ に対して
$$a \times^{op} b = A_*(t)(b \times a) \in A(X \times Y),$$

ただし，t は G 写像 $Y\times X\to X\times Y; (y,x)\mapsto (x,y)$，とおく．Green functor A の **center** $Z(A)$ を G 集合 X に対して
$$Z(A)(X)=\{a\in A(X)\mid \forall Y,\forall b\in A(Y), a\times b=a\times^{op} b\}$$
と定義する ([Bo97, 12.1])．関手 $Z(A)$ は A の sub-Green functor と呼ばれるものになる．$e\in Z(A)(\bullet)$ がべき等元であるとき，
$$(e\times A)(X)=e\times A(X)\subset A(X)$$
で A の部分関手 $e\times A$ が定義される．このとき，$e\times A$ は $e=e\times\varepsilon_A\in(e\times A)(\bullet)$ を単位元にもつ A の sub-Green functor となる．以下，$H\le G$ に対して，剰余群 $N_G(H)/H$ を $W(H)$ と書く．

$|G|$ の素因数のうち，素数 p のみが非可逆元，p 以外はすべて可逆元である環を R とする．R 上の G の Burnside ring $B_R(G)$ の原始べき等元は，Dress により得られている ([Dr69], or [Bo00, Corollary 3.3.6])．G の正規部分群のうち，剰余群が p 群となる最小のものを $O^p(G)$ と書く．有限群 J は $O^p(J)=J$ を満たすとき **p-perfect** であると呼ばれる．$\mathrm{C}^p(G)$ は G の p-perfect subgroups の共役類のひとつの完全代表系とする．集合
$$\{f_J^G:=\sum_{O^p(H)=_G J,\, H\in\mathrm{C}(G)} e_H^G \mid J\in\mathrm{C}^p(G)\}$$
は $B_R(G)$ の原始べき等元の集合である ([Be91, Corollary 5.4.8 (Dress)])．

誘導 Ind_N^G, 膨張 $\mathrm{Inf}_{N/Q}^N$ 等の記法は Bouc のレクチャーノート [Bo97] を参照されたい．

Theorem 2.1. [Bo97, Proposition 12.1.11] *Let R be a ring in which every prime devisor of $|G|$ is invertible, except for p which is not invertible. Let A be Green functor for G over R. Then there are isomorphisms of Green functors*
$$A\simeq\bigoplus_{J\in\mathrm{C}^p(G)} f_J^G\times A \tag{2.1}$$
and
$$f_J^G\times A\simeq \mathrm{Ind}_{N_G(J)}^G\mathrm{Inf}_{W(J)}^{N_G(H)}\left(f_1^{W(J)}\times(\mathrm{Res}_{N_G(J)}^G A)^J\right). \tag{2.2}$$

2.2 Dress construction

Bouc により導入された Green functors の Dress 構成法 ([Bo03a]) を要約する． [OY04] でも論じられている．

S は有限 G 集合とする． $M=(M_*,M^*)$ が G $\Bbbk$ 上の Mackey functor であるとき，関手 M_S を有限 G 集合 Y に対して，
$$M_S(Y)=M(Y\times S),$$
G 写像 $f:Y\to Z$ に対して
$$(M_S)_*(f)=M_*(f\times\mathrm{id}_S),\quad (M_S)^*(f)=M^*(f\times\mathrm{id}_S)$$
と定めると M_S は G の Mackey functor となり，特に $M_S(\bullet)\cong M(S)$ が成り立つ．

モノイド自己同型による G 作用をもつモノイドを *G-monoid* と呼ぶ．G-equivariant monoid homomorphism を **G-monoids の射** という．G モノイド S と射 $\varphi:S\to G^c$ の対 (S,φ) を**斜 G モノイド (corossed G-monoid)** という．

次の命題のように Green functor A と斜 G モノイド S から Green functor A_S を得る構成法は Dress 構成法と呼ばれている．

Proposition 2.2. [Bo03a] *Let (S,φ) be a crossed G-monoid. If A is a Green functor for G over $\Bbbk$, let A_S denote the Mackey functor obtained by the Dress construction from the G-set S. If X and Y are finite G-sets, defined a product map $\times_S: A_S(X)\otimes_\Bbbk A_S(Y)\to A_S(X\times Y)$ by*
$$\forall a\in A_S(X),\forall b\in A_S(Y),\, a\otimes b\mapsto a\times_S b=A(\sigma)(a\times b),$$
where $\sigma: X\times S\times Y\times S\to X\times Y\times S$ sending (x,s,y,s') to $(x,\varphi(s)y,ss')$. Moreover, denote by ε_{A_S} the element $A_*(f)(\varepsilon_A)$ of $A(S)\cong A_S(\bullet)$, where f is the map sending the unique element of $\bullet$ to the identity element of S. Then A_S is a Green functor for G over $\Bbbk$.

