Leech lattice and holomorphic VOA

宮本雅彦 筑波大名誉教授

(joint work with Ching Hung Lam)

Abstract：この講演では格子の利用に興味を持っている方々を対象とし、リーチ格子とその自己同型群が数理物理で現れる頂点代数をも支配するという新しい魅力を紹介します。

1 ランク 24 の正則正定値偶格子とリーチ格子の最深洞

リーチ格子 Λ はランク 24 の正則正定値偶格子の中でルート元（長さが $\sqrt{2}$ の元) を持たない唯一のものです。ランク 24 の正則正定値偶格子は Niemeier (1973) によって分類されており (ニイマイヤ格子と呼ばれる)、全部で 24 種類あり、リーチ格子以外はすべてランク 24 となるルート系を持ち、ルート構造により格子構造も一意的に決まります。さらに、各格子においては、ルート系の既約成分 (A_n, D_n, E_n) のコクスター数は同一であるという性質を持ち、かつそのようなものはすべて現れます。

格子 L に対して、$\beta \in \mathbb{R}L$ で L の元との距離 $\mathrm{dis}(\beta, L)$ が最大となる点 β を L の deepest hole (最深洞) と呼び、$\mathrm{dis}(\beta, L)$ を深さといいます。通常は deepest hole を単に deep hole と呼んでいます。deep hole は格子の点からの最小距離が最大のものなので、deep hole を中心に深さを半径とする球を考えると、隣接する格子の点（以下 deep hole に隣接すると言います）の個数は最低でもランク以上になります。例えば、$L=\sqrt{2}\mathbb{Z}\times\sqrt{2}\mathbb{Z}$ の場合には、正方形の中心が deep hole で、深さは $\sqrt{2}$ です。またリーチ格子の deep hole の深さも $\sqrt{2}$ です。深さが $\sqrt{2}$ というのは代数的に面白い数字で、L が偶格子の場合には、$\{a-\beta \mid a\in L, ||a-\beta|| = \sqrt{2}\}$ で張られる格子は同じランクのルート系を持つ偶格子となります。この事実を利用して、Sloan-Conway(1982) はニイマイヤ格子とリーチ格子の deep holes の同値類との間に一対一の対応を見出しています。この対応が今日の話の出発点なので少し説明を加えます。利用するのは、内積 $\langle p, q\rangle = -1, \langle p, p\rangle = \langle q, q\rangle = 0$ で与えられるランク 2 のローレンティアン格子 $II_{1,1} = \mathbb{Z}p + \mathbb{Z}q$ です。β を Λ の 原点に隣接する deep hole とします。β の長さを $\sqrt{2}$ です。この時、$\Lambda \oplus II_{1,1} \simeq II_{25,1}$ において、$\widetilde{\beta} = (\beta, 1, 1)$ は長さ 0 の元（i.e. isotropic 元) となり、$\Lambda \oplus II_{1,1}$ において $\widetilde{\beta}^{\perp}/(\mathbb{R}\widetilde{\beta}\cap II_{25,1})$ はランク 24 のニイマイヤ格子となり、$(0, 1, -1)$ の像はルート元です。

一方、L を Coxter 数 h のニイマイヤ格子とすると、L のルート系 $R(L)$ はランク 24 で、単純 simple laced ルート系 (即ち A_n, D_n, E_n) の直和です。各成分の Weyl 元の和を ρ で表すと、$\widetilde{\rho} = (\rho, h, h+1) \in \mathbb{R}L \oplus \mathbb{R}II_{1,1}$ は isotropic 元となり、それによる直交補格子

$$\widetilde{\rho}^{\perp}/(\mathbb{R}\widetilde{\rho}\cap II_{25,1})$$

がルートを含まない正則正定値偶格子（即ち、 リーチ格子）となります。しかも、上記の 2 つの対応がお互いの逆対応になります。今日の話では、これと非常に類似した現象がランク 24 の強正則頂点代数においても起こっていることを紹介します。

