EQUIDISTRIBUTION THEOREMS FOR HOLOMORPHIC SIEGEL CUSP FORMS OF GENERAL DEGREE: THE LEVEL ASPECT

山内 卓也 (東北大学)

Contents

1. 序文

本稿は Henry H. Kim 氏 (トロント大), 若槻聡氏 (金沢大), および, 著者によって得られた ([13],[14] の一般化である)[15] の概説である. 今回は考察する対象を一般次数の正則ジーゲル尖点形式に広げ Hecke 作用素の固有値の等分布性をレベル側面 (Level aspect) に関して論じた. 論文 [13],[14] の状況 (2016 頃) と比べると, 現在では Arthur 跡公式や保型表現の Arthur 分類の理解が進みこれらを応用することに対する敷居が低くなった. また様々な分野の発展が進み, これらと合わせ, 必要なものは独自に開発することで [15] が完成した. この論文の重要な点を主観を交えて述べる (他の共著者がどう思っているかは知らない):

- Arthur 跡公式のレベル側面に関する評価, 特に, ユニポテント共役類からの寄与を個々の共役類に対してではなく一斉に評価したこと. これは Arthur の invariant 跡公式の幾何サイドのレベル側面に関して漸近的な評価を与える. この部分は跡公式の専門家である若槻氏の spherical trace function を無限素点での test 関数に用いるという (非常に重要な) アイデアが効いている (cf. [30]).
- Arthur 跡公式のスペクトルサイドの計算はジーゲル保型形式の重さに比較的緩やかな条件を付けて, カスピダルパートのみが残るようにする. これにより, 幾何サイドの計算と合わせて, 等分布性定理が比較的緩やかな条件で証明される. より精密な結果を得るためには CAP 形式や endoscopic lifts などの小さい群 (endoscopi or twisted endoscopic 群) からの寄与を除いたジーゲル保型形式全体に関する等分布性を証明することは重要である (と著者は考える). これを実行するために Arthur による保型形式の分類 (Arthur 分類) を $Sp(2n)/\mathbb{Q}$ の場合に適用する. その際, 保型形式のレベルを定めるコンパクト群 (主合同部分群) の特性

関数が endoscopic (or twisted endoscopic) transfer でどう移るかを調べる必要がある．この部分には大井氏の結果 [18] を使う．そして Savin の limit multiplicity 公式 [24] を用いて，上記「小さい群からの寄与」を計算する．大井氏の結果が適用できない場合がひとつだけあり，その場合は著者 [32] による (分岐) 底変換に関する明示的基本補題を援用して処理する．

- Low lying zeros をレベル側面に関して議論する際，ジーゲル保型形式の (local または global) new form theory にあたるものが必要になる (次数一般の場合の一般論は現在の所知られていない[1])．これは保型形式のレベルをあげれにつれて conductor または depth が大きいものが十分沢山あるということを主張する際に必要となる．また conductor の平均の下限の計算にも必要となる．この部分は我々の論文 [15, Section 5] で議論されている．アイデアは非常にナイーブな形で local new form に類似する概念を導入することである．しかし，これが有用な概念となるためにはレベルは平方因子でなければならないという欠点がある．
- ジーゲル尖点形式が生成する保型表現を Arthur 分類で理解したとき，ジーゲル尖点形式のレベル，保型表現としての導手もしくは depth の間に成立する関係を理解することも low lying zeros を調べる上では必須である．

  この部分には大井氏の明示的 transfer, depth preserving に関する仕事 [18] と，一般線形群に関する主合同部分群によるレベル，depth, conductor の関係を明確にした宮内氏 (岡山大) と著者による結果 [17] を用いる．

研究の背景や簡単な歴史については既に [31] で説明したのでここでは紹介を省くことにする．次節以降で主結果の紹介を行い証明のアイデアを簡単に説明する．[31] では low lying zeros については触れなかったが今回はそれについても背景も含めある程度詳細に説明を与えた．

2. 主結果の紹介

この節では [15] の主結果と証明の戦略について述べる．記号は論文のものを引用する．

整数 $n \geq 1$ に対して，$G = \mathrm{Sp}(2n)$(文献によっては Sp_n, Sp_{2n} と記される) を $J_n = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$ に付随する階数 n の symplectic 群とする．これは任意の可換環 R に対して，

$$G(R) = \mathrm{Sp}(2n)(R) = \{X \in GL_{2n}(R) \mid {}^tXJ_nX = J_n\}$$

を実現する $\mathbb{Z}$ 上のアフィン群スキームである．また，n 個の整数の組 $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ であって，$k_1 \geq \cdots \geq k_n > n+1$ を満たすものを固定する．$D_{\underline{l}}^{\mathrm{hol}}$ を $G(\mathbb{R})$ の正則離散系列表現であって，Harish-Chandra parameter が $\underline{l} = (k_1-1, \ldots, k_n-n)$ となるものとする．また，$G(\mathbb{R})$ の最高 weight が $\underline{k}$ の代数的表現 $\xi_{\underline{k}}$ であって $D_{\underline{l}}^{\mathrm{hol}}$ の最小 K_∞ タイプと同型となるものをとる．ただし，K_∞ は $G(\mathbb{R})$ の極大コンパクト群．

$\mathbb{A}$ を $\mathbb{Q}$ のアデール環とし，そこから無限素点に対応する成分を除いたものを $\mathbb{A}_f$ とする．素数の有限集合 S_1 および $S = \{\infty\} \cup S_1$ に対して，$\mathbb{Q}_{S_1} := \prod_{p \in S_1} \mathbb{Q}_p$, $\mathbb{A}^S$ を $\mathbb{A}$ から S に対応する成分を除いて得られる環，および $\widehat{\mathbb{Z}}^S := \prod_{p \notin S_1} \mathbb{Z}_p$ とする．$\widehat{G(\mathbb{Q}_{S_1})}$ を $G(\mathbb{Q}_{S_1}) = \prod_{p \in S_1} G(\mathbb{Q}_p)$ のユニタリ双対とし (Fell 位相に関して位相空間とみる)，その上の Planchrel 測度を $\widehat{\mu}_{S_1}^{\mathrm{pl}}$ とする．$G(\mathbb{A}^S)$ のハール測

[1] $n = 2$ に対しては例外同型 $\mathrm{Sp}(4) \sim SO(2,3)$ を用いて [29] の議論が適用できるかもしれないが，例外同型でレベルがどう移るか，multiplicity の決定などまだまだ分かっていないことが多いと思われる．また，$n = 1$ の SL_2 のときですら [16] はあるものの local と global の Whittaker model の理論の整合性が取れておらず，応用に難がある．

度 μ^S を $\mu^S(G(\widehat{\mathbb{Z}}^S))=1$ となるように正規化しておく．$G(\mathbb{A}^S)$ のコンパクト開部分群 U の特性関数を h_U とする．このとき, $\widehat{G(\mathbb{Q}_{S_1})}$ 上の測度 (automorphic counting measure) を

$$\widehat{\mu}_{U,S_1,\xi_{\underline{k}},D^{\mathrm{hol}}_{\underline{l}}}:=\frac{1}{\mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))\cdot\dim\xi_{\underline{k}}}\sum_{\pi^0_{S_1}\in\widehat{G(\mathbb{Q}_{S_1})}}\mu^S(U)^{-1}\,m_{\mathrm{cusp}}(\pi^0_{S_1};U,\xi_{\underline{k}},D^{\mathrm{hol}}_{\underline{l}})\,\delta_{\pi^0_{S_1}} \tag{2.1}$$