2.3 Decomposition of a crossed Burnside ring over p-local ring

X は G 集合とする．$b(X)$ を X 上の G-集合の圏の Grothendieck group とする : a G-set (Y, α) over X is a pair consisting of a finite G-set Y, together with a G-map $\alpha : Y \to X$, and a morphism of G-sets over X from (Y, α) to (Z, β) is a G-map f from X to Y such that $\beta \circ f = \alpha$ ([Yo90, Section 9], [Bo97, 2.4]). Let (Y, ϕ) be a G-set over X. If $f : X \to X'$ is a morphism of G-sets, then we put $b_*((Y, \phi)) = (Y, f \circ \phi)$. If $f : X' \to X$ is a morphism of G-sets, then we denote by $b^*((Y, \phi))$ the pull-back (Y', ϕ') of (Y, ϕ) along f, obtained by filling the cartesian square

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\phi'"'] & Y \arrow[d, "\phi"] \\ X' \arrow[r, "f"'] & X. \end{tikzcd}$$

If $E = (U, \phi)$ (resp. $F = (V, \psi)$) is a G-set over X (resp. over Y), we denote by $E \times F$ the G-set $(U \times V, \phi \times \psi)$ over $X \times Y$. Then the product $\times$ can be extended by linearity to a product from $b(X) \otimes_{\mathbb{Z}} b(Y)$ to $b(X \times Y)$.

Proposition 2.3. [Bo97, Proposition 2.4.3] *With those notations above, $b = (b_*, b^*)$ is a Green functor for G over $\mathbb{Z}$.*

斜バーンサイド環 $\mathrm{B}^{\mathrm{c}}_{\Bbbk}(G)$ を与える Green functor が次のように得られる．G 集合 X に対して $\Bbbk b(X) = \Bbbk \otimes_{\mathbb{Z}} b(X)$ とおく．次の命題は Proposition 2.2 から従う．

Proposition 2.4. [Bo03a, Theorem 5.1] *Let $\Bbbk b = (\Bbbk b_*, \Bbbk b^*)$ be the Burnside Green functor for G over $\Bbbk$ and $G^{\mathrm{c}} := (G^c, \mathrm{id}_{G^c})$ be the crossed G-monoid. Then $\Bbbk b_{G^c}$ is a Green functor for G over $\Bbbk$ and $\Bbbk b_{G^c}(\bullet) \cong \mathrm{B}^{\mathrm{c}}_{\Bbbk}(G)$.*

我々は $\mathcal{O}$ 上の G の斜バーンサイド環 $B^{\mathrm{c}}_{\mathcal{O}}(G)$ の分解を得る．

Proposition 2.5. *Let R be a ring in which every prime devisor of $|G|$ is invertible, except for p which is not invertible. Let $\{f^G_J \mid J \in \mathrm{C}^p(G)\}$ the set of primitive idempotents of $B_R(G)$. Let Rb_{G^c} be the Green functor for G over R. Then there is an isomorphism of Green functors*

$$Rb_{G^c} \simeq \bigoplus_{J \in \mathrm{C}^p(G)} f^G_J \times Rb_{G^c} \tag{2.3}$$

and

$$f^G_J \times Rb_{G^c} \simeq \mathrm{Ind}^G_{N_G(J)} \mathrm{Inf}^{N_G(H)}_{W(J)} \left(f^{W(J)}_1 \times (\mathrm{Res}^G_{N_G(J)} Rb_{G^c})^J \right). \tag{2.4}$$