2　格子頂点代数と格子における手法

まず重要な事実として、各偶格子から格子頂点代数と呼ばれる非常に面白いものが構成できます。どんなものかと言えば、ピカソの現代絵画のスタイルの 1 つと同じものです。ピカソ自身が自分の絵画の説明で述べているように、1 つのものを色々な側面から眺め、それを 1 つの絵画として再構成するというものです。今回は、1 つの格子を複数の面から眺め、それらを微分を持つ代数構造として組み立てます。

第一の側面として、格子 L から決まる内積空間 $(\mathbb{R}L, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を考え、高階微分を別々のものと表記するために、$\mathbb{R}L$ を係数とする多項式環 $\mathbb{R}L[t^{-1}]$ を考えます。さらに可換積を考えるために $\mathbb{R}L[t^{-1}]$ の対称テンソル積代数 $S(\mathbb{R}L[t^{-1}])$ を用意します。別の側面として、 L の加法群構造を捉え、それを上の内積空間と区別するために、twist 群環 $e^L = \oplus_{\ell\in L}\mathbb{R}e^\ell$ で表示します。twist の意味は $\alpha,\beta \in L$ に対して $e^\alpha e^\beta = (-1)^{\langle\alpha,\beta\rangle}e^\beta e^\alpha$ 　を満たすことです。この 2 つの側面を合体させた

$$V_L = S(\mathbb{R}L[t^{-1}]) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}e^L$$

が目的の格子頂点代数の外形です。V_L に次数（またはウエイト wt) を以下のように導入します。群環部分は $\mathrm{wt}(e^\ell) = \frac{\langle\ell,\ell\rangle}{2}$ とし、$S(\mathbb{R}L[t^{-1}])$ での次数は t^{-1} の冪数で与え、それらの和で全体のウエイトを与えます。ウエイト n の元全体で張られる空間を $(V_L)_n$ で表します。V_L のウエイト $0,1$ の空間 $(V_L)_0, (V_L)_1$ は直接見て分かるように

$$(V_L)_0 = (\mathbb{R})1 \otimes e^0, \qquad (V_L)_1 = (\mathbb{R}L)t^{-1} \otimes e^0 + \oplus_{\ell\in L,<\ell,\ell>=2}1\mathbb{R}1 \otimes e^\ell$$

となり、 $(V_L)_1$ には $\mathbb{R}L$ と L のルート元全体で張られています。特に、リーチ格子頂点代数 V_Λ の場合には、$(V_\Lambda)_1 = (\mathbb{R}\Lambda)t^{-1} \otimes e^0$ です。

素晴らしい点は、この 2 つの側面を組み合せたものの中に、それなりに美しい（数理物理的に意味のある）関係式を満たす無限個の積が同時に導入できるということです。この無限個の積を持った代数が頂点代数 (Vertex Algebra, 略して VA) なのです。

頂点代数 V とは物理学的には 2 次元共形場理論の代数部分に対応すると言われています。厳密に定義を述べると長くなるので、今回の話に関係した部分だけを説明します。

(1) まず、V はベクトル空間であって、各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して n-th 積と呼ばれる積（2 項演算）を持っています。左からの積を線形変換と見ると, 各 $v \in V$ に対して、無限個の線形変換 $\{v(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ が与えられていることになります。肝心な性質は、すべての $v, u \in V$ に対して、十分大きな $n \in \mathbb{Z}$ をとると $v(n)u = 0$ であり、局所可換と呼ばれる性質

$$n, m \in \mathbb{Z} \text{ に対して} \qquad [v(n), u(m)] = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} (v(i)u)(n+m-i) \tag{2.1}$$