によって定義する．ただし, $\delta_{\pi^0_{S_1}}$ は $G(\mathbb{Q}_{S_1})$ のユニタリ表現 $\pi^0_{S_1}$ にサポートを持つ Dirac 測度．また, $m_{\mathrm{cusp}}(\pi^0_{S_1};U,\xi,D^{\mathrm{hol}}_{\underline{l}})$ は以下で定義される:

$$m_{\mathrm{cusp}}(\pi^0_{S_1};U,\xi,D^{\mathrm{hol}}_{\underline{l}})=\sum_{\substack{\pi\in\Pi(G(\mathbb{A}))^0\\ \pi_{S_1}\simeq\pi^0_{S_1},\,\pi_\infty\simeq D^{\mathrm{hol}}_{\underline{l}}}}m_{\mathrm{cusp}}(\pi)\,\mathrm{tr}(\pi^S(h_U)). \tag{2.2}$$

ただし, $\Pi(G(\mathbb{A}))^0$ は $G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ尖点的表現の同型類全体の成す集合であり, $\pi^S=\otimes'_{p\notin S}\pi_p$ である．また, $m_{\mathrm{cusp}}(\pi)$ は $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$ の離散スペクトラムにおける π の重複度である[2].

素因子が S_1 に含まれない整数 N に対して, $K^S(N):=\prod_{p\notin S}K_p(N)$ とおく．ただし, $K_p(N):=\mathrm{Ker}(G(\mathbb{Z}_p)\overset{\mathrm{mod}N}{\longrightarrow}G(\mathbb{Z}_p/N\mathbb{Z}_p))$. $K^S(N)$ は $G(\mathbb{A}^S)$ のコンパクト開部分群である． ヘッケ代数 $C_c^\infty(\mathbb{Q}_{S_1})$ の各元 h に対して, $\widehat{G(\mathbb{Q}_{S_1})}$ 上の関数 $\widehat{h}$ を

$$\widehat{h}(\pi_{S_1})=\mathrm{tr}(\pi_{S_1}(h)),\ \pi_{S_1}\in\widehat{G(\mathbb{Q}_{S_1})}$$

によって定める．素数 p および正整数 κ に対して, $\mathcal{H}^{\mathrm{ur}}(G(\mathbb{Q}_p))^\kappa(\subset C_c^\infty(\mathbb{Q}_p))$ を不分岐 Hecke 代数の元であって高さが κ 以下のもの全体の成す集合とする．高さに関しては [15, (2.2)] を参照されたい．例えば,

$$G(\mathbb{Z}_p)\mathrm{diag}(p^{a_1},\dots,p^{a_n},p^{-a1},\dots,p^{-a_n})G(\mathbb{Z}_p),\ a_i\in\mathbb{Z}\ (1\le i\le n)$$

の特性関数の高さは $\max_{1\le i\le n}\{|a_i|\}$ である．さらに $\mathcal{H}^{\mathrm{ur}}(G(\mathbb{Q}_p))^\kappa_{\le 1}$ によって, $\mathcal{H}^{\mathrm{ur}}(G(\mathbb{Q}_p))^\kappa$ の元であって $G(\mathbb{Q}_p)$ の各元での値の複素絶対値が 1 以下であるもの全体のなす集合とする．

以上の準備の下, 最初の主定理を述べる．

Theorem 2.1. 整数の組 $\underline{k}=(k_1,\dots,k_n)$, $k_1\ge\cdots\ge k_n>n+1$ および正整数 κ に対して, G のみに依存した絶対定数 $a,b>0$ および $c_0>0$ が存在して, $N\ge c_0\prod_{p\in S_1}p^{2n\kappa}$(かつ N の素因子は S_1 に含まれない) ならば, *pure tensor* 元 $h_1\in\bigotimes_{p\in S_1}\mathcal{H}^{\mathrm{ur}}(G(\mathbb{Q}_p))^\kappa_{\le 1}$ に対して

$$\widehat{\mu}_{K^S(N),S_1,\xi_{\underline{k}},D^{\mathrm{hol}}_{\underline{l}}}(\widehat{h}_1)=\widehat{\mu}^{\mathrm{pl}}_{S_1}(\widehat{h}_1)+O\left(\Big(\prod_{p\in S_1}p\Big)^{a\kappa+b}N^{-n}\right)$$

が成り立つ．ただし, 右辺の第二項のランダウの記号の定数は S_1,h_1 および N(上記不等式を満たす限り) に依存しない.

絶対定数 c_0 については Shin-Templier [27] の主結果に依り, a,b はユニポテン元の寄与の計算の部分から定まるものである．a,b を明示することは可能である ([15] の出版版にはそれを載せる予定).

[2] $k_n>n+1$ かつ $\pi_\infty\simeq D^{\mathrm{hol}}_{\underline{l}}$ なので, π は離散スペクトラムのカスピダルパートに寄与する．

この結果を古典的な結果に書き直すと以下のようになる．記号をもう少し準備する．$S_{\underline{k}}(\Gamma(N))$ によって, 次数 n, 重さ $\underline{k}$. レベル $\Gamma(N) := \mathrm{Ker}(G(\widehat{\mathbb{Z}}) \stackrel{\mathrm{mod} N}{\longrightarrow} G(\widehat{\mathbb{Z}}/N\widehat{\mathbb{Z}}))$ のアデリックな正則ジーゲル尖点形式全体のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間とし ([15, Section 2] を参照), その次元を $d_{\underline{k}}(N)$ とする．$S_{\underline{k}}(\Gamma(N))$ の N 外 Hecke 同時固有形式からなる基底 $HE_{\underline{k}}(N)$ を固定する (明らかに $|HE_{\underline{k}}(N)| = d_{\underline{k}}(N)$). 以上の準備の下, 定理 2.1 を書き直すと以下の通りとなる:

Theorem 2.2. 整数の組 $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_n)$, $k_1 \geq \cdots \geq k_n > n+1$ および正整数 κ に対して, G のみに依存した絶対定数 $a > 0, b$ および $c_0 > 0$ が存在して, $N \geq c_0 \prod_{p \in S_1} p^{2n\kappa}$ (かつ N の素因子は S_1 に含まれない) ならば, $\mathrm{tr}(T_h | S_{\underline{k}}(\Gamma(N))) =$

$$\mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})) \cdot \mathrm{vol}(K(N))^{-1} \cdot \dim\xi_{\underline{k}} \cdot h_1(1) + \mathrm{vol}(K(N))^{-1} O\left(\Big(\prod_{p \in S_1} p\Big)^{a\kappa+b} N^{-n}\right)$$

が任意の *pure tensor product* $h_1 \in \bigotimes_{p \in S_1} \mathcal{H}^{\mathrm{ur}}(G(\mathbb{Q}_p))^{\kappa}_{\leq 1}$ に対して成り立つ．ただし, $K(N)^S$ の特性関数 $h := h_1 \otimes h_N$ に対して $T_h := \mathrm{vol}(K(N))^{-1} h_1 \otimes h_N \in C_c^\infty(\mathbb{A}_f)$ と置いた.