In particular, there are ring isomorphisms

$$B^{\mathrm{c}}_{\mathcal{O}}(G) \cong \bigoplus_{J \in \mathrm{C}^p(G)} \iota^{\mathcal{O}}_G(f^G_J) B^{\mathrm{c}}_{\mathcal{O}}(G) \tag{2.5}$$

and

$$\iota^{\mathcal{O}}_G(f^G_J) B^{\mathrm{c}}_{\mathcal{O}}(G) \cong \iota^{\mathcal{O}}_{W(J)}(f^{W(J)}_1) B^{\mathrm{c}}_{\mathcal{O}}(W(J)). \tag{2.6}$$

Proof. Theorem 2.1 と Proposition 2.4 により我々は Green functors の同型 (2.3) と (2.4) を得る．同型な Green functors の自明な G 集合 (1 点 G 集合) の値を比較して，環同型 (2.5) と (2.6) が [Bo00] Corollary 5.7.6 から得られる． □

$\iota^{\mathcal{O}}_G(f^G_1)e = e$ を満たすすべての原始べき等元 $e \in B^{\mathrm{c}}_{\mathcal{O}}(G)$ を含む Bouc の $\mathcal{O}$-代数を

$$\mathcal{A}(G) := B^{\mathrm{c}}_{\mathcal{O}}(G) \iota^{\mathcal{O}}_G(f^G_1)$$

とおく ([Bo03b, 3.2.3])．彼は $\mathcal{A}(G)$ のすべての原始べき等元を決定した ([Bo03b, 3.2.11])．それらは，ZkG の p-blocks でインデックス付けされている．p ブロック $i \in ZkG$ に対応する $\mathcal{A}(G)$ の原始べき等元を i_G と書く．Proposition 2.5 の (2.5) から我々はイデアルの直和分解

$$B_{\mathcal{O}}^{\mathrm{c}}(G) \cong \bigoplus_{J \in \mathrm{C}^p(G)} \mathcal{A}(W(J))$$

を得る．集合

$$\{i_{W(J)} \in \mathcal{A}(W(J)) \mid J \in \mathrm{C}^p(G),\, i \in ZkW(J) \,:\, p\text{-block}\}$$

は $B_{\mathcal{O}}^{\mathrm{c}}(G)$ の原始べき等元全体の集合である．さらに，我々は，$B_{\mathcal{O}}^{\mathrm{c}}(G)$ の原始べき等元の和としての表示

$$1 = \sum_{J \in \mathrm{C}^p(G),\, i \in ZkW(J)\,:\,p\text{-block}} i_{W(J)} \tag{2.7}$$

を得る．$\mathcal{A}(W(J))$ $(J \in \mathrm{C}^p(G))$ の構成により，我々は以下の補題を得る．

Lemma 2.6. *Let $i_{W(J)}$ be a primitive idempotent of $B_{\mathcal{O}}^{\mathrm{c}}(G)$, for $J \in \mathrm{C}^p(G)$ and p-block $i \in ZkW(J)$. Then*

$$\varphi_1^{\mathcal{O}}(i_{W(J)}) = \begin{cases} i & J = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

3 Images of a motivic decomposition by pseudo-functor $\mathcal{P}_{\Bbbk}$

Mackey 2*-motives* の $\Bbbk$-linear bicategory $\underline{\mathsf{Mack}}_{\Bbbk} := (\Bbbk\widehat{\mathsf{Span}}^{\mathsf{rf}})^{\flat}$ (see [BD21, Recollection 2.2]) から *cohomological Mackey* 2*-motives* の $\Bbbk$-linear bicategory $\underline{\mathsf{Mack}}_{\Bbbk}^{\mathsf{coh}} := (\mathsf{biperm}_{\Bbbk}^{\mathsf{rf}})^{\flat}$ (see [BD21, Definition 4.18]) への 擬関手 *(pseudo-functor)* $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ に関する結果を復習する．Balmer と Dell'Ambrogio は以下の定理を証明した．

Theorem 3.1. [BD21, Theorem 5.3] *For every finite group G, there is a well-defined surjective morphism of commutative rings $\rho_G : \mathrm{B}_{\Bbbk}^{\mathrm{c}}(G) \to Z(\Bbbk G)$ sending a basis element $[H,a]_G$ to $\sum_{x \in [G/H]} {}^{x}a$. The pseudo-functor $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ maps the general Mackey* 2*-motive $\oplus_i(G_i, e_i)$ to the cohomological Mackey* 2*-motive $\oplus_i(G_i, \rho_{G_i}(e_i))$, where $(G,0) \cong 0$ in both bicategories.*

Remark 1. The ring homomorphism ρ_G above is same as φ_1 in [OY01, (4.2)] and z_1 in [Bo03b, 2.3.1]. The map ρ_G is not only a surjective ring homomorphism, but also essentially a special case of the homonymous one studied in [BD20, CH. 7.5].