を満たすことです。それと（他のものに変化を与えない）真空状態 $\mathbf{1} \in V$ という元を考えます。これらだけで後の話はすべて理解できます。特に、ゼロ積 $v(0)$ を考えると、(2.1) は $[v(0), u(m)] = (v(0)u)(m)$ となるので、（特に $[v(0), u(0)] = (v(0)u)(0)$ ）

$$\begin{aligned} v(0)(u(m)w) &= [v(0), u(m)]w + u(m)(v(0)w) \\ &= (v(0)u)(m)w + u(m)(v(0)w) \end{aligned}$$

となります。それゆえ、0 積の作用は微分であり、リー代数の表現となっていることが分かります。

(2) 次に少し有限条件を加えた頂点作用素代数 (Vertex Operator Algebra , 略して VOA) を考えます。これは頂点代数 V の中で自然数次数の有限次元斉次空間の直和分解 $V = \oplus_{n\in\mathbb{N}} V_n$ (V_n で次数 n の斉次空間を表す）を持ち、$V_0 = \mathbb{R}\mathbf{1}$ となるものです。ここで次数と積との関係は $V_i(m)V_j \subseteq V_{i+j-m-1}$ を満たしています。特に、各 $v \in V_1$ の元に対しては、$v(0)$ は次数を保ち、V_1 はゼロ積で有限次元のリー代数となります。しかも、 $v \in V_1$ に対して $\exp(v(0))$ は V の自己同型となります。これを内部自己同型と呼びます。

(3) 頂点代数は代数なのでそれの加群というものを考えることができます。特に、自分自身も加群と見ることができますが、既約加群が自分自身しかないようなものを正則頂点代数と呼びます。例えば、正則格子から構成された頂点代数は正則頂点代数です。(Dong 1993)

それでは、格子頂点代数の積の説明を少しだけしましょう。積の定義は簡単ではありませんが、ここで使うのは $\mathbb{R}Lt^{-1} \subseteq (V_L)_1$ の元の 0-th 積だけです。$\mathbb{R}Lt^{-1}$ の元 αt^{-1} のゼロ積を $\alpha(0)$ で表すと、

$$\alpha(0)S(\mathbb{R}L[t^{-1}]) = 0 \text{ であり } \alpha(0)e^{\ell} = \langle\alpha, \ell\rangle e^{\ell} \tag{2.2}$$

です。これで $\alpha(0)$ の V への作用と自己同型 $\exp(2\pi i\alpha(0))$ が決まります。また $V_L = S(\mathbb{R}L[t^{-1}])\otimes\mathbb{R}e^L$ の構成から、格子 L の自己同型 τ を $\mathbb{R}e^L$ の自己同型 $\hat{\tau}$ に拡張（リフト）し、さらに V_L の自己同型 $\hat{\tau}$ に誘導することができます。これを τ のリフトと呼ぶことにします。τ のリフト $\hat{\tau}$ は内部自己同型の違いを無視すると一意的に決まります。

2.1 軌道構成

ここでは格子の変形の頂点代数版の話をします。L を正則偶格子とし、$\langle a, a\rangle \in 2\mathbb{Z}$ を満たす $\mathbb{Q}L$ の元 a を取ると、$L + a$ は 加法で L-加群と見ることができます。この時、$L_a = \{\ell \in L \mid \langle \ell, a\rangle \in \mathbb{Z}\}$ は L の部分格子であり、$L_a + a$ は $L + a$ の中で、偶数の自己内積を持つ元の集まりです。さらに、これを拡張して新しい偶格子 $\tilde{L} = L_a + \mathbb{Z}a$ が構成できます。これと同じような現象が頂点代数でも起こります。その説明を円滑に行うために、L を乗法群 e^L で考えてみます。すると、

$$g(e^{\ell}) = \exp(2\pi i\langle a, \ell\rangle)e^{\ell}$$

で定義される g は群環 $\mathbb{R}e^L$ の自己同型ですし、$(\mathbb{R}e^L)^{<g>} = \mathbb{R}e^{L_a}$ です。また、 V_L のウエイトの定義で使った $\mathrm{wt}(e^{\ell}) = \frac{\langle \ell,\ell\rangle}{2}$ で考えてみると、偶數の自己内積を持つ元 $\ell \in L + a$ とは skew 群環 $\mathbb{R}e^L$ の加群 $\mathbb{R}e^{L+a}$ において e^{ℓ} が整数ウエイトを持つことに対応しています。これを頭に入れて、頂点代数の話に移ります。

