# Universal decomposition algebras and the classification of 2-generated non-primitive axial algebras of Jordan type

東京大学大学院数理科学研究科　矢部　貴大

Takahiro Yabe
Graduate School of Mathematical Science, the University of Tokyo

## 1 Introduction

本講究録では、軸代数 (axial algebra) と呼ばれる可換非結合的代数で Jordan 型と呼ばれるもので、2 元生成、非原始的であるものの分類について述べる。

軸代数とは、冪等元の生成する可換結合的代数の一般化と見る事の出来る代数であり、[5] において導入された。軸代数は、積作用が半単純であるような冪等元で生成される代数であり、結合性の代わりに fusion 則と呼ばれる条件で制御される。具体的には、以下の様に定義される。$\mathbb{F}$ を体、$\mathcal{F}=(S,\star)$ を $\mathbb{F}$ の部分集合 $S$ と $S\times S$ から $2^S$ への写像 $\star$ の組とする (この組を fusion 則という)。この時、$\mathbb{F}$ 上の可換非結合的代数 $M$ の冪等元 $a$ が $\mathcal{F}$-軸 (axis) であるとは, $a$ 倍作用が対角化可能であり、$M(a,\sigma)$ を $a$ 倍作用の $\sigma$-固有空間とすると $M(a,\sigma_1)M(a,\sigma_2)\subset\bigoplus_{\rho\in\sigma_1\star\sigma_2}M(a,\rho)$ を満たすことを言い、$M$ が $\mathcal{F}$-軸の集合 $A$ によって生成されるとき $M$ を $\mathcal{F}$-軸代数という。ここで、軸 $a$ が原始的とは 1-固有空間が一次元であることをいい、$A$ の元が全て原始的なとき軸代数 $M$ は原始的という。

軸代数は群と強い関連を持つ分野と考えられており、いくつかの群を統一的に扱えるのではないかと研究が進められている。現在、軸代数は次のようにして群と対応させられている。各軸に対して、fusion 則により特徴づけられる次のような自己同型が定義される。まず、fusion 則 $\mathcal{F}=(S,\star)$ に対し群 $G$ と写像 $g:S\to G$ が $S$ の任意の元 $\sigma_1,\sigma_2$ について $g(\sigma_1\star\sigma_2)\subset\{g(\sigma_1)g(\sigma_2)\}$ を満たすとする（このようなとき、$\mathcal{F}$ が $G$-grading を誘導する、という）。このとき、$G$ の指標 $\chi$ と $\mathcal{F}$-軸代数 $M$ 及び $\mathcal{F}$-軸 $a$ に対し $M(a,\sigma)$ を $\chi(g(\sigma))$ 倍するような写像は $M$ の自己同型となる。これを宮本自己同型と呼び、その生成する群を宮本群という。この対応は一般には軸代数の圏から群の圏への関手とはならないが、[1] において宮本群を少し拡大する事によって軸代数の圏から群の圏への関手が定まることが示されている。

Jordan 型の軸代数とは、以下の表の様な fusion 則に従う軸代数である。Jordan 型 fusion 則は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-grading を誘導し、$\xi\neq\frac{1}{2}$ のとき宮本群は 3-互換群と呼ばれるクラスに含まれる（[6]）。また、逆に 3-互換群から松尾代数と呼ばれる Jordan 型軸代数を構成出来る。原始的 Jordan 型軸代数の分類については、[6] において

| $\star$ | $0$ | $1$ | $\xi$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | | $\xi$ |
| $1$ | | $1$ | $\xi$ |
| $\xi$ | $\xi$ | $\xi$ | $0,1$ |

Table 1: Jordan 型 fusion 則

$\xi \neq \frac{1}{2}$ または 2 元生成の時について解決されている。$\xi = \frac{1}{2}$ の場合の完全な分類は未解決である。

もう少し複雑な例として、Majorana 型軸代数がある。これは頂点作用素代数 (VOA) に起源を持つ。モンスター VOA と呼ばれる頂点作用素代数 $V^\natural$ は、

$$V^\natural = V_0^\natural \oplus \bigoplus_{i=2}^{\infty} V_i^\natural$$

という grading と整数で指数づけられた積構造を持ち、最大の散在型有限単純群であるモンスター群が自己同型群となる。この $V_2^\natural$ は Ising fusion 則と呼ばれる以下の表の fusion 則に従う軸代数となる。この fusion 則を一般化した次の fusion 則

| $\star$ | $0$ | $1$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{32}$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{32}$ |
| $1$ | | $1$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{32}$ |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $0,1$ | $\frac{1}{32}$ |
| $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{32}$ | $0,1,\frac{1}{4}$ |

