モジュラー同型問題に対する還元定理と不変量

千葉大学・大学院理学研究院　櫻井　太朗 *
Taro Sakurai
Graduate School of Science,
Chiba University

概要

This is a report of a talk based on a joint work with Leo Margolis and Mima Stanojkovski in [arXiv:2110.10025].

「有限群のコホモロジー論とその周辺」の研究集会で二年前にもモジュラー同型問題に関する結果 [4] の講演をさせていただいた．まずは問題の説明から始めたい．正標数 p の素体 $\mathbb{F}_p$ と有限 p 群 G および H が与えられたとき，もし群環 $\mathbb{F}_pG$ と $\mathbb{F}_pH$ が同型ならば群 G と H は同型だろうか？これはおよそ〈モジュラー表現は有限 p 群のすべてを知っているのか〉と言ってもよい．位数の小さな場合や特別なクラスに対する肯定的な結果はいくつもあったものの，提起されてから半世紀以上にわたって未解決であったこの問題に解決の兆しは当時まったく見られなかった．ところが二年後のいま状況は一変している．その辺りの事情についても触れながら，新たに [3] で得られた結果について紹介したい．これは Leo Margolis と Mima Stanojkovski との共同研究である．

1　同型問題

モジュラー同型問題に関する初期の結果は Sandling による概説 [5] の第 6 節後半にまとめられている．ここに多くの基本的な結果をすでに見ることができる．最新の結果については Margolis による概説 [2] とその引用文献を参照されたい．ここでは単に冒頭に述べたように，位数の小さな場合や特別なクラスに対する肯定的な結果がいくつもあったこと，そして半世紀以上にわたって未解決であったことを指摘するに留める．

ところが 2021 年の冬に反例が突如として現れた．

定理 1.1 (García-Lucas–Margolis–del Río [1])**.** 次の表示で定義される位数 $2^9 = 512$ の群 G と

* https://orcid.org/0000-0003-0608-1852

H は非同型であり，かつ群環 $\mathbb{F}_2G$ と $\mathbb{F}_2H$ は同型である．

$$
\begin{aligned}
G &= \langle\, x, y, z \,|\, x^{16} = y^8 = z^4 = 1, [y,x] = z, [z,x] = z^2, [z,y] = z^2 \,\rangle,\\
H &= \langle\, a, b, c \mid a^{16} = b^8 = c^4 = 1, [b,a] = c, [c,a] = c^2, [c,b] = 1 \,\rangle.
\end{aligned}
$$

実際の論文ではより一般に標数 2 の体上かつ位数 2^n（$n \geq 9$）の場合を扱っている*1*2．これによりモジュラー同型問題に対する反例が $p = 2$ の場合には与えられた．反例が存在すること自体に驚きはなかったものの，それが突如として現れたこと，そして位数の小ささいことには驚かされた．同様の構成を単に奇素数 p に対して行うと非同型な群 G と H が得られるが，これらは反例を与えない*3．

現在のところ奇素数に対するモジュラー同型問題は未解決のままである．

2　不変量

共同研究は反例が与えられるより以前から行っていたものである．ここではモジュラー同型問題に関する不変量の結果を紹介する．以下 G および H は有限 p 群とする．また係数体は標数 p であれば十分であるが素体 $\mathbb{F}_p$ とする．古典的な不変量としては群 G の中心 $\zeta(G)$ やアーベル化 $G/\gamma(G)$ がある．

- $\mathbb{F}_pG \cong \mathbb{F}_pH \implies \zeta(G) \cong \zeta(H)$.
- $\mathbb{F}_pG \cong \mathbb{F}_pH \implies G/\gamma(G) \cong H/\gamma(H)$.

また Sandling [5] により $\zeta(G) \cap \gamma(G)$ や $\zeta(G)/\zeta(G) \cap \gamma(G)$ も不変量であることが知られていた．

- $\mathbb{F}_pG \cong \mathbb{F}_pH \implies \zeta(G) \cap \gamma(G) \cong \zeta(H) \cap \gamma(H)$.
- $\mathbb{F}_pG \cong \mathbb{F}_pH \implies \zeta(G)/\zeta(G) \cap \gamma(G) \cong \zeta(H)/\zeta(H) \cap \gamma(H)$.

この結果の双対として $G/\zeta(G)\gamma(G)$ や $\zeta(G)\gamma(G)/\gamma(G)$ の不変性が得られた．

定理 2.1 (Margolis–Sakurai–Stanojkovski [3])**.**

- $\mathbb{F}_pG \cong \mathbb{F}_pH \implies G/\zeta(G)\gamma(G) \cong H/\zeta(H)\gamma(H)$.
- $\mathbb{F}_pG \cong \mathbb{F}_pH \implies \zeta(G)\gamma(G)/\gamma(G) \cong \zeta(H)\gamma(H)/\gamma(H)$.

実際にはより一般にこれらすべてを含む形で p 冪を反映した不変量の系列を構成した [3,

*1 証明は [2] で与えられているものの方が議論がやや平明になっている（係数体の取り替えが不要）．

*2 具体的に同型 $\mathbb{F}_2G \to \mathbb{F}_2H$ が $x \mapsto a$ と $y \mapsto b(a+b+ab)c$ により与えられているが，これを $x \mapsto a$ と $y \mapsto b + (a-1)(b-1)$ にしても同様に議論が進む．

*3 とはいえ，たとえば

$$
\begin{aligned}
G &= \langle\, x, y, z \mid x^{p^4} = 1, y^{p^3} = z^p, z^{p^2} = 1, [y,x] = z, [z,x] = z^p, [z,y] = z^p \,\rangle\\
H &= \langle\, a, b, c \mid a^{p^4} = 1, b^{p^3} = c^p, c^{p^2} = 1, [b,a] = c, [c,a] = c^p, [c,b] = 1 \,\rangle
\end{aligned}
$$

のような類似の構成がいくつも考えられて，それらが反例を与えないかどうかを確かめるのは極めて難しい．

Theorem B]．とはいえ，この特別な場合だけでも十分に強力であり，応用として次の新しい結果を得た．

定理 2.2 (Margolis–Sakurai–Stanojkovski [3])．中心 $\zeta(G)$ が巡回群と同型かつ商 $G/\zeta(G)$ が二面体群と同型ならば

$$\mathbb{F}_pG \cong \mathbb{F}_pH \implies G \cong H$$

が成り立つ．

ここで仮定から $p=2$ が従うことに注意する．証明を構成する要素のひとつは次の分類である．

定理 2.3 (Margolis–Sakurai–Stanojkovski [3])．有限 2 群 G は中心 $\zeta(G)$ が位数 2^m の巡回群と同型かつ商 $G/\zeta(G)$ が位数 2^n の二面体群と同型ならば以下のいずれかと同型である．

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{2^m|n} &= \langle\, a,b,c \mid a^2 = 1,\ \ b^2=1,\ \ (ab)^{2^{n-1}} = c^{2^{m-1}}, && c^{2^m} = [a,c]=[b,c]=1\,\rangle,\\
\mathrm{Q}_{2^m|n} &= \langle\, a,b,c \mid a^2 = c,\ \ b^2=c,\ \ (ab)^{2^{n-1}} = c^{2^{m-1}+2^{n-1}}, && c^{2^m} = [a,c]=[b,c]=1\,\rangle,\\
\mathrm{S}_{2^m|n} &= \langle\, a,b,c \mid a^2 = 1,\ \ b^2=c,\ \ (ab)^{2^{n-1}} = c^{2^{m-1}+2^{n-2}}, && c^{2^m} = [a,c]=[b,c]=1\,\rangle.
\end{aligned}$$

記号の選び方からもわかるように，これらの群は二面体群・一般四元数群・準二面体群（$m=1$ の場合）の一般化である．

この分類定理はまったく異なる文脈においても有用となるかもしれない．

3　還元定理

ここではモジュラー同型問題に対する還元定理を紹介する．前の節で触れた p 冪を反映した新たな不変量として具体的には Frattini 部分群 $\Phi(G)$ と Socle $\Psi(G)$ との共通部分 $\Phi(G)\cap\Psi(G)$ がある．この応用として次の定理を得た．

定理 3.1 (Margolis–Sakurai–Stanojkovski [3, Theorem A])．有限 p 群 E が基本アーベル群ならば

$$\mathbb{F}_p[E\times G] \cong \mathbb{F}_p[E\times H] \implies \mathbb{F}_pG \cong \mathbb{F}_pH$$

が成り立つ．

つまり群 G と H がモジュラー同型問題の反例でなかったときに，最も自明な方法で p 群を拡大したとしても，それらが反例を与えることはない．特にモジュラー同型問題は

$$\Psi(G) \le \Phi(G)$$

を満たす場合を調べれば十分であることがわかる[*4]．

このような還元定理はこれまでモジュラー同型問題に対してまったく知られていなかったもので，新しい形の結果である．

[*4] この形は群の同質類が $\zeta(G) \le \gamma(G)$ を満たす場合を調べれば十分であるというホールの定理を連想させる．

参考文献

[1] D. García-Lucas and L. Margolis and Á. del Río, 'Non-isomorphic 2-groups with isomorphic modular group algebras', *J. Reine Angew. Math.* 783 (2022) 269–274, doi:10.1515/crelle-2021-0074.

[2] L. Margolis, 'The modular isomorphism problem: a survey', *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* 124 (2022) 157–196, doi:10.1365/s13291-022-00249-5.

[3] L. Margolis and T. Sakurai and M. Stanojkovski, 'Abelian invariants and a reduction theorem for the modular isomorphism problem', Preprint, 2021, arXiv:2110.10025.

[4] T. Sakurai, 'The isomorphism problem for group algebras: a criterion', *J. Group Theory* 23 (2020) 435–445, doi:10.1515/jgth-2019-0071.

[5] R. Sandling, 'The isomorphism problem for group rings: a survey', *Orders and their applications*, Lecture Notes in Math. 1142 (Springer, Berlin, 1985) 256–288, doi:10.1007/BFb0074806.