V を正則 VOA とし、g を位数 n の V の自己同型とします。すると、g による固定部分代数 $V^{<g>}$ と（ e^{L+a} に対応している）g-twisted 加群 $T(V)$ というのが一意的に決まります。頂点代数の加群の性質として、作用は次数を整数差しか変形しないので、$T(V)$ は通常の加群ではなく、 $V^{<g>}$-加群です。$T(V)$ はこの加群としてみると、以下の性質 (1),(2) を満たす n 個の既約加群 T^j の直和 $T(V) = T^1 \oplus \cdots \oplus T^n$ となります。ここで

(1) 各 j に対して T^j の元のウエイトは $\mathbb{Z}$ を法として一意的に決まり、

(2) $\mathrm{wt}(T^i) \equiv \mathrm{wt}(V^1) + (i-1)/n \pmod{\mathbb{Z}}$ を満たしています。

この設定で、さらに T^1 が整数ウエイトの元を含む場合には、少し強い条件（強頂点代数）の下で、$V^{<g>}$ と T^1 同士 の複数回のフージョン積 $\boxtimes$（テンソル積のようなもの）とを合わせると、新しい頂点作用素代数

$$\tilde{V} = V^g \oplus T^1 \oplus (T^1 \boxtimes T^1) \oplus \cdots \oplus (\overbrace{T^1 \boxtimes \cdots \boxtimes T^1}^{n-1})$$

が構成できることが知られています。この構成法が軌道構成と呼ばれるものです。特別な例として、格子頂点代数 V_L を自己同型 $g = \exp(2\pi i\alpha(0))$ で軌道構成した場合には、$T(V) = V_{L+\alpha}$ であり、$\tilde{V} = V_{\tilde{L}}$ となります。

2.2 直和とテンソル積

２つの頂点代数 V と U に対して、ベクトル空間のテンソル積 $V \otimes U$ に

$$(v \otimes u)(n)(v' \otimes u') = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v(m)v' \otimes u(n-m-1)u'$$

として積を定義すると、$V \otimes U$ も頂点代数となります。格子頂点代数の場合には、$V_L \otimes V_{L'} \simeq V_{L \oplus L'}$ となっています。

2.3 直交補空間と Commutant

格子 L の部分集合 S に対して、S の直交補格子 $S^\perp = \{\ell \in L \mid \langle \ell, S \rangle = 0\}$ が定義されます。この概念も頂点代数に拡張できます。V を頂点代数とし、$H \subseteq V$ に対して、

$$\mathrm{Comm}(V, H) = \{v \in V \mid u_m v = 0 \quad \forall u \in H, m \geq 0\}$$

も部分頂点代数となります。

3 ランク (中心電荷)24 の強正則頂点作用素代数

ランク c の強正則頂点作用素代数 V が存在すると、その指標 $\mathrm{ch}_V(\tau) = e^{-2\pi i c/24} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\dim V_n) e^{2\pi i n \tau}$ が $SL(2, \mathbb{Z})$ のモジュラー関数となることから、V のランク c が自然数で 8 の倍数となることが分かります。ランクが 8 や 16 の時には、そのような頂点代数は格子頂点作用素代数だけです。しかし、ランクが 24 になったとたんに格子頂点代数ではないものが現れ、現在までに 24 個の格子頂点代数と合わせて 71 種類見つかっています。$V_1 \neq 0$ でない（非ムーンシャイン型）のランク 24 の強正則頂点作用素代数は色々な人たちによって構成され、その分類もすでに完成しています。しかも、格子の時と同じように、ウエイト 1 空間 V_1 のリー代数の構造だけで V の構造が一意的に決まることも確認されています。確認という言葉を使ったのは、これらの証明は個別毎の証明になっているからです。丁度、格子の分類における Niemeier の結果に対応しています。その後、Sven Möller と Nils R. Scheithauer (2015) により、$V_1 \neq 0$ のランク 24 の強正則頂点代数 V から適切な軌道構成を行うとリーチ格子頂点代数 V_Λ が構成できることが示されました。この軌道構成の逆を辿ると、リーチ格子頂点代数 V_L から軌道構成によってランク 24 の非ムーンシャイン型強正則頂点作用素代数がすべて構成できるわけです。当然同じ V を作る

