Goldstern の原理と大きな連続体濃度

後藤 達哉 *
神戸大学システム情報学研究科
神戸市灘区六甲台町 1-1
メールアドレス: 202x603x@cloud.kobe-u.jp

概要

Martin Goldstern は [Gol93] において，自然数から自然数への関数によってパラメータ付けされた単調増大な測度 0 集合の族は，その集合たちが一様に $\mathbf{\Sigma}^1_1$ なとき，測度 0 の和集合を持つことを示した．筆者は [Got22] において，この定理から $\mathbf{\Sigma}^1_1$ の仮定を外した原理が ZFC から無矛盾であることを示した．その証明で使われたモデルにおいて連続体濃度が $\aleph_2$ であるため，連続体濃度が $\aleph_3$ 以上でかつその原理が成り立つことがありえるか，という問が残された．本稿ではこの問を考察する．

1 Goldstern の原理とは

Martin Goldstern は [Gol93] において次を示した．

定理 1. $A \subseteq \omega^\omega \times 2^\omega$ を $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合とする．各 $x \in \omega^\omega$ について

$$A_x := \{y \in 2^\omega : (x, y) \in A\}$$

が測度 0 だと仮定する．また，$(\forall x, x' \in \omega^\omega)(x \leq x' \Rightarrow A_x \subseteq A_{x'})$ を仮定する．このとき $\bigcup_{x \in \omega^\omega} A_x$ もまた測度 0 である．

ここに ω^ω の元 x, x' について $x \leq x'$ とは全ての $n \in \omega$ について $x(n) \leq x'(n)$ であるという関係である．また，2^ω には標準的なコイントス測度を入れている．

この定理において，$\mathbf{\Sigma}^1_1$ の仮定をどこまで外せるか，という疑問は自然なものである．集合の複雑性の仮定を完全に外したバージョン，すなわち次の主張を [Got22] では GP(all) と呼んだ．

定義 2. GP(all) とは次の主張である．任意の $A \subseteq \omega^\omega \times 2^\omega$ であって，各 $x \in \omega^\omega$ について $A_x := \{y \in 2^\omega : (x, y) \in A\}$ が測度 0 であり，$(\forall x, x' \in \omega^\omega)(x \leq x' \Rightarrow A_x \subseteq A_{x'})$

* 本研究は JSPS 科研費 JP22J20021 の助成を受けたものである．

なものについて，$\bigcup_{x\in\omega^\omega} A_x$ もまた測度 0 である．

連続体仮説を仮定したら，GP(all) の否定が導かれることはかんたんな考察により分かる．次が [Got22] の主定理 (Theorem 4.4) である．

定理 3. Laver モデルにおいて，GP(all) が成り立つ．

ここに，Laver モデルとは，連続体仮説が成り立つ基底モデル V から出発し，Laver 強制法の可算台による長さ ω_2 の反復強制法で得られるジェネリック拡大を指す．

次のセクション 2で準備を行った後，セクション 3で定理 3の略証を与える．

2 GP(all) の特徴付け

ω^ω の元 x, x' について $x \leq^* x'$ とは有限個を除いた全ての $n \in \omega$ について $x(n) \leq x'(n)$ であるという関係とする．GP(all) の定義において関係 $\leq$ ではなく $\leq^*$ を使っても全く同値な原理を生じることはかんたんに分かる．

仮定 $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ のもとでは GP(all) には扱いやすい特徴付けがある．

補題 4 ([Got22, Theorem 4.2])**.** $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ を仮定し，この両者を κ とする．すると次の 2 つの主張は同値である．

1. GP(all).
2. κ で添字付けられた測度 0 集合の単調増加列について，その和集合はまた測度 0 である．

この補題の証明は省略する．

3 Laver モデルにおいて GP(all) が成り立つ

定義 5. Laver 強制法 $\mathbf{LT}$ とは次の強制概念である．まず，台集合は,

$$\begin{aligned}\mathbf{LT} = \{T : T \text{ は } \omega^{<\omega} \text{ の完全部分木であり，} \\ \text{この木の幹以上の全ての節は無限個の直後の元を持つ}\}\end{aligned}$$

