

ブロック・イデアルのソース多元環とコホモロジー環の移送写像

佐々木 洋城

Sasaki, Hiroki

北海道大学 理学研究院

Hokkaido University, Faculty of Science

はじめに

筆者は block イデアルのコホモロジー環について勉強してきましたが、この講演では、改めて定義を振り返り、いくつかの課題を提出したいと思います。

1 対称多元環

k を体とする。初めに、記号を定める。 A, B を k 上有限次元多元環とする。

- 左 A -加群 L, M に対して ${}_A(L, M) = \text{Hom}_A(L, M)$.
- 右 A -加群 L, M に対して $(L, M)_A = \text{Hom}_A(L, M)$.
- (A, B) -両側加群 L, M に対して ${}_A(L, M)_B = \text{Hom}_{(A, B)}(L, M)$
- 左 A -加群 (右 A -加群, (A, B) -両側加群) L に対して $L^* = \text{Hom}_k(L, k)$.

A, B, C を k 上有限次元対称多元環とする。以下では、これらの多元環上の加群はすべて k 上有限次元である。

(A, B) -両側加群 X について次を仮定する。すなわち

(仮定) X は左 A -加群として射影的であり、右 B -加群として射影的である

このとき

(1) (B, A) -両側加群として ${}_A(X, A) \simeq X^* \simeq (X, B)_B$

(2) ${}_A L_C, {}_B M_C$ について加群の同型

$$\varphi_{L, M} : {}_A(X \otimes_B M, L)_C \simeq {}_B(M, X^* \otimes_A L)_C$$

が得られる。特に

$$\varphi_{A, X^*} : {}_A(X \otimes_B X^*, A)_A \simeq {}_B(X^*, X^*)_A$$

において ${}_X \varepsilon : X \otimes_B X^* \rightarrow A$ を Id_{X^*} に対応するものとする。

$${}_X \varepsilon \leftrightarrow \text{Id}_{X^*}$$

また

$$\varphi_{B,X} : {}_A(X, X)_B \simeq {}_B(B, X^* \otimes_A X)_B$$

という同型も得られるが, Id_X に対応する $\eta_X : B \rightarrow X^* \otimes_A X$ を考える.

$$\text{Id}_X \leftrightarrow \eta_X$$

上述の同型 $\varphi_{L,M}, \varphi_{L,M}^{-1}$ は ${}_X\varepsilon, \eta_X$ を用いて記述される. すなわち

$$\begin{array}{ccc}
 X \otimes_B M & \text{と} & \begin{array}{c} M \\ \eta_X \otimes \text{Id}_M \downarrow \\ X^* \otimes_A X \otimes_B M \\ \text{Id}_{X^*} \otimes \alpha \downarrow \\ X^* \otimes_A L \end{array} \varphi_{L,M}(\alpha) \quad \text{が対応し,} \\
 \alpha \downarrow & & \swarrow \\
 L & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 M & \text{と} & \begin{array}{c} X \otimes_B M \\ \text{Id}_X \otimes \beta \downarrow \\ X \otimes_B X^* \otimes_A L \\ {}_X\varepsilon \otimes \text{Id}_L \downarrow \\ L \end{array} \varphi_{L,M}^{-1}(\beta) \quad \text{が対応する.} \\
 \beta \downarrow & & \swarrow \\
 X^* \otimes_A L & &
 \end{array}$$

(3) trace 写像が次のように定義される.

- (A, C) -両側加群 L, L' に対して trace 写像

$${}^X\text{Tr} : {}_B(X^* \otimes_A L, X^* \otimes_A L')_C \rightarrow {}_A(L, L')_C$$

は

$$\begin{array}{ccc}
 X^* \otimes_A L & \text{を} & \begin{array}{c} L \\ \downarrow {}_X\eta \otimes \text{Id}_L \\ X \otimes_B X^* \otimes_A L \\ \downarrow \text{Id}_X \otimes \gamma \\ X \otimes_B X^* \otimes_A L' \\ \downarrow {}_X\varepsilon \otimes \text{Id}_{L'} \\ L' \end{array} \quad \text{に対応させる.} \\
 \gamma \downarrow & & \\
 X^* \otimes_A L' & &
 \end{array}$$

- (C, B) -両側加群 M, M' に対して trace 写像

$$\text{Tr}^X : {}_C(M \otimes_B X^*, M' \otimes_B X^*)_B \rightarrow {}_C(M, M')_B$$