V_Λ の自己同型は複数あるわけですが、その中で良い条件を満たす自己同型を Conway-Sloan の Holly construction で使われた deep hole の名前を取って generalized deep hole と名づけました。

彼らの結果に触発されて、Conway-Sloan が与えたローレンティアン格子の isotropic 元を利用したニイマイヤ格子の構成法も、頂点作用素代数に対しては、片方だけですが出来ています。

定理 (Chigira-Lam-M 2022) $V_{\mathrm{II}_{1,1}}$ でランク 2 のローレンティアン格子頂点代数を表します。V をランク 24 の強正則頂点作用素代数で、$0 \neq V_1$ が半単純リー代数となるものとします。V_1 のカルタン代数 H とルート系を決め、ρ を V_1 のワイル元とします。この時、$\widetilde{\rho} = (\rho, 1, <\rho, \rho>/2) \in H \oplus \mathbb{R}II_{1,1}$ は isotropic 元となり、$Z = \mathbb{Z}\widetilde{\rho}$ はランク 1 の格子です。$Z \subseteq H \oplus \mathbb{R}II_{1,1}$ と見て、V_Z を $V \otimes V_{\mathrm{II}_{1,1}}$ の部分代数とみることができます。この時、次の同型が成り立ちます。

$$\mathrm{Comm}(V \otimes V_{\mathrm{II}_{1,1}}, V_Z)/V_Z \simeq V_\Lambda$$

この構成は V の内部自己同型 $g = \exp(2\pi i \rho(0))$ による軌道構成と本質的に同じです。しかも、フュージョン積を使わないので、必要とする条件が少なくて済みます。

3.1 generalized deep hole とリーチ格子の deep hole の関係

V_Λ の自己同型は Λ の自己同型 τ のリフト $\widehat{\tau}$ と内部自己同型 $\exp(2\pi i\beta(0))$ $(\beta \in (\mathbb{R}\Lambda)^{<\tau>})$ の積で掛けます。それでは、上の定理で使われた軌道構成の逆構成を与える V_Λ の自己同型 $\widehat{\tau}\exp(2\pi i\beta(0))$ とはどのようなものでしょうか？これへの解答が今回の我々の主結果 (Lam-M 2023) なので説明して行きましょう。まず次の集合

$$\mathcal{P} = \left\{ \tau \in O(\Lambda) \mid \begin{array}{l} \beta \in (\mathbb{R}L)^{<\tau>} \text{ が存在して} \\ V_\Lambda \text{ から } \widehat{\tau}\exp(\beta(0))\text{-軌道構成された } V \text{ が } V_1 \neq 0 \text{ となる正則頂点代数} \end{array} \right\}$$

を考えます。最初の結果は、

命題 1 $\mathcal{P} \subseteq \{1A, 2A, 2C, 3B, 4C, 5B, 6E, 6G, 7B, 8E, 10F\}$

上の共役類表記は *Atlas* に従っています。右の集合を $\tilde{\mathcal{P}}$ で表すことにします。

この証明の概略を説明します。Lepowsky(1985) の結果により、Λ の自己同型 τ のリフト $\widehat{\tau}$ による $\widehat{\tau}$-twist 加群の構造は分かります。特に、その最小ウエイト $\phi(\tau)$ は τ の巡回表示だけで簡単に求まります。$\widehat{\tau}$ に内部自己同型を加えた軌道構成を考えた場合に、$V_1 \neq 0$ となる為には、τ の任意の冪 τ^m に対して、$\phi(\tau^m) = 1 - \frac{1}{|\tau^m|}$ という条件を満たす必要があります。この性質を満たしているのが、上記の 11 共役類だけなのです。