上記の結果から直ちに従う応用として佐竹固有値の等分布性を紹介する．以下, 正則ジーゲル尖点形式の佐竹固有値を表現論的に理解するために準備を行う．そのために以下の仮定を設ける:

$$k_1 > \cdots > k_n > n+1. \tag{2.3}$$

残念ながらこの仮定によりスカラー値ジーゲル形式は考察対象から除外される．しかしながら, この仮定を設けることで各 $F \in HE_{\underline{k}}(N)$ に対して, 対応する尖点的保型表現 $\pi_F = \bigotimes'_p \pi_{F,p}$ は任意の素点で tempered であることが既存の結果を用いて確認できる ([15, Theorem 4.3]). 特に, N 割らない素数 p に対して, $\pi_{F,p}$ は unramified かつ tempered である．$\widehat{G(\mathbb{Q}_p)}$ の unramified かつ tempered な class 全体の成す部分空間 $\widehat{G(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{ur,temp}}$ は $\Omega := [0,\pi]^n/\mathfrak{S}_n$ と位相同型である (後者には通常の Euclid 位相を入れる). これにより, 各 $\pi_{F,p}$ に対して Ω の元 $\theta_{F,p} \in \Omega$ が定まる．また, $G(\mathbb{Q}_p)$ の Planchrel 測度 $\widehat{\mu}^{\mathrm{pl}}_{\{p\}}$ を $\widehat{G(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{ur,temp}}$ に制限し Ω に押し出したものを μ_p とする (μ_p の具体的な形は [15, Section 7] を参照). この時, 次が成立する:

Theorem 2.3. 重さ $\underline{k}$ は (*2.3*) を満たすと仮定する．素数 p を固定する．このとき,

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ (p,N)=1}} \frac{1}{d_{\underline{k}}(N)} \sum_{F \in HE_{\underline{k}}(N)} f(\theta_{\pi_{F,p}}) = \int_\Omega f(\theta)\mu_p(\theta), \ \ f \in C_0(\Omega)$$

が成立する[3]. つまり, 集合族 $\{\{\theta_{\pi_{F,p}} \in \Omega \mid F \in HE_{\underline{k}}(N)\}\}_{\substack{N \\ p\nmid N}}$ は測度 μ_p に関して Ω において等分布する.

3. 証明の概略

証明は Shin のアイデアに依る．ただし, 我々の場合は正則保型形式のみを考えるため Arthur-Selberg 跡公式を応用する際に Shin の設定では起こらなかった, ユニポテント元からの寄与を考察する必要がある．この寄与は安定跡公式の観点からみると Arthur の invariant 跡公式を安定化するときに生じる endoscopic subgroups からの寄与を計算することに他ならない (Dalal は [5] においてこれを評価することによって類似の結果を得ている). 定理の主張をスペクトルサイドで再定式化し

[3] $C_0(\Omega)$ は Ω 上の ($\mathbb{C}$ 値) 連続関数全体の成す集合.

それを幾何サイドに移行し Arthur の invariant 跡公式を用いて計算を実行するという大まかな手順であり, 基本方針は [13] と同じである.

Theorem 2.2 の Hecke 代数の元 h_1, h_N および $D_{\underline{k}}^{\mathrm{hol}}$ の pseudo coefficient $f_{\xi_{\underline{k}}}$ に対して,

$$f := \mathrm{vol}(K(N))^{-1} f_{\xi_{\underline{k}}} \otimes h_1 \otimes h_N \in C_c^\infty(G(\mathbb{R})) \otimes \left(\otimes_{p \in S_1} \mathcal{H}^{\mathrm{ur}}(G(\mathbb{Q}_p))^{\kappa}_{\leq 1}\right) \otimes C_c^\infty(G(\mathbb{A}^S))$$

を考える. このとき,

$$\widehat{\mu}_{K^S(N), S_1, \xi_{\underline{k}}, D_{\underline{l}}^{\mathrm{hol}}}(\widehat{h}_1) = \frac{I_{\mathrm{spec}}(f)}{\mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})) \cdot \dim \xi_{\underline{k}}} = \frac{I_{\mathrm{geom}}(f)}{\mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})) \cdot \dim \xi_{\underline{k}}}$$

を得る. ここで, $I_{\mathrm{spec}}(f), I_{\mathrm{geom}}(f)$ はそれぞれ Arthur の invariant 跡 $I(f)$ のスペクトル側 (spectral side) および幾何側 (geometric side) である. スペクトル側は重さの仮定より, residue スペクトルの寄与が消えるので

$$I_{\mathrm{spec}}(f) = \mathrm{Tr}(T_h | S_{\underline{k}}(\Gamma(N)))$$

となる. 他方, 幾何側では Arthur により次の展開が分かっている:

$$I_{\mathrm{geom}}(f) = \sum_{M \in \mathcal{L}} (-1)^{\dim A_M/A_G} \frac{|W_0^M|}{|W_0^G|} \sum_{\gamma \in (M(\mathbb{Q}))_{M,S}} a^M(S,\gamma) I_M^G(\gamma, f_{\xi_{\underline{k}}}) J_M^M(\gamma, h_P).$$

各項に現れる記号の説明は [15] を参照. 右辺の和は有限和であり p を含む素点の有限集合 S は十分大きく選ぶ (S の選択は f に依る). $\mathcal{L}$ は標準 Borel subgroup を含む G の parabolic subgroup $P = MN$ の Levi factor $M = M_P$ 全体の集合である (G も含める). これは有限集合となる. $a^M(S,\gamma)$ は大域係数と呼ばれ γ の中心化の Levi part の Tamagawa measure に近いものである. また $I_M^G(\gamma, f_{\xi_{\underline{k}}})$ は invariant weighted orbital integral と呼ばれこの部分は指標公式 (を修正した極限公式) から具体的に計算可能であり $\underline{k}$ のみに寄る. Orbital integral $J_M^M(\gamma, h_P)$ は $h_1 \otimes h_N$ による. このとき, $I_{\mathrm{geom}}(f)$ を (M,γ) の種類によって次のように分ける:

$$I_{\mathrm{geom}}(f) = I_1(f) + I_2(f) + I_3(f) + I_4(f),$$

- $I_1(f)$: $M = G$ かつ $\gamma = 1$;
- $I_2(f)$: $M \neq G$ かつ $\gamma = 1$;
- $I_3(f)$: $\gamma \neq 1$ は unipotent;
- $I_4(f)$: その他 (non-unipotent な γ の寄与全体).