は

$$\begin{array}{ccc}
 & & M \\
 & & \downarrow \text{Id}_M \otimes \eta_X \\
 M \otimes_B X^* & & M \otimes_B X^* \otimes_B X \\
 \downarrow \gamma & \text{を} & \downarrow \gamma \otimes \text{Id}_X \\
 M' \otimes_B X^* & & M' \otimes_B X^* \otimes_B X \\
 & & \downarrow \text{Id}_{M'} \otimes \varepsilon_X \\
 & & M'
 \end{array}
 \quad \text{に対応させる.}$$

- (4) transfer 写像 (移送写像) $t_X : HH^*(B) \rightarrow HH^*(A)$ が次のように定義される. trace 写像 $\text{Tr}^{X^*} : {}_A(X, X)_B \rightarrow {}_A(A, A)_A$ は Ext 群の準同型写像を引き起こすが, それも trace 写像とよび同じ記号で表す:

$$\text{Tr}^{X^*} : \text{Ext}_{A \otimes B^{\text{op}}}^*(X, X) \rightarrow \text{Ext}_{A \otimes A^{\text{op}}}^*(A, A) (= HH^*(A)).$$

また, 写像 $1_X \otimes - : {}_B(B, B)_B \rightarrow {}_A(X, X)_B$ も自然に Ext 群の準同型写像を引き起こし, その写像を

$${}_X \text{Res} : \text{Ext}_{B \otimes B^{\text{op}}}^*(B, B) (= HH^*(B)) \rightarrow \text{Ext}_{A \otimes C^{\text{op}}}^*(X, X)$$

と書く. さらに, $- \otimes 1_X : {}_A(A, A)_A \rightarrow {}_A(X, X)_B$ も自然に Ext 群の準同型写像を引き起こし, その写像を

$$\text{Res}_X : \text{Ext}_{A \otimes A^{\text{op}}}^*(A, A) \rightarrow \text{Ext}_{A \otimes A^{\text{op}}}^*(X, X)$$

と書く.

合成

$$t_X : \text{Ext}_{B \otimes B^{\text{op}}}^*(B, B) \xrightarrow{{}_X \text{Res}} \text{Ext}_{A \otimes B^{\text{op}}}^*(X, X) \xrightarrow{\text{Tr}^{X^*}} \text{Ext}_{A \otimes A^{\text{op}}}^*(A, A)$$

を X が定める transfer 写像とよぶ.

$\pi_X = t_X(1_B) \in Z(A) (= HH^0(A))$ を相対射影元 (relative projective element) とよぶ.

X^* が定める transfer 写像 $t_{X^*} : HH^*(A) \rightarrow HH^*(B)$ については $\pi_{X^*} = t_{X^*}(1_A)$ である.

- (5) $(\zeta, \theta) \in HH^*(A) \oplus HH^*(B)$ について条件

$$\text{Res}_X(\zeta) = {}_X \text{Res}(\theta)$$

が成り立つとき, (ζ, θ) を X -stable pair とよぶ. ζ は X -stable であるという.

$$HH_X^*(A) = \{ \zeta \in HH^*(A) \mid \zeta \text{ は } X\text{-stable} \}$$

を X -stable 部分環とよぶ. (ζ, θ) が X -stable pair であることと $(\theta, \zeta) \in HH^*(B) \oplus HH^*(A)$ が X^* -stable pair であることは同値である.

定理 1.1 $\pi_X \in Z(A)$ が可逆ならば $t_X(HH_{X^*}^*(B)) = HH_X^*(A)$ であり

$$t_X|_{HH_{X^*}^*(B)} : HH_{X^*}^*(B) \rightarrow HH_X^*(A)$$

は全射である. 特に, $\pi_{X^*} \in Z(B)$ も可逆ならば

$$HH_{X^*}^*(B) \simeq HH_X^*(A).$$

ところで, もちろん, $HH_X^*(A) = t_X(HH_{X^*}^*(B)) \subseteq t_X(HH^*(B))$ なのであるが

課題 1 $HH_X^*(A) = t_X(HH^*(B))$ であって欲しい. または, これが成立するための条件を探したい.