$\Bbbk = \mathbb{Z}$ のとき，我々は Balmer と Dell'Ambrogio による Theorem 3.1 の精密化が下記のように得られる．

Theorem 3.2. *For every finite group G, the pseudo-functor $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$ maps the Mackey* 2*-motive*

$$G \simeq (G, \overline{f}_1^{G}) \oplus (G, \overline{f}_{J_2}^{G}) \oplus \cdots \oplus (G, \overline{f}_{J_m}^{G}) \tag{3.1}$$

to the cohomological Mackey 2*-motive*

$$\begin{aligned} G &\simeq (G, \rho_G(\overline{f}_1^{G})) \oplus (G, \rho_G(\overline{f}_{J_2}^{G})) \cdots \oplus (G, \rho_G(\overline{f}_{J_m}^{G})) && (3.2)\\ &\simeq (G,1) \oplus (G,0) \oplus \cdots \oplus (G,0) && (3.3)\\ &\simeq (G,1), && (3.4) \end{aligned}$$

where $\{1,\, J_2,\, \ldots,\, J_m\} = \mathrm{C}^{\infty}(G)$.

Proof. [BD20, 7.5.4] のモチーフ的分解の議論と Theorem 1.2 により，我々は同値 (3.1) を得る．残りの cohomological Mackey 2-motive の同値は [BD21, Theorem 5.8] と Corollary 1.3 から得られる． □

Example 3.3 (Alternating group A_5). G を 5 次交代群 A_5 とする．$\mathrm{C}^\infty(G) = \{1, G\}$ となるので, Theorem 1.2 より $\{\overline{f}_1^G, \overline{f}_G^G\}$ が $B^{\mathrm{c}}(G)$ の原始べき等元全体の集合となる．さらに，例 [OY01, 6.5 (F)] により我々は，原始べき等元たちを明示的に決定することができる：

$$\overline{f}_1^G = [A_4, \epsilon] + [D_{10}, \epsilon] + [S_3, \epsilon] - [C_3, \epsilon] - 2[C_2, \epsilon] + [1, \epsilon], \tag{3.5}$$
$$\overline{f}_G^G = [A_5, \epsilon] - [A_4, \epsilon] - [D_{10}, \epsilon] - [S_3, \epsilon] + [C_3, \epsilon] + 2[C_2, \epsilon] - [1, \epsilon]. \tag{3.6}$$

指数を計算して $\rho_G(\overline{f}_1^G) = 1$ と $\rho_G(\overline{f}_G^G) = 0$ が成立することがわかる．したがって，Theorem 3.2 より擬関手 $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$ は Mackey 2-motive

$$G \simeq (G, \overline{f}_1^G) \oplus (G, \overline{f}_G^G) \tag{3.7}$$

を cohomological Mackey 2-motive

$$\begin{aligned} G &\simeq (G, \rho_G(\overline{f}_1^G)) \oplus (G, \rho_G(\overline{f}_G^G)) && (3.8)\\ &\simeq (G, 1) \oplus (G, 0) && (3.9)\\ &\simeq (G, 1) && (3.10)\end{aligned}$$

にうつすことがわかる．

$\mathbb{K}$ は標数 0 の十分大きい体とする．$\mathrm{Irr}(\mathbb{K}G)$ は G のすべての既約指標の集合とする．次の定理は，Lemma 1.4 を用いることにより，$\Bbbk = \mathbb{K}$ の場合に [BD21, Theorem 5.3] の精密化を与えている．

Theorem 3.4. *For every finite group G, the pseudo-functor $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ maps the Mackey 2-motive*

$$G \simeq \bigoplus_{H \in \mathrm{C}(G),\, \theta \in \mathrm{Irr}(\mathbb{K}C_G(H))} (G, e_{H,\theta}) \tag{3.11}$$

to the cohomological Mackey 2-motive

$$\begin{aligned} G &\simeq \bigoplus_{H \in \mathrm{C}(G),\, \theta \in \mathrm{Irr}(\mathbb{K}C_G(H))} (G, \rho_G(e_{H,\theta})) && (3.12)\\ &\simeq \bigoplus_{\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbb{K}G)} (G, \rho_G(e_{1,\theta})) && (3.13)\\ &\simeq \bigoplus_{\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbb{K}G)} (G, e_\theta). && (3.14)\end{aligned}$$