上記の $\tilde{\mathcal{P}}$ に対して Harada-Lung (1990) に載っている表を使うと、注目すべき結果を得ます。

命題 2 $\tau \in Co.0$ に対して、 $\pi : \mathbb{R}\Lambda \to \mathbb{R}\Lambda^\tau$ で射影を表す。この時、$\tau \in \tilde{\mathcal{P}}$ に対しては、

$$\text{同相写像} \quad \mu : \sqrt{\ell}\pi(\Lambda) \to \Lambda^\tau$$

が存在する。ここで、Λ^τ は固定点集合で、ℓ は τ の標準リフトの位数です。

この同相写像と $\sqrt{\ell}$ 倍を使うと、Chigira-Lam-M の証明から、$\tilde{\mathcal{P}}$ のすべての元に対して、適切な β が見つかり、$\mathcal{P}=\tilde{\mathcal{P}}$ です。さらに、次の結果が出てきます。

定理 3 V を $V_1 \neq 0$ となるランク 24 の強正則頂点代数とする。この時、V_Λ から軌道構成によって V を構成する自己同型 $g=\hat{\tau}\exp(2\pi i\beta(0))$ における β として、$\mu(\beta)$ が リーチ格子の原点に隣接する τ-不変 *deep hole* を取れる。しかも、この逆も成り立つ。

この様に、Möller と Scheithauer が Holly construction の deep hole から名前を取って、自己同型に generalized deep hole と名づけたが、なんと実際にリーチ格子 Λ の原点に隣接する（自己同型不変な）deep hole から上の同相写像 $(1/\sqrt{\ell}$ 倍$)$ を通して構成されたものだったのです。

これらの証明においては、基本的に、これまでの分類結果や構成結果を利用していないことも記しておきます。最後に、この構成の応用として、次の問題に答えてみましょう。

質問：　V_1 はリー代数です。ではそのルート格子をリーチ格子の τ-不変な deep hole の立場から説明できるでしょうか？

解答:　α を原点に隣接する τ-不変な deep hole で、$g=\hat{\tau}\exp(2\pi i\mu(\alpha)(0))$ による軌道構成が V とします。この時、α は deep hole なので、$N=\Lambda_\alpha+\mathbb{Z}\alpha$ はルートを持つニイマイヤ格子となり、τ は自然に N の自己同型になります。この時、 V_1 のルート格子は $\frac{1}{\sqrt{\ell}}\mu(N^{<\tau>})$ と同型になります。

参考文献

[1] N. Chigira, C.H. Lam and M. Miyamoto, *Orbifold construction and Lorentzian construction of Leech lattice vertex operator algebra*, *J. Algebra*, **593** (2022), 26-71.

[2] K. Harada and M. L. Lang, On some sublattices of the Leech lattice, *Hokkaido Mathematical Journal*, **19** (1990), 435–446.

[3] C. H. Lam and M. Miyamoto, A lattice theoretical interpretation of generalized deep holes of the Leech lattice vertex operator algebra arXiv:2205.04681

[4] J. Lepowsky, Calculus of twisted vertex operators, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **82** (1985), 8295–8299.

[5] S. Moller, N.R. Scheithauer, Dimension formulae and generalised deep holes of the Leech lattice vertex operator algebra; arXiv:1910.04947.

[6] A.N. Schellekens, Meromorphic $c=24$ conformal field theories, Comm. Math. Phys., 153 (1993), 159–185.