命題 1.2 (A, C) -両側加群 L, L' に対して合成 ${}^X\text{Tr} \circ {}_{X^*}\text{Res} : {}_A(L, L')_C \rightarrow {}_A(L, L')_C$ は $\pi_X \in Z(A)$ による積である.

$$\begin{array}{ccc} {}_A(L, L')_C & \xrightarrow{\pi_X} & {}_A(L, L')_C \\ & \searrow {}_{X^*}\text{Res} & \nearrow {}^X\text{Tr} \\ & {}_B(X^* \otimes L, X^* \otimes L')_C & \end{array}$$

2 block イデアルのコホモロジー環

k を標数 $p > 0$ の代数的閉体とし, G をその位数が p で割りきれぬ有限群とする.

群環 kG を次のようにして左 $k[G \times G^{\text{op}}]$ -加群とする.

$$a \in kG, x, y \in G \text{ に対して } (x, y)a = xay.$$

$b = kGe$ を block イデアルとする. ($e \in Z(kG)$ は原始的べき等元) P を b の defect 群とすると, b を直既約 $k[G \times G^{\text{op}}]$ -加群とみて $\Delta P = \{u \in P \mid (u, u^{-1})\}$ は b の vertex であり, k は source である. すなわち, $b \mid k[G \times G^{\text{op}}] \otimes_{k\Delta P} k$.

定義 2.1 (Alperin, Linckelmann and Rouquier[1]) $k[G \times P^{\text{op}}]$ -加群 X について次の条件が成り立つとき X を b の source 加群とよぶ.

- X は直既約 $k[G \times P^{\text{op}}]$ -加群である.
- $k[G \times P^{\text{op}}]$ -加群として $X \mid b$ である.
- ΔP は X の vertex である.

さらに, $B = \text{End}_{k[G \times 1]}(X)^{\text{op}} \simeq X^* \otimes_b X$ を b の source 多元環とよぶ.

B は (kP, kP) -両側加群であるから Hochschild コホモロジー環の transfer 写像 $t_B : HH^*(kP) \rightarrow HH^*(kP)$ を導くが

- diagonal embedding $\delta_P : H^*(P, k) \rightarrow HH^*(kP)$ について $t_B \circ \delta_P(H^*(P, k)) \subseteq \delta_P(H^*(P, k))$ であることが確かめられ, 従って, 写像 $t : H^*(P, k) \rightarrow H^*(P, k)$ で $t_B \circ \delta_P = \delta_P \circ t$ となるものが定義される. この写像もまた t_B と書くことにする.

- $B \simeq X^* \otimes_b X$ であるから, $t_B = t_{X^*} \circ t_X$ と分解される.

まとめて次の可換図式が得られる.

$$(D1) \quad \begin{array}{ccc} H^*(P, k) & \xrightarrow{\delta_P} & HH^*(kP) \\ \uparrow t_B & & \uparrow t_B \\ H^*(P, k) & \xrightarrow{\delta_P} & HH^*(kP) \end{array} \quad \begin{array}{c} \swarrow t_{X^*} \\ HH^*(b) \\ \searrow t_X \end{array}$$

一般に, p -部分群 Q と $k[QC_G(Q)]$ の block イデアル c との組 (Q, c) を subpair とよぶ. $k[QC_G(Q)]$ の block イデアル c の G への Brauer 対応が b であるとき, (Q, c) を b -subpair とよぶ. (P, c) が b -subpair であり, さらに P が b の defect 群のとき, (P, c) を Sylow b -subpair とよぶ.

X を b の source 加群とする. X の Brauer construction $X(P) = X^P / \sum_{Q < P} \text{tr}^P X^Q$ は直既約 $k[C_G(P)]$ -加群であり, $kC_G(Q)$ のただ一つの block イデアル c に属する. $cX(P) = X(P)$ となる. c を cover する $k[PC_G(P)]$ の block イデアルを b_P とする. Sylow b -subpair (P, b_P) を (ここだけの言い方ですが) X に属する Sylow b -subpair とよぶ.

以後, b の source 加群 X を固定し, X に属する Sylow b -subpair (P, b_P) を固定して考える.