Table 2: Ising fusion 則

が Majorana 型 fusion 則である。Ising fusion 則に従う原始的軸代数は Majorana

| $\star$ | $0$ | $1$ | $\xi$ | $\eta$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | | $\xi$ | $\eta$ |
| $1$ | | $1$ | $\xi$ | $\eta$ |
| $\xi$ | $\xi$ | $\xi$ | $0,1$ | $\eta$ |
| $\eta$ | $\eta$ | $\eta$ | $\eta$ | $0,1,\xi$ |

Table 3: Majorana 型 fusion 則

代数とも呼ばれ、2 元生成なものは [10] や [7] により 9 個存在する事が示されている。2 元生成原始的 Majorana 型軸代数の分類は $\xi \neq \eta$ のときは、標数 5 以外の体上では [11] で、標数 5 の体上では [2] で示されており、$\xi = \eta \neq \frac{1}{2}$ の場合も [12] で示されている。Majorana 代数の宮本群は 6-互換群となり、現在 6-互換群から軸代数を構成する研究が盛んに行われている。

本研究ではこれらの先行研究とは異なり非原始的軸代数を考えた。その動機のひとつは次のような疑問にある。ある軸代数が相異なる型の軸を持つ事はあり得

るのだろうか。そのような例は存在し、例えば2元生成Jordan型軸代数は多くの場合単位的であり、軸$a$に対して$1-a$は$\xi$の代わりに$1-\xi$をパラメータに持つJordan型の軸である。この場合$1-a$もまた原始的であるが、多元生成の場合は一般に$1-a$は原始的でない。このような場合を性制限の数にかかわらず一様に扱いたいと考え非原始的な軸代数の分類を試みた。

# 2 Main result

本研究の主結果は以下の定理である。

**Theorem 2.1.** $\Phi$を$\{0,1\}$の部分集合とし、$\mathcal{F}_\Phi(\eta)$を下の表*4*の様な*fusion*則とする。

　このとき、$\mathcal{F}_\Phi(\eta)$-軸代数は、$\Phi \neq \{0,1\}$かつ$\eta \neq \frac{1}{2}$の時以下の表*5*、*6*の*16*の代数のどれかと一致する。.

| $\star$ | $0$ | $1$ | $\eta$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $\Phi$ | $\eta$ |
| $1$ | $\Phi$ | $1$ | $\eta$ |
| $\eta$ | $\eta$ | $\eta$ | $0,1$ |

Table 4: The fusion rule $\mathcal{F}_\Phi(\eta)$

　原始的なとき、$0\star 1=\emptyset$が$M(a,1)=\mathbb{F}a$より従う。.