各項は以下の様に計算される. 次に [27] の結果より, N は Theorem 2.1 の条件 $N > c_0 \prod_{p \in S_1} p^{2n\kappa}$ を満たせば, $I_4(f) = 0$ となる ([27, Lemma 8.4]). 従って, unipotent 元の寄与

$$I_{\mathrm{unip}}(f) := I_1(f) + I_2(f) + I_3(f)$$

を計算すればよい. Planchrel の公式 $\widehat{\mu}_{S_1}^{\mathrm{pl}}(\widehat{h}_1) = h_1(1)$ より, $I_1(f) = \mathrm{vol}(K(N))^{-1} h_1(1) \dim \xi_{\underline{k}}$ となることに注意. 論文 [13] では各 γ に対して, 全ての項を具体的に計算したが今回は $I_{\mathrm{unip}}(f)$ そのものを評価する. ここで若槻氏の spherical trace function を用いるアイデアを援用し, 非自明な操作を幾つか施すことで, 先ず, $k_n \gg 0$ に対して,

$$I_{\mathrm{unip}}(f) = \mathrm{vol}(K(N))^{-1} h_1(1) \dim \xi_{\underline{k}} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} C_{n,r}(\underline{k}) \zeta_r(\widehat{\Phi_{h,r}}, r-n), \ h = h_1 \otimes h_N$$

を示す (新谷の次元公式の計算 [28, Proposition 8] および若槻氏の公式 [30, Theorem 5.17,Corollary 5.18] とも比較されたい). ただし, $C_{n,r}(\underline{k})$ は $n, r, \underline{k}$ にのみ依る定数であり, $\zeta_r(\widehat{\Phi_{h,r}}, s)$ は h, r から定まる $V_r(\mathbb{A}) := \mathrm{Sym}_r(\mathbb{A})$ ($\mathbb{A}$ 係数の r 次対称行列全体の成す集合) 上のシュワルツ関数 $\Phi_{h,r}$([15] の

Lemma 3.2 の直後を参照) のフーリエ変換 $\widehat{\Phi_{h,r}}$ に対する新谷ゼータ関数である. $I_{\rm spec}(f) = I_{\rm unip}(f)$ と上記右辺は $\underline{k}$ の有理関数であることが分かるので, $k_n > n+1$ に対しても上記は正しいことが示される ([15, Theorem 3.7]). よって, $\zeta_r(\widehat{\Phi_{h,r}}, r-n)$, $1 \le r \le n$ を評価すればよい. これらを $\zeta_r(\widehat{\Phi_{h,r}}, r-n)$ の齋藤 裕氏による明示公式 ([22]) に代入して評価するのだが公式および新谷ゼータの性質に応じて

- r が奇数かつ $1 \le r < n$;
- r が偶数かつ $3 < r < n$;
- $r = n$;
- $r = 2 < n$,

の 4 つの場合に分けてそれぞれ評価する. 特に, r が偶数かつ $3 < r < n$ には [12] を援用する.

以上が証明の概略である. 詳細は [15] の 3 節を参照されたい.

4. Genuine 形式への制限

ジーゲル尖点形式の成す空間 $S_{\underline{k}}(\Gamma(N))$ は小さい代数群上の保型形式の Langlands 移送 (Langlands transfer) となっているものを含む. 例えば, $n = 2$ であれば Saito-Kurokawa lifts, Yoshida lifts などがそうである. これらの小さい群上の保型形式から来ない $S_{\underline{k}}(\Gamma(N))$ の元を genuine 形式という. それらの成す空間を $S_{\underline{k}}(\Gamma(N))^{\rm g}$ と表し, その (Petersson 内積による) 直交補空間を $S_{\underline{k}}(\Gamma(N))^{\rm ng}$ とする. それぞれの空間の N の外 Hecke 同時固有関数から成る基底 $HE_{\underline{k}}(N)^{\rm g}$, $HE_{\underline{k}}(N)^{\rm ng}$ を固定する.

この節の目的は任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\frac{\dim S_{\underline{k}}(\Gamma(N))^{\rm ng}}{\dim S_{\underline{k}}(\Gamma(N))} = \frac{|HE_{\underline{k}}(N)^{\rm ng}|}{|HE_{\underline{k}}(N)|} = O(N^{-1+\varepsilon})$$

が N にある条件を課すと成り立つことを説明する[4]. これにより, その条件の下で, Theorem 2.1,Theorem 2.2,Theorem 2.3 における $H_{\underline{k}}(N)$ を $H_{\underline{k}}(N)^{\rm g}$ に置き換えても成立することが分かる.

これを実行するために $G = Sp(2n)/\mathbb{Q}$ に対するアーサー分類 [1] を用いる.

N の外 Hecke 同時固有形式 $F \in HE_{\underline{k}}(N)$ に対して対応する $G(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現を $\pi = \pi_F$ とする. Arthur の分類から π は大域的 A パケットを用いて記述される. これについて以下説明する. (離散的な) 大域的 A パラメータとはシンボル

$$\psi = \pi_1[d_1] \boxplus \cdots \boxplus \pi_r[d_r]$$

であって次の条件を満たすもの:

(1) 各 i $(1 \le i \le r)$ に対して π_i は $\mathrm{GL}_{m_i}(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ尖点的自己双対保型表現である. 特に π_i の中心指標 ω_π は自明または 2 次指標;

(2) 各 i $(1 \le i \le r)$ に対して $d_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ かつ $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} m_i d_i = 2n+1$;

(3) d_i が奇数ならば π_i は orthogonal, すなわち, $L(s, \pi_i, \mathrm{Sym}^2)$ は $s = 1$ で極を持つ;

(4) d_i が偶数ならば, π_i は symplectic, すなわち, $L(s, \pi_i, \wedge^2)$ は $s = 1$ で極を持つ;

(5) $\omega_1^{d_1} \cdots \omega_r^{d_r} = \mathbb{1}$ (右辺は自明指標を表す);

(6) $1 \le i \ne j \le r$ かつ $\pi_i \simeq \pi_j$ ならば $d_i \ne d_j$.

ふたつの大域的 A-パラメータ $\boxplus_{i=1}^{r} \pi_i[d_i]$ および $\boxplus_{i=1}^{r'} \pi'_i[d'_i]$ が同値であるとは

[4] この条件は非常に技術的でありこの条件がなくても主張は成立すると思われる.

- $r = r'$;
- ある $\sigma \in \mathfrak{S}_r$($r$ 次対称群の元) が存在して $d'_i = d_{\sigma(i)}$ かつ $\pi'_i = \pi_{\sigma(i)}$

が満たされるときをいう. 記号 $\Psi(G)$ によって, 大域的 A-パラメータの (上記の意味での) 同値類全体の成す集合とする. 各大域的 A-パラメータ $\psi \in \Psi(G)$ に対して, simple admissible $G(\mathbb{A}_f) \times (\mathfrak{g}, K_\infty)$ 加群の同値類全体の成す集合上の multi-set Π_ψ が定まる ([1, Section 1] または [3, Section 2] を参照). 集合 Π_ψ は ψ に対する大域的 A パケットという. このとき, [1, Theorem 1.5.2](または [3, Theorem 2.2] による記述) により, 次を得る:

$$L^2_{\mathrm{disc}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})) \simeq \bigoplus_{\psi \in \Psi(G)} \bigoplus_{\pi \in \Pi_\psi} m_{\pi,\psi}\pi. \tag{4.1}$$

ただし, $m_{\pi,\psi} \in \{0,1\}$ である. これより次が即座に従う:

Proposition 4.1. $K(N) = \mathrm{Ker}(G(\widehat{\mathbb{Z}}) \stackrel{\mathrm{mod}\ N}{\longrightarrow} G(\widehat{\mathbb{Z}}/N\widehat{\mathbb{Z}})) \subset G(\mathbb{A}_f)$ の特性関数を $1_{K(N)}$ とする. このとき,

$$S_{\underline{k}}(\Gamma(N)) = \bigoplus_{\psi \in \Psi(G)} \bigoplus_{\substack{\pi \in \Pi_\psi \\ \pi_\infty \simeq D^{\mathrm{hol}}_{\underline{l}}}} m_{\pi,\psi}\pi_f^{K(N)}$$

および

$$|HE_{\underline{k}}(N)| = \mathrm{vol}(K(N))^{-1} \sum_{\psi \in \Psi(G)} \sum_{\substack{\pi \in \Pi_\psi \\ \pi_\infty \simeq D^{\mathrm{hol}}_{\underline{l}}}} m_{\pi,\psi}\mathrm{tr}(\pi_f(1_{K(N)})).$$

が成り立つ.