部分群 $Q \leq P$ に対して $(Q, b_Q) \leq (P, b_P)$ を満たす subpair (Q, b_Q) がただ一つ存在する. そこで,

- defect 群 P の部分群を object とし,
- $Q, R \leq P$ に対して $x \in G$ で ${}^x(Q, b_Q) \leq (R, b_R)$ をみたすものが引き起こす共役写像 $c_x : Q \rightarrow R; u \mapsto {}^x u$ を morphism $Q \rightarrow R$ として

圏 $\mathcal{F}_{(P, b_P)}(b)$ を定義し, これを Brauer 圏とよぶ.

定義 2.2 (Linckelmann [4]) いままでの記号の下で, block b のコホモロジー環を次のように定義する. $\zeta \in H^*(P, k)$ が条件

$$\text{res}_Q {}^g \zeta = \text{res}_Q \zeta \quad \forall Q \leq P \quad \forall g \in N_G(Q, b_Q)$$

をみたすとき, ζ は $\mathcal{F}_{(P, b_P)}(b)$ -stable であるという. $H^*(P, k)$ の部分集合

$$H^*(G, b; X) = \{ \zeta \in H^*(P, k) \mid \zeta \text{ は } \mathcal{F}_{(P, b_P)}(b)\text{-stable} \}$$

を b の (X によって定められる) コホモロジー環とよぶ.

さて, 次の定理はモデューラー表現論を通じてとても重要である.

定理 2.1 相対射影元 $\pi_X \in Z(b)$, $\pi_{X^*} \in Z(kP)$ はいずれも可逆である.

B を (kP, kP) -両側加群とみて次の基本定理が得られる.

定理 2.2 ([4]) 今までの記号の下で $\zeta \in H^*(P, k)$ について

$$\zeta \in H^*(G, b; X) \implies \delta_P \zeta \in HH^*(kP) \text{ は } B\text{-stable である.}$$

この逆が成り立つ.

定理 2.3 (Sasaki [6]) 今までの記号の下で $\zeta \in H^*(P, k)$ について

$$\delta_P \zeta \in HH^*(kP) \text{ は } B\text{-stable である} \implies \zeta \in H^*(G, b; X).$$

定理 2.1 により, transfer 写像 t_{X^*}, t_X を stable 部分環に制限して同型が得られる. 制限した写像も同じ記号で表すと

$$t_{X^*} : HH_{X^*}^*(b) \xrightarrow{\cong} HH_X^*(kP), t_X : HH_X^*(kP) \xrightarrow{\cong} HH_{X^*}^*(b).$$

さらに定理 2.1 により

定理 2.4 stable 部分多元環について等式 $HH_X^*(kP) = HH_B^*(kP)$ が成り立つ.

従って, 可換図式 (D1) を stable 部分環に制限して, 次の可換図式が得られる.

$$(D2) \quad \begin{array}{ccc} H^*(G, b; X) & \xrightarrow{\delta_P} & HH_X^*(kP) \\ \uparrow t_B \cong & & \uparrow t_B \cong \\ H^*(G, b; X) & \xrightarrow{\delta_P} & HH_X^*(kP) \end{array} \quad \begin{array}{c} \swarrow t_{X^*} \\ HH_{X^*}^*(b) \\ \searrow t_X \end{array}$$

次の課題を考えたい.

課題 2 (1) $H^*(G, b; X) \subseteq t_B(H^*(P, k))$ であるが, 等号が成立するのではないか.

(2) 可換図式 (D2) において右側の三角形に相当する三角形を左側にも作りたい.

$$\begin{array}{ccc} H^*(G, b; X) & \xrightarrow{\delta_P} & HH_X^*(kP) \\ \uparrow t_B & \nearrow \text{---} & \uparrow t_B \\ & \text{---} & \\ & \text{---} & \\ & \searrow \text{---} & \\ H^*(G, b; X) & \xrightarrow{\delta_P} & HH_X^*(kP) \end{array} \quad \begin{array}{c} \swarrow t_{X^*} \\ HH_{X^*}^*(b) \\ \searrow t_X \end{array}$$

課題 2 (1) を考えるために、これまでは、source 多元環 B の (kP, kP) -両側加群としての構造を調べて、transfer 写像 $t_B : H^*(P, k) \rightarrow H^*(P, k)$ を求めるという考え方で考察してきた。事例研究ではあるが、block イデアルの defect 群を指定して具体例を調べる過程で、 B の (kP, kP) -両側加群としての特定の直和因子をもつことを確認できた。([7], [5])

課題 1 の block イデアル版が課題 2 (1) であるから、この方向で考察できないだろうか。

3 source 多元環

いままでと同じ記号を使う。

$H = N_G(P, b_P)$ とおく。

$c = kHb_P$ は kH の block イデアルである。直既約 (c, kP) -両側加群 Y を c の source 加群とし、 $C = \text{End}_{k[H \times 1]}(Y)^{\text{op}} \simeq Y^* \otimes_c Y$ を c の source 多元環とする。

c を直既約 $k[H \times H]$ -加群とみて $G \times H$ への Green 対応を L とおく。 L は (b, c) -両側加群である。

定理 3.1 (1) 相対射影元 $\pi_L \in Z(b)$, $\pi_{L^*} \in Z(c)$ はいずれも可逆である。

(2) $X \simeq L \otimes_c Y$ が成り立つ。([1, Theorem 5])

よって、命題 1.2 により、合成 ${}^L\text{Tr} \circ_L \text{Res} : {}_c(Y, Y) \rightarrow {}_b(X, X)$ は $\pi_{L^*} \in Z(c)$ による積である。ゆえに

$$\text{End}_{kG \times 1}(X) \simeq \text{Im } {}_L \text{Res} \oplus \text{Ker } {}^L\text{Tr}$$

であり、 $\text{Im } {}_L \text{Res} \simeq \text{End}_{kH \times 1}(Y)$ である。このことから、 (C, C) -両側加群としての同型

$$B \simeq C \oplus Z$$

が得られる。(Fau-Puig による結果であり、[1] で簡明な証明が与えられているが、このような説明もできると思う。) 特に、 (kP, kP) -両側加群としてとらえると

$$C \simeq \bigoplus_{v \in [H/PC_G(P)]} kPv \text{ であり、 } Z \text{ は } k[PxP] \text{ (} x \notin H \text{) の直和}$$

であることがわかる。

例 P を指数 p , 位数 p^3 の extraspecial p -群とする。次がわかる。

(1) (kP, kP) -両側加群として $B \simeq C \otimes_{kP} W \oplus Z_0$ の形をしている。

(2) $\text{Im } t_B = H^*(G, b; X)$ 。(課題 2 の (1) がこの場合は成り立つ)

(3) 次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccc}
 H^*(P, k) & \xrightarrow{\delta_P} & HH^*(kP) & & \\
 \uparrow t_B & & \uparrow t_B & & \\
 & \swarrow \tau & & & \\
 & H^*(P, k) & \xrightarrow{\delta_P} & HH^*(kP) & \\
 \nearrow t_C & & & & \\
 H^*(P, k) & \xrightarrow{\delta_P} & HH^*(kP) & & \\
 & & \nearrow t_C & &
 \end{array}$$

(4) 上の左側の $t_B = t_1$, $t_C = t_2$ において $t_1 = \tau \circ t_2$ であり, Z_0 が導く $H^*(P, k)$ の transfer 写像は 0 写像である.

次の課題を考えたい.

課題 3 (1) 上の (1) に現れた加群 W の意味は何か.

(2) このような tensor 積分解は一般に成り立つか.

(3) $k[PvP], k[Pv'P] \mid B$ のとき, $k[PvP] \oplus k[Pv'P] \mid B$ となる条件を知りたい.

参考文献

- [1] J. L. Alperin, M. Linckelmann, and R. Rouquier, Source algebras and source modules, *J. Algebra* **239** (2001), no. 1, 262–271.
- [2] M. Broué, On representations of symmetric algebras: an introduction, Notes by M. Stricker, Mathematik Department ETH Zürich, 1991.
- [3] Yun Fan and Lluís Puig, On blocks with nilpotent coefficient extensions, *Algebr. Represent. Theory* **1** (1998), no. 1, 27–73.
- [4] M. Linckelmann, Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups, *Algebr. Represent. Theory* **2** (1999), 107–135.
- [5] T. Okuyama and H. Sasaki, A note on module structures of source algebras of block ideals of finite groups, *J. Algebra* **497** (2018), 92–101.
- [6] H. Sasaki, Cohomology of block ideals of finite group algebras and stable elements, *Algebr. Represent. Theory* **16** (2013), 1039–1049.
- [7] ———, Source algebras and cohomology of block ideals of finite group algebras, *Proc. 46 Symp. Ring Theory and Representation Theory* (I. Kikumasa, ed.), 2014, pp. 209–215.