| $M$ | $\lvert\mathcal{A}^c\rvert$ [1] | D [2] | $d$ [3] | $\mathrm{D_e}(a)$ [4] | $R_M$ [5] |
|---|---|---|---|---|---|
| 1A | 1 | 1 | 1 | $(1,0,0)$ | $\bigoplus_{i=-1}^{1}\mathbb{F}\hat{a}_i \ominus \mathbb{F}(\hat{q}-(\eta+1)\hat{a}_0)\oplus\mathbb{F}s_j$ with $j=0$ or $1$ <br> $\bigoplus_{i=-1}^{0}\mathbb{F}(\hat{a}_{i+1}-\hat{a}_i)\oplus\mathbb{F}(\hat{q}-(\eta+1)\hat{a}_0)\oplus\bigoplus_{j=0}^{1}\mathbb{F}s_j$ |
| $\widehat{1\mathrm{A}}$ | 2 | 2 | 2 | $(2,0,0)$ <br> or $(1,1,0)$ | $\bigoplus_{i=-1}^{0}\mathbb{F}(\hat{a}_{i+1}-\hat{a}_i)\ominus\mathbb{F}(\hat{q}-(\eta+1)\hat{a}_0)\oplus\mathbb{F}s_j$ <br> with $j=0$ or $1$ |
| 2A | 2 | 2 | 2 | $(1,1,0)$ | $\bigoplus_{i=-1}^{1}\mathbb{F}\hat{a}_i \oplus \mathbb{F}(\hat{q}-(\eta+1)\hat{a}_0)$ |
| $\widehat{2\mathrm{A}}$ | 2 | 2 | 3 | $(2,1,0)$ | $\bigoplus_{i=-1}^{0}\mathbb{F}(\hat{a}_{i+1}-\hat{a}_i)\oplus\mathbb{F}(\hat{q}-(\eta+1)\hat{a}_0)$ |
| $3\mathrm{C}(\eta)$ | 3 | 3 | 3 | $(1,1,1)$ | $\mathbb{F}s_0\oplus\mathbb{F}s_1\oplus\mathbb{F}(\hat{q}-(\hat{a}_{-1}+\hat{a}_1+\hat{a}_0))$ |
| $\widehat{3\mathrm{C}}(\eta)$ | 3 | 3 | 4 | $(2,1,1)$ | $\mathbb{F}s_0\oplus\mathbb{F}s_1$ |
| $3\mathrm{C}^0(\eta)$ | 6 | 4 | 4 | $(2,1,1)$ <br> or $(1,2,1)$ | $\mathbb{F}s_i\oplus\mathbb{F}(\hat{q}-(\hat{a}_{-1}+\hat{a}_1+\hat{a}_0))$ with $i=0$ or $1$ |
| $3\mathrm{C}^{00}(\eta)$ | 6 | 4 | 5 | $(2,2,1)$ | $\mathbb{F}(\hat{q}-(\hat{a}_{-1}+\hat{a}_1+\hat{a}_0))$ |
| $\widehat{3\mathrm{C}}^0(\eta)$ | 6 | 4 | 5 | $(3,1,1)$ <br> or $(2,2,1)$ | $\mathbb{F}s_i$ with $i=0$ or $1$ |
| $\widehat{3\mathrm{C}}^{00}(\eta)$ | 6 | 4 | 6 | $(3,2,1)$ | $\{0\}$ |

Table 5: $\eta \neq \frac{1}{2}$で一般に定義できる代数

| $M$ | $\|\mathcal{A}^c\|$ | D | $d$ | $\mathrm{D_e}(a)$ | $R_M$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3\mathrm{C}(-1)^\times$ | 3 | 2 | 2 | $(1,0,1)$ | $\mathbb{F}s_0 \oplus \mathbb{F}s_1 \oplus \mathbb{F}(\hat{a}_{-1}+\hat{a}_1+\hat{a}_0) \ominus \mathbb{F}\hat{q}$ |
| $\widehat{3\mathrm{C}}(-1)^\times$ | 3 | 3 | 3 | $(2,0,1)$ | $\mathbb{F}s_0 \oplus \mathbb{F}s_1 \oplus \mathbb{F}\hat{q}$ |
| $3\mathrm{C}^0(-1)^\times$ | 6 | 3 | 3 | $(2,0,1)$ or $(1,1,1)$ | $\mathbb{F}s_i \oplus \mathbb{F}(\hat{a}_{-1}+\hat{a}_1+\hat{a}_0) \oplus \mathbb{F}\hat{q}$ with $i=0$ or 1 |
| $3\mathrm{C}^{00}(-1)^\times$ | 6 | 4 | 4 | $(2,1,1)$ | $\mathbb{F}(\hat{a}_{-1}+\hat{a}_1+\hat{a}_0) \oplus \mathbb{F}\hat{q}$ |
| $\widehat{3\mathrm{C}}^0(-1)^\times$ | 6 | 4 | 4 | $(3,0,1)$ or $(2,1,1)$ | $\mathbb{F}s_i \ominus \mathbb{F}\hat{q}$ with $i=0$ or 1 |
| $\widehat{3\mathrm{C}}^{00}(-1)^\times$ | 6 | 4 | 5 | $(3,1,1)$ | $\mathbb{F}\hat{q}$ |