Genuine 形式を定義するために次の概念を導入する.

Definition 4.2. 大域的 A-パラメータ $\psi = \boxplus_{i=1}^r \pi_i[d_i]$ に対して.

- $d_1 = \cdots = d_r = 1$ が成り立つとき ψ は *semi-simple* であるという. そうでないとき, ψ は *non-semi-simple* であるという;
- $r = 1$ かつ $d_1 = 1$ のとき ψ は *simple* であるという.

Proposition 4.1 を用いて genuine 形式を以下に定義する.

Definition 4.3. $HE_{\underline{k}}(N)$ の部分集合であって各元に付随する表現が

$$\bigoplus_{\substack{\psi \in \Psi(G) \\ \psi:\text{non-simple}}} \bigoplus_{\substack{\pi \in \Pi_\psi \\ \pi_\infty \simeq \sigma_{\underline{k}}}} m_{\pi,\psi}\pi_f^{K(N)},$$

に寄与するもの全体の成す集合を $HE_{\underline{k}}(N)^{ng}$ とする. 上記の空間 (または $HE_{\underline{k}}(N)^{ng}$) の元を *non-genuine* 形式という.

同様に $HE_{\underline{k}}(N)$ の部分集合であって各元に付随する表現が

$$\bigoplus_{\substack{\psi \in \Psi(G) \\ \psi:\text{simple}}} \bigoplus_{\substack{\pi \in \Pi_\psi \\ \pi_\infty \simeq \sigma_{\underline{k}}}} m_{\pi,\psi}\pi_f^{K(N)},$$

に寄与するもの全体の成す集合を $HE_{\underline{k}}(N)^g$ とする. 上記の空間 (または $HE_{\underline{k}}(N)^g$) の元を *genuine* 形式という.

上記の Arthur 分類を用いた記述により, $\underline{k}$ が (2.3) と N がある条件を満たすとき, $|HE_{\underline{k}}(N)^{ng}|$ を評価する. $F \in HE_{\underline{k}}(N)^{ng}$ をとり対応する保型表現を $\pi = \pi_F$ とする. π が属する大域的 A パケット Π_ψ の大域的 A-パラメータ $\psi = \boxplus_{i=1}^r \pi_i[d_i]$ は $d_i = 1$ $(1 \le i \le r)$ かつ $r \ge 2$ を満たす ([15, Theorem 4.3]). このとき, $Sp(2n)$ から GL_{2n+1} への twisted endoscopic transfer で π は $\Pi := \boxplus_{i=1}^r \pi_i$ (各 $GL_{m_i}(\mathbb{A})$ の保型表現 π_i の Langlands 和) に移る. ここで [18] の結果を応用することで,

$$\dim \pi^{K(N)} \le \dim \Pi^{K^{GL_{2n+1}}(N)} = d_{P_{m_1,\ldots,m_r}}(N) \prod_{i=1}^{r} \dim(\pi_i)^{K^{GL_{m_i}}(N)}$$

を示すことができる. ただし, $\mathbb{Z}$ 上の代数群 $\mathcal{G}$ に対して, $K^{\mathcal{G}}(N) := \mathrm{Ker}(\mathcal{G}(\widehat{\mathbb{Z}}) \stackrel{\mathrm{mod}\ N}{\longrightarrow} \mathcal{G}(\widehat{\mathbb{Z}}/N\widehat{\mathbb{Z}}))$ とおく. また, 分割 $2n+1 = m_1 + \cdots + m_r$ に対応する GL_{2n+1} の標準パラボリック部分群 $P_{m_1,\ldots,m_r}$ に対して, $d_{P_{m_1,\ldots,m_r}}(N) = |P_{m_1,\ldots,m_r}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \backslash GL_{2n+1}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})|$ とおいた. 従って, 問題は $\pi = \pi_F$ の大域的 A-パラメータに寄与する既約ユニタリ尖点的表現 π_i (の同型類) の個数と $\dim(\pi_i)^{K^{GL_{m_i}}(N)}$ を計算すればよい. これをナイーブに

$$L^2_{\mathrm{cusp}}(GL_{m_i}(\mathbb{Q}) \backslash GL_{m_i}(\mathbb{A}), \tau_\infty) := \bigoplus_{\substack{\pi \in \Pi(GL_{m_i}(\mathbb{A}))^0 \\ \pi_\infty \simeq \tau_\infty}} m(\pi)\pi,\ m(\pi) \in \{0, 1\}$$

(τ_∞ は $GL_{m_i}(\mathbb{R})$ のコホモロジカルな既約許容表現で $\pi_{F,\infty}$ の情報から定まるもの) を用いて上から評価しようとするとこの空間は大きすぎるためよい評価を得ることができない. そこで π_i は m_i の偶奇と中心指標に関して次の三種の群からの transfer として得られる, という事実を用いる ($m_i = 1$ のときは評価は自明なので除外する):

(1) $m_i = 2m+1,\ m \ge 1$ のとき, π_i は $Sp(2m)(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現からの transfer;
(2) $m_i = 2m,\ m \ge 1$ かつ π_i の中心指標が自明であるとき, π_i は $SO(m,m)(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現からの transfer (ただし, $SO(m,m)$ は split orthgonal group);
(3) $m_i = 2m,\ m \ge 1$ かつ π_i の中心指標が非自明であるとき (このとき 2 次指標になる), π_i は $SO(m+1,m-1)(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現からの transfer (ただし, $SO(m+1,m-1)$ は quasi-split orthgonal group で中心指標 (2 次指標) の情報を用いて定義される).

上記, (1),(2) の場合は Arthur 跡公式の指標関係式と Hecke 環のある元の明示的 transfer ([18]) が確立されているので, これを用いて, 次元の評価を $H := Sp(2m)$ または $SO(m,m)$ 上の無限素点の表現が指定されている保型表現の同型類の個数およびそれらの $K^H(N)$-固定部分の次元を計算すればよいことになるが, これは [24] の主結果より従う. ここまではレベル N が奇数であるということ以外は用いていないが (3) の場合を処理するために技術的仮定が必要となる. (3) の場合は指標関係式が知られておらず (Arthur の未発表の preprint の内容) また明示的 transfer の結果も知られていない. この状況を回避するために π_i の 2 次体による base change (cf. [2]) をとることで中心指標を自明化し (2) の場合に帰着する. ここで現れる 2 次体の判別式は考えているレベルと互いに素ではないため ramified base change を考えていることになる. このとき, base change 前と後で合同部分群による固定部分の次元がどう変動するか調べる必要があり, 合同部分群の特性関数の明示的 transfer を確立する必要があるが, それには著者の結果 [32] を用いる. Base change 前後で主合同部分群による固定部分の次元が変化しないための十分条件が N に課される条件である (詳しくは [15, Theorem 1.3] を参照).