$\mathcal{O}$ は標数 0 の完備離散付値環，商体 k は標数 $p > 0$ の十分大きい体とする．次の定理は，Lemma 2.6 は $\Bbbk = \mathcal{O}$ の場合に [BD21, Theorem 5.3] の精密化を与えている．

Theorem 3.5. *For every finite group G, the pseudo-functor $\mathcal{P}_{\mathcal{O}}$ maps the Mackey 2-motive*

$$G \simeq \bigoplus_{J \in \mathrm{C}^p(G),\, i \in ZkW(J)\,:\, p\text{-block}} (G, i_{W(J)}) \tag{3.15}$$

to the cohomological Mackey 2-motive

$$\begin{aligned} G &\simeq \bigoplus_{J \in \mathrm{C}^p(G),\, i \in ZkW(J)\,:\, p\text{-block}} (G, \rho_G(i_{W(J)})) && (3.16)\\ &\simeq \bigoplus_{i \in ZkW(1)\,:\, p\text{-block}} (G, \rho_G(i_{W(1)})) && (3.17)\\ &\simeq \bigoplus_{i \in ZkG\,:\, p\text{-block}} (G, i). && (3.18)\end{aligned}$$

参考文献

[BD20] P. Balmer, I. Dell'Ambrogio, Mackey 2-Functors and Mackey 2-Motives (Ems Monographs in Mathematics), 2020.

[BD21] P. Balmer and I. Dell'Ambrogio. Cohomological Mackey 2-functors. Preprint, 2021.

[Be91] D. J. Benson. *Representations and Cohomology, Vol. I, Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*. Cambridge Stud. Adv. Math., 30, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[Bo97] S. Bouc. Green functors and G-sets. Lecture Notes in Mathematics, **1671** Springer-Verlag, Berlin, 1997. viii+342 pp.

[Bo00] S. Bouc,Burnside rings, In Handbook of algebra **2**, pp.739–804, Elsevier, (2000).

[Bo03a] S. Bouc. Hochschild constructions for Green functors. Comm. Algebra 31 (2003), no1, 403 – 436.

[Bo03b] S. Bouc. The p-blocks of the Mackey algebra. Algebr. Represent. Theory, 6(5):515–543, 2003.

[Bu1911] W. Burnside. Theory of groups of finite order. https://people.math.rochester.edu/faculty/doug/otherpapers/burnside1911.pdf

[Bu55] W. Burnside. Theory of groups of finite order. 2d ed. Dover Publications, Inc., New York, 1955. xxiv+512 pp.

[Dr69] A. Dress. A characterisation of solvable groups. Math. Z., 110:213–217, 1969.

[Gl81] D. Gluck. Idempotent formula for the Burnside ring with applications to the p-subgroup simplicial complex, Illinois J. Math. **25** No.1 (1981) 63–67.

[MS02] C. P. Milies, S. K. Sehgal. An introduction to group rings. Algebra and Applications, 1. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[NT88] H. Nagao, Y. Tsushima. *Representations of Finite Groups*. Academic Press, New York, 1988.

[OY01] F. Oda, T. Yoshida. Crossed Burnside rings. I. The fundamental theorem. J. Algebra, 236(1):29–79, 2001.

[OY04] F. Oda, T. Yoshida. Crossed Burnside rings. II. The Dress construction of a Green functor. *J. Algebra*, **282** (2004), no. 1, 58–82.

[OTY] F. Oda, Y. Takegahara, T. Yoshida. Crossed Burnside rings and cohomological Mackey 2-motives. arXiv:2201.04744.

[Yo83] T. Yoshida. Idempotents of the Burnside rings and Dress induction theorem, J. Algebra **80** (1983) 90–105.

[Yo90] T. Yoshida. The generalized Burnside ring of a finite group, Hokkaido Math. J. **19** (1990), 509–574.

[Yo97] T. Yoshida. Crossed G-sets and crossed Burnside rings. Group theory and combinatorial mathematics (Japanese) (Kyoto, 1996). Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku, bf 991 (1997), 1–15.