Table 6: $\eta=-1$ の時のみ現れる代数

但し、以上の表の記号は次のように定める。

- $\mathcal{A}^c$ は次を満たす最小の集合である：
  - $\mathcal{A}^c$ は生成元を全て含む
  - $\tau_a(\mathcal{A}^c) \subset \mathcal{A}^c$ が全ての $a \in \mathcal{A}^c$ について成り立つ。ここで $\tau_a$ は $a$ の誘導する宮本準同形である。.
- D は $\mathrm{Span}\mathcal{A}^c$ の次元である。
- $d$ は代数自体の次元である。
- 軸 $a$ にたいし、$\mathrm{D_e}(a) = (\dim M(a,1), \dim M(a,0), \dim M(a,\eta))$ とする。

さらに、これらの代数全ては代数 $\widehat{3\mathrm{C}}^{00}(\eta)$ の商となっている。$R_M$ は $M \cong \widehat{3\mathrm{C}}^{00}(\eta)/R_M$ を満たすイデアルである。

ここで、$\widehat{3\mathrm{C}}^{00}(\eta)$ は線形空間

$$\mathbb{F}\hat{q} \oplus \bigoplus_{i=-1}^{1} \mathbb{F}\hat{a}_i \oplus \bigoplus_{j=0}^{1} \mathbb{F}s_j$$

に以下の様な積を定める事で得られる。

- $\hat{q}\hat{q} = (\eta+1)\hat{q}\hat{q}$
- $\hat{q}\hat{a}_i = (\eta+1)\hat{a}_i$
- $\hat{a}_i\hat{a}_i = \hat{a}_i$
- $\hat{a}_i\hat{a}_{i+1} = -\frac{1}{2}\hat{q} + \frac{\eta+1}{2}(\hat{a}_i + \hat{a}_{i+1}) + \frac{1-\eta}{2}\hat{a}_{i-1}$ where $\hat{a}_2 = \hat{a}_{-1}$
- $\hat{a}_i s_j = \hat{q}s_j = 0$
- $s_j s_j = s_j$ and $s_0 s_1 = 0$

以上の結果は、”universal object”を利用する事で証明された。本研究において、fusion 則及び生成元の数を固定すると、非原始的軸代数の圏は次のような対象 $M$ を持つ事が示された：

- $M$ はこの圏の始対象である。

- 任意の対象 $N$ に対し、$M$ から $N$ への射で代数の全射準同形になるものが存在する。

このような対象の存在が示せれば、その他の対象は全て $M$ の商としてかける。この $M$ を 2 元生成 Jordan 型軸代数に対して計算すると、それは $\widehat{3\mathrm{C}}^{00}(\eta)$ と同型となり、よって主結果が示される。

## References


[1] T. De Medts, S. F. Peacock, S. Shpectorov and M. Van Couwenberghe, Decomposition algebras and axial algebras, J. algebra 556, (2020), 287–314

[2] C. Franchi, M. Mainardis and S. Shpectorov, An infinite-dimensional generated primitive axial algebra of Monster type, Preprint, arXiv:2007.02430

[3] C. Franchi, M. Mainardis, A note on 2-generated symmetric axial algebras of Monster type, Preprint, arXiv:2101.09506

[4] C. Franchi, M. Mainardis and S. Shpectorov, Quotients if the Highwater algebra and its cover, Preprint, arXiv:2205.02200

[5] J. I. Hall, F. Rehren, and S. Shpectorov, Universal Axial Algebras and a Theorem of Sakuma, J. Algebra 421, (2015), 394–424.

[6] J. I. Hall, F. Rehren, and S. Shpectorov, Primitive axial algebras of Jordan type, J. Algebra 437 (2015), 79–115, arXiv:1403.1898.

[7] A. A. Ivanov, The Monster Group and Majorana Involutions, Cambridge University Press, 2009.

[8] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors of vertex operator algebras, J. Algebra 179 (1996), 523-548.

[9] F. Rehren, Generalized dihedral subalgebras from the Monster, Trans. Amer. Math. Soc. 369, (2017), no. 10, 6953-6986.

[10] S. Sakuma, 6-Transposition Property of $\tau$-involutions of Vertex Operator Algebras, Int. Math. Res. Not. 2007, no. 9, Art. ID mm 030, 19pp.

[11] T. Yabe, On the classification of 2-generated axial algebras of Majorana type, Preprint, arXiv:2002.01871

[12] T. Yabe, On primitive axial decomposition algebras of Majorana type with degenerate eigenvalues, Preprint, arXiv:2106.06517