5. Low lying zeros への応用

この節の参考文献は [10],[11],[21] である. 特に [10] を一読されることをお勧めする. まず初めに low lying zeros について例を交えて説明する.

リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の零点であって, 実部が $\dfrac{1}{2}$ かつ上半平面にあるもの全体の成す multi-set $\left\{\dfrac{1}{2}+\sqrt{-1}\gamma_i\right\}_{i\geq 1}$ の虚部を

$$0<\gamma_1\leq\gamma_2\leq\cdots$$

と並べ[5](multi-set なので重複度を込めて考えている),

$$\widehat{\gamma}_i=\frac{\gamma_i\log\gamma_i}{2\pi} \tag{5.1}$$

と正規化する. Montgomery [19] は零点のある正規化の分布の密度関数を決定した. しかし, 彼の零点の正規化は (5.1) とは一見異なる. 実際, Montgomery は T 以下の零点 γ を $\gamma\dfrac{\log T}{2\pi}$ と正規化し, $T\to\infty$ の時の分布を考えた. 上記の正規化 (5.1) は [21] で導入されたものである. しかし, [21, p.272 の 1-3 行目] で説明されているように Montgomery の正規化を考えても分布に関する結果は本質的に差はない. よって, Montgomery の結果 [19] から零点の間隔 (spacing)

$$\widehat{\gamma}_i-\widehat{\gamma}_j,\ i\neq j$$

の分布の密度関数が決定される. 正確には, 任意の $\mathbb{R}$ 上の実数値偶シュワルツ関数 ϕ であってそのフーリエ変換 $\widehat{\phi}(y)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\phi(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}xy}dx$ のサポートが開区間 $(-1,1)$ に入るものに対して,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{1\leq i,j\leq N\\ i\neq j}}\phi(\widehat{\gamma}_i-\widehat{\gamma}_j)=\int_{\mathbb{R}}\phi(x)r_2(\mathrm{GUE})(x)dx,\ r_2(\mathrm{GUE})(x):=1-\Big(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\Big)^2 \tag{5.2}$$

が成り立つ. Planchrel formula より,

$$\int_{\mathbb{R}}\phi(x)r_2(\mathrm{GUE})(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\widehat{\phi}(y)\widehat{r_2(\mathrm{GUE})}(y)dy$$

であり,

$$\widehat{r_2(\mathrm{GUE})}(y)=\delta_0(y)+\frac{(-1+y)\mathrm{sgn}(1-y)-(1+y)\mathrm{sgn}(1+y)}{2}+\mathrm{sgn}(y)y$$

(δ_0 は 0 にサポートを持つ Dirac の delta 関数) のサポートは $[-1,1]$ なので, $\widehat{\phi}$ のサポートに制限をつけなくても上記の等式は成り立つであろうと予想されている. いま ϕ は急減少関数なので $\zeta(s)$ の 1/2 から遠い零点は上記等式 (5.2) の左辺への寄与は小さいと考えられ, 本質的な寄与は 1/2 に "近い"零点 (low lying zeros) 達から引き起こされると解釈する. これが low lying zeros の意味である.

Remark 5.1. 一般にシュワルツ関数全体 $S(\mathbb{R}^n)$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ 空間 (より一般に $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\leq p<\infty$ 空間) の稠密部分空間である. $n=1$ のとき, 上記の *(5.2)* のシュワルツ関数を L^2 空間の元でそのフーリエ変換がサポートが開区間 $(-1,1)$ に入るものに置き換えても同様の主張が成立する. この観点は後述する *low lying zeroes* の応用に重要な役割を果たす (本稿 *Section 5.3* を参照).

密度関数 $r_2(\mathrm{GUE})(x)$ は次の解釈を持つ (GUE は Gaussian Unitary Ensemble の略記). 整数 $N\geq 1$ に対して, $G(N):=U(N)(\mathbb{R})=\{A\in M_N(\mathbb{C})\mid {}^t\overline{A}A=I_N\}$ を次数 N のコンパクトユニタ

[5] $\zeta(s)$ の $s=\frac{1}{2}$ での値は非零である. 実際, $\zeta(\frac{1}{2})=-1.46035450\cdots\neq 0$ であることに注意.

リ群とし $G(N)$ 上の不変測度 dA を $\int_{G(N)} dA = 1$ となるように正規化しておく. $G(N)$ の各元 A は対角化可能でありその固有値はいずれも複素絶対値 1 である. よって, それらの偏角を

$$0 \leq \theta_1(A) \leq \cdots \leq \theta_N(A) < 2\pi$$

と並べる. ここで, $\mathbb{R}$ 上の the pair-correlation 測度 $R_2^{(N)}(A)$ を $[a,b] \subset \mathbb{R}$ に対して,

$$R_2^{(N)}(A)[a,b] := \frac{|\{(j,k) \mid 1 \leq j \neq k \leq N, \frac{N}{2\pi}(\theta_j(A) - \theta_k(A)) \in [a,b]\}|}{N}$$

によって定めると, 大数の法則により ($\mathbb{R}$ 上の測度としての) 極限

$$R_2(\mathrm{GUE}) := \lim_{N\to\infty} \int_{G(N)} R_2^{(N)}(A) dA$$

が存在する. このとき $R_2(\mathrm{GUE})$ の密度関数が $r_2(\mathrm{GUE})$ に他ならない. つまり任意の閉区間 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ に対して

$$R_2(\mathrm{GUE})([a,b]) = \int_a^b r_2(\mathrm{GUE})(x)dx$$

(言い換えると $R_2(\mathrm{GUE})$ のラドン・ニコディム微分が $r_2(\mathrm{GUE})$).

このようにゼータの零点の 2 点間の分布はユニタリ群の元の固有値の差 (相関 (correlation)) の分布と関係することが分かる[6]. 特に, ゼータの零点の $s = \frac{1}{2}$ 付近の零点の分布とユニタリ群の元の固有値であって 1 に近いものの分布は類似していることが期待される.

後者の分布は任意の $n \geq 2$ に対して, n-level correlation (n 点間の相関) の分布 (およびその密度関数を求める問題) に拡張される. これは Katz-Sarnak [11] によって, より広いクラスのコンパクト群に対して徹底的に調べられた. これに呼応するように, ゼータ関数の零点の n-level correlation の分布を考えることができ, さらに, ゼータ関数を一般の Langlands L 関数に変えても同様に議論できる [20] (良い成果が得られるかどうかは別として, 少なくとも問題としては設定・考察可能).

この統計は単一の L 関数に対するものであるが, 他方

「性質の似た L 関数の (無限) 族の中で零点分布の統計を取ることを考えよう.」

という見方が "Low lying zeros of a family of L-functions" の哲学である (cf. [7]). 以下に L 関数の族の例を列挙する:

- Dirichlet L 関数の族 (代数群 $\mathcal{G} = GL_1$ の話). 族は Dirichlet 指標の conductor によってパラメーター付けされる;
- Hecke 同時固有正則楕円保型形式の族 (代数群 $\mathcal{G} = GL_2$ または SL_2 の話であり, 族は重さ (weight aspect) またはレベル (level aspect) に関して考える);
- Hecke 同時固有マース保型形式 (C^∞ 級関数) の族 (代数群 $\mathcal{G} = GL_2$ または SL_2 の話であり, 族はラプラシアンの固有値またはレベルに関して考える);
- 上記は SL_2 または GL_2 上の保型形式の話だか, それを一般の簡約代数群に拡張して得られる族.