であり，$T, T' \in \mathbf{LT}$ に対して，順序 $T' \leq T$ は通常の包含関係 $T' \subseteq T$ である．

次の事実の証明については [BJ95] の 7.3.D 節を参照せよ．

事実 6. Laver 強制法は次の性質を満たす．

(1) proper 強制法である．

(2) 強制概念の濃度は $\mathfrak{c}$ である．

(3) dominating real を付け加える．

(4) Lebesgue 外測度を保存する．

proper 強制法の一般論と (2) により，Laver 強制法の任意の長さ $\alpha(\leq \omega_2)$ の可算台反復は $\aleph_2$ 連鎖条件を持つ．また，(4) については，実際にはより強い，可算台反復で保たれるような条件があるので，Laver 強制法の任意の長さ $\alpha(\leq \omega_2)$ の可算台反復は Lebesgue 外測度を保存する．(3) より，Laver モデルでは $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mathfrak{c} = \aleph_2$ となることが分かる．

次が鍵となる補題である．

補題 7 ([Got22, Lemma 4.3])**.** 連続体仮説を仮定する．$\langle P_\alpha, \dot{Q}_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ を proper 強制概念の可算台反復とし，各 $\alpha < \omega_2$ について

$$\Vdash_\alpha |\dot{Q}_\alpha| \leq \mathfrak{c}$$

を仮定する．$\langle \dot{X}_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ を P_{ω_2} 名前の列で

$$\Vdash_{\omega_2} (\forall \alpha < \omega_2)(\dot{X}_\alpha \text{は測度 } 0)$$

を満たすものとする．このとき集合

$$\begin{aligned} S = \{\alpha < \omega_2 :\ & \mathrm{cf}(\alpha) = \omega_1 \text{かつ} \\ & \Vdash_{\omega_2} \text{“}\langle \dot{X}_\beta \cap V[\dot{G}_\alpha] : \beta < \alpha \rangle \in V[\dot{G}_\alpha] \text{ かつ} \\ & (\forall \beta < \alpha)(\dot{X}_\beta \cap V[\dot{G}_\alpha] \text{ は測度 } 0)^{V[\dot{G}_\alpha]}\text{”}\}. \end{aligned}$$

は ω_2 の定常集合である．

略証． 各ステージ $\alpha < \omega_2$ での実数の名前全体の枚挙を取り，その各々の実数が $\dot{X}_\beta$ に入るかどうかを決定する条件からなる極大反鎖を取る．$\aleph_2$ 連鎖条件より，おのおのの極大反鎖は途中のステージに収まる．また，各 $\dot{X}_\beta$ を含む測度 0 な Borel 集合のコードの名前を固定しておく．この名前も一つ一つは途中のステージで出てくる．以上の情報の閉包点が S の元になる． □

定理 3の略証． $\langle P_\alpha, \dot{Q}_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ を可算台反復で $\Vdash_\alpha \dot{Q}_\alpha = \mathbf{LT}$ (for all $\alpha < \omega_2$). とする．G を (V, P_{ω_2}) ジェネリックフィルターとする．$V[G]$ で測度 0 集合の単調増加列 $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ を取る．補題 7の定常集合 $S \subseteq \omega_2$ を考える．

$\alpha \in S$ を固定する．$B_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta \cap V[G_\alpha]$ とおく．商強制概念 P_{ω_2}/G_α は Lebesgue 外測度を保存するので，B_α は $V[G_\alpha]$ の中でも測度 0 である．

各 $\alpha \in S$ について，測度 0 な Borel 集合のコード c_α で $B_\alpha \subseteq \hat{c}_\alpha$ なものを $V[G_\alpha]$ の中でとる．$\mathrm{cf}(\alpha) = \omega_1$ であるので，各 c_α はそれより前のステージで現れる．すると Fodor の補題と各ステージでの実数の個数が $\aleph_1$ なことを使って c_α たちを一つの c に集中させることができる．すると $V[G]$ の中で $\bigcup_{\alpha < \omega_2} A_\alpha \subseteq \hat{c}$ を得る． □

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{cov}(\mathsf{null}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathsf{meager}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathsf{meager}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathsf{null}) \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathsf{null}) \arrow[uu] \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathsf{meager}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{cov}(\mathsf{meager}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathsf{null}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