この流れを受けて, Low lying zeros of families of L-functions の level one density と level n-density に関する成果について述べていく. 主結果の紹介の前に次節以降幾つか準備を行う.

[6] $r_2(\mathrm{GUE})$ や $R_2(\mathrm{GUE})$ の添え字 2 はこの "2 点間" の 2 を意味している.

5.1. **A naive local newform theory と Conductor の下からの評価.** $HE_{\underline{k}}(N)$ が生成する保型表現の conductor を定義し, 下からの評価を行うとき何らかの意味での new form の理論が必要となる. 我々の設定ではナイーブに以下のように定義する.

$$S_{\underline{k}}^{\mathrm{new}}(\Gamma(N)) = \bigoplus_{\psi\in\Psi(G)} \bigoplus_{\substack{\pi=\pi_f\otimes\sigma_{\underline{k}}\in\Pi_\psi \\ \pi^{K(N)}\neq 0 \text{ but } \pi^{K(d)}=0 \text{ for any } d|N,\ d\neq N}} m_{\pi,\psi}\pi_f^{K(N)}.$$

$S_{\underline{k}}^{\mathrm{new}}(\Gamma(N))$ の $S_{\underline{k}}(\Gamma(N))$ における直交補空間を $S_{\underline{k}}^{\mathrm{old}}(\Gamma(N))$ とする. $HE_{\underline{k}}(N)$ の部分集合であって $S_{\underline{k}}^{\mathrm{new}}(\Gamma(N))$ の基底となっているものを $HE_{\underline{k}}^{\mathrm{new}}(N)$ とする. この時次を証明することができる.

Theorem 5.2. ([15, Theorem 5.4]) 重さ $\underline{k}$ は (*2.3*) を満たすとし, N は *squarefree* とする. このとき,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{|HE_{\underline{k}}^{\mathrm{new}}(N)|}{|HE_{\underline{k}}(N)|} = C_n,\ C_n := \prod_p\left(1-\frac{1}{(p-1)^n p^{n^2}}\right)$$

が成り立つ. ここで, $C_1 = C_{\mathrm{Artin}} = 0.37399\cdots$ [7]および $0.9 < C_n < 1$ $(n\geq 2)$ に注意する.

この主張は我々の意味での newform は全空間の中に十分たくさんあることを示している.

一方, conductor に関しては重さの条件のみから次がわかる. 重さ $\underline{k}$ は (2.3) を満たすとし $F\in HE_{\underline{k}}(N)$ に対応する保型表現を π_F とする. 既に説明したように π_F が属す大域的 A パケットの大域的 A パラメータは

$$\psi = \boxplus_{i=1}^r \pi_i \tag{5.3}$$

(各 π_i は $GL_{m_i}(\mathbb{A})$ の保型表現であり, $\sum_{i=1}^r m_i = 2n+1$) の形であり, π_F は twisted endoscopic transfer で $GL_{2n+1}(\mathbb{A})$ の保型表現 $\Pi := \boxplus_{i=1}^r\pi_i$ に移る. 各 π_i には conductor $c(\pi_i)$ が定まる (cf. [8],[9]) ので π_F の conductor を $q(F) = q(\pi_F) = \prod_{i=1}^r c(\pi_i)$ によって定義する. このとき [17] の主結果を用いることで次を示すことができる.

Theorem 5.3. ([15, Theorem 8.3]) 重さ $\underline{k}$ は (*2.3*) を満たすとする (仮定する条件はこれだけ). このとき $q(F)\leq N^{2n+1}$ が成立する. さらに, $F\in HE_{\underline{k}}^{\mathrm{new}}(N)$ ならば

$$q(F)\geq \max\{N\cdot\prod_{p|N}p^{-1},\ \prod_{p|N}p\}$$

が成立する. 特に N が *squarefree* のときは $q(F)\geq N$ である.

上記の結果は conductor の族における平均の下からの評価に用いられる.

5.2. $Sp(2n)$ **に対する Low lying zeros (レベル側面に関して).** 我々の設定おける L 関数とはスタンダード L 関数となる. また族はレベルに関して考える. 以下, この節においては重さ $\underline{k} = (k_1,\ldots,k_n$ は (2.3) を満たしかつ N は squarefree とする. 各, $F\in HE_{\underline{k}}^{\mathrm{new}}(N)$ に対して, analytic conductor を $c(F) := q(F)(k_1\cdots k_n)^2$ と定め $c_{\underline{k},N}$ を

$$\log c_{\underline{k},N} = \frac{1}{d_{\underline{k}}(N)}\sum_{F\in HE_{\underline{k}}(N)}\log c(F),\ d_{\underline{k}}(N) = \dim S_{\underline{k}}(\Gamma(N))$$

[7]定数 C_{Artin} は Artin の原始根分布問題に関連する定数である [6, p.219 の式 (30) の定数 $A(a)$ の $a=1$ のとき].

によって定める．Theorem 5.2 および Theorem 5.3 よりある絶対定数 $C>0$ があって

$$\log c_{\underline{k},N} \geq \log(k_1\cdots k_n)^2 + C\log N \tag{5.4}$$

が成り立つ．

F のスタンダード L 関数を (π_F が属する大域的 A パケットの) 大域的 A パラメータ (5.3) を用いて

$$L(s,\pi_F,\mathrm{St}) := \prod_{i=1}^{r} L(s,\pi_i)$$

とおき[8], 非自明な零点 $\sigma_{F,j}=\frac{1}{2}+\sqrt{-1}\gamma_{F,j}$ を

$$\cdots \leq \mathrm{Re}(\gamma_{F,-2}) \leq \mathrm{Re}(\gamma_{F,-1}) \leq 0 \leq \mathrm{Re}(\gamma_{F,1}) \leq \mathrm{Re}(\gamma_{F,2}) \leq \cdots$$

と並べておく (GRH を L 関数に仮定しないので $\gamma_{F,j}\in\mathbb{C}$ である)．このとき, $\mathbb{R}$ 上のシュワルツ関数 ϕ に対して

$$D(F,\phi) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi\Big(\frac{\gamma_{F,j}\log c_{\underline{k},N}}{2\pi}\Big)$$

とおくと次が成り立つ:

Theorem 5.4. ([15, (9.1)]. *One level density*) ϕ を偶シュワルツ関数であってそのフーリエ変換 $\widehat{\phi}$ のサポートは開区間 $(-\beta,\beta)$ に含まれるとする．ただし, $\beta=\min\{\frac{n}{(2n+1)(2a+b+1/2)}, \frac{2n}{(2n+1)(2a+b)}\}$ [9]. このとき,

$$\frac{1}{d_{\underline{k}}(N)} \sum_{F\in HE_{\underline{k}}(N)} D(F,\phi) = \widehat{\phi}(0) - \frac{1}{2}\phi(0) + O\left(\frac{1}{\log c_{\underline{k},N}}\right) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)W(Sp)(x)\,dx + O\left(\frac{\omega(N)}{\log N}\right)$$

が成り立つ．上記 $\log c_{\underline{k},N}$ の下からの評価 (5.4) により, この式から

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{d_{\underline{k}}(N)} \sum_{F\in HE_{\underline{k}}(N)} D(F,\phi) = \widehat{\phi}(0) - \frac{1}{2}\phi(0) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)W(Sp)(x)\,dx \Big(= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(y)\widehat{W(Sp)}(y)\,dy\Big)$$

が成立する．ただし, $\omega(N)$ は N の素因子の数, $W(Sp)(x) = 1-\dfrac{\sin 2\pi x}{2\pi x}$ ($\widehat{W(Sp)}(y) = \delta_0(y) - \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(y)$ [10]).

以上が one level density の成果である．証明は Theorem 2.1 の形の主張に conductor の下から評価などを合わせたこの分野では良く知られた標準的な議論によって与えられる．これを $\ell\geq 2$ に対して, ℓ-level density (零点の ℓ-correlation の分布) に拡張する．ℓ 個の $\mathbb{R}$ 上の偶シュワルツ関数を $\phi_1,\ldots,\phi_\ell$ を取り, $\mathbb{R}^n$ 上のシュワルツ関数 $\phi(x_1,\ldots,x_\ell) := \phi(x_1)\cdots\phi_\ell(x_\ell)$ とおく．このとき, ℓ-level correlation 関数を $F\in HE_{\underline{k}}(N)$ に対して,

$$D^{(\ell)}(F,\phi) = \sum_{\substack{j_1,\cdots,j_\ell\in\mathbb{Z} \\ |j_a|\neq|j_b| \ (1\leq a\neq b\leq \ell)}} \phi\left(\gamma_{F,j_1}\frac{\log c_{\underline{k},N}}{2\pi}, \gamma_{F,j_2}\frac{\log c_{\underline{k},N}}{2\pi}, \ldots, \gamma_{F,j_\ell}\frac{\log c_{\underline{k},N}}{2\pi}\right)$$

と定義する．

---

[8] $GL_n(\mathbb{A})$ の保型表現 π の保型 L 関数 $L(s,\pi)$ の定義は [4] を参照

[9] 定数 a,b は Theorem 2.1 の絶対定数.

[10] $\chi_{[-1,1]}$ は $\mathbb{R}$ の閉区間 $[-1,1]$ の特性関数.

Theorem 5.5. ([15, Theorem 9.3]. *ℓ-level density, $\ell \geq 2$*) $\phi = \phi_1 \cdots \phi_\ell$ を定める各 ϕ_i $(1 \leq i \leq \ell)$ は偶シュワルツ関数であってそのフーリエ変換 $\widehat{\phi}$ のサポートは開区間 $(-\beta, \beta)$ に含まれるとする[11]. ただし, $\beta = \min\{\frac{n}{(2n+1)(2a+b+1/2)}, \frac{2n}{(2n+1)(2a+b)}\}$ [12]. このとき,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{d_{\underline{k}}(N)} \sum_{F \in HE_{\underline{k}}(N)} D^{(\ell)}(F, \phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) W^{(\ell)}(Sp)(x)\, dx$$

が成立する. 右辺の密度関数は

$$W^{(\ell)}(Sp)(x) = \det(K_{-1}(x_j, x_k))_{\substack{1\leq j \leq \ell \\ 1 \leq k \leq \ell}},\ K_{-1}(x,y) = \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)} - \frac{\sin \pi(x+y)}{\pi(x+y)}$$

によって与えられる.

5.3. **応用.** この節では前節の low lying zeros に関する結果を standard L 関数の $s = \frac{1}{2}$ での order の平均に関する結果を紹介する. ただし, GRH (cf. [7]) は仮定する. GRH の仮定より, $L(s, \pi_F, \mathrm{St})$ の零点は $\frac{1}{2} + \sqrt{-1}\gamma_F,\ \gamma_F \in \mathbb{R}$ の形をとる.

Theorem 5.6. *GRH* を仮定する. また $\underline{k}$ は (*2.3*) みたし N は *square free* とする. このとき, ある定数 $C > 0$ があって,

$$\frac{1}{d_{\underline{k}}(N)} \sum_{F \in HE_{\underline{k}}(N)} \mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}} L(s, \pi_F, \mathrm{St}) \leq C,$$

が成り立つ.

Proof. $L^2(\mathbb{R})$ の元 $\phi(x) = \left(\dfrac{2\sin\frac{x\beta}{2}}{x}\right)^2,\ x \in \mathbb{R}$ を考える. ただし, 定数 β は Theorem 5.4 中のもの. このとき ϕ のフーリエ変換は

$$\widehat{\phi}(x) = \begin{cases} \beta - |x|, & \text{if } |x| < \beta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

となり, サポートは $(-\beta, \beta) \subset (-1, 1)$ に入る. よって, Remark 5.1 と Theorem 5.4 より, $\phi(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$ に注意すると,

$$\frac{1}{d_{\underline{k}}(N)} \sum_{F \in HE_{\underline{k}}(N)} \left(\mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}} L(s, \pi_F, \mathrm{St})\right) \phi(0) \leq \widehat{\phi}(0) - \frac{1}{2}\phi(0) + O\left(\frac{1}{\log\log N}\right).$$

を得る. この不等式と $\phi(0) = \beta^2,\ \widehat{\phi}(0) = \beta$ から

$$\frac{1}{d_{\underline{k}}(N)} \sum_{F \in HE_{\underline{k}}(N)} \mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}} L(s, \pi_F, \mathrm{St}) \leq \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\log\log N}\right)$$

を得る. □

---

[11] シュワルツ関数として pure テンソル積 $\phi = \phi_1 \cdots \phi_\ell$ を扱っているが $S(\mathbb{R}^\ell) = \otimes_{i=1}^{\ell} S(\mathbb{R})$ なので一般のシュワルツ関数でフーリエ変換のサポートが $(-\beta, \beta)^\ell$ 入るものを考えても本質的な差はない.

[12] 任意の (十分小さい)$\varepsilon > 0$ に対して, $\beta = \frac{n}{(2n+1)(2n^3+3n-5/2)} - \varepsilon$ と取れる.[15] の Arxiv version には明示されていないが published version には載せる予定.

Remark 5.7. *Theorem 5.6* の定数 C としては以下が取れる*:*

$$C = \frac{(2n+1)(2n^3+3n-\frac{5}{2})}{n} - \frac{1}{2} + \epsilon.$$

ただし*,* $\epsilon > 0$ は任意*.*

[13] の結果を用いて GSp(4) に対しても同様の結果を得ることができる. ここでは spinor L 関数を考察する. 記号は [13] と同じものを使う.

Proposition 5.8. シュワルツ関数 ϕ のフーリエ変換 $\hat{\phi}$ のサポートは $(-u, u)$, $0 < u < 1$ に含まれると仮定する (u については [13, Proposition 9.1] を参照).

(1) (*level aspect*) 重さ $k_1 \geq k_2 \geq 2$ を固定する. レベル N が $(N, 11!) = 1$ を満たしながら無限大