図 1　Cichoń の図式

4　GP(all) と大きな連続体濃度

定理 3の証明で使った Laver モデルは，当然のことながら，連続体濃度を $\aleph_2$ とするモデルである．そこで，連続体濃度を $\aleph_3$ 以上にしつつ GP(all) も成り立つモデルを探したい．

GP(all) には 3 つの必要条件が分かっている．

定理 8． GP(all) を成り立たせるには次の 3 つの条件がすべて必要である：

1. $\mathrm{add}(\mathsf{null}) \neq \mathfrak{b}$,
2. $\mathrm{non}(\mathsf{null}) \neq \mathfrak{b}$,
3. $\mathrm{non}(\mathsf{null}) \neq \mathfrak{d}$.

そこで Cichoń の図式と照らし合わせて考えると，すぐに思いつくのは Martin の公理などを強制して $\mathfrak{b}$ を大きくしたのち，ランダム実数を非可算個付け加え，$\mathrm{non}(\mathsf{null})$ を小さくする方法である．

しかしこれはうまくいかない．というのも，Martin の公理を強制した段階で，GP(all) は成り立っておらず，よって補題 4の特徴づけより和集合が測度 0 でない長さ $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ の測度 0 集合の列が存在する．ランダム強制法は Lebesgue 外測度を保存するので，そのことはランダム実数を付け加えた最後のモデルでも成り立つ．よって，最後のモデルで GP(all) は成り立っていない．

そこで，次に検討すべきは Laver モデルの上にランダム実数を $\aleph_3$ 個加えたモデルである．

このモデルを生ずる強制法について，補題 7の類似物は得られた．

補題 9. 連続体仮説を仮定する．$\langle P_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ を Laver 強制法の可算台反復とする．$P = P_{\omega_2}$ とおき，$P \Vdash$ “$\dot{Q}$ は添字集合 ω_3 のランダム代数である” とおく．

$\dot{G}$ を $P * \dot{Q}$ の標準的なジェネリックフィルターの P への射影の名前とし，$\dot{H}$ を $P * \dot{Q}$ の標準的なジェネリックフィルターの $\dot{Q}$ への射影の名前とする．

$\langle \dot{X}_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ を $P * \dot{Q}$ 名前の列で

$$\Vdash_{\omega_2} (\forall \alpha < \omega_2)(\dot{X}_\alpha \text{は測度 } 0)$$

を満たすものとする．

このとき $\gamma^* < \omega_3$ と全単射 $F \colon \omega_2 \to \gamma^*$ が存在して，集合

$$\begin{aligned} S = \{\alpha < \omega_2 :\ & \mathrm{cf}(\alpha) = \omega_1 \text{かつ} \\ & \Vdash_{\omega_2} \text{“}\langle \dot{X}_\beta \cap V[\dot{G}_\alpha][\dot{H} \restriction F\text{“}\alpha] : \beta < \alpha \rangle \in V[\dot{G}_\alpha][\dot{H} \restriction F\text{“}\alpha] \text{ かつ} \\ & (\forall \beta < \alpha)(\dot{X}_\beta \cap V[\dot{G}_\alpha][\dot{H} \restriction F\text{“}\alpha] \text{ は測度 } 0)^{V[\dot{G}_\alpha][\dot{H} \restriction F\text{“}\alpha]}\text{”}\}. \end{aligned}$$

は ω_2 の定常集合である．

あとは，商強制法 $P * \dot{Q} / (P_\alpha * (\dot{Q} \restriction F\text{“}\alpha))$ が外測度を保存すれば証明が終わるが，それを証明出来ていない．

参考文献

[BJ95] Tomek Bartoszyński and Haim Judah. *Set Theory: on the structure of the real line.* CRC Press, 1995.

[Gol93] Martin Goldstern. “An Application of Shoenfield’s Absoluteness Theorem to the Theory of Uniform Distribution.” *Monatshefte für Mathematik* 116.3-4 (1993), pp. 237–244.

[Got22] Tatsuya Goto. *Goldstern’s principle about unions of null sets.* 2022. arXiv: `2206.08147 [math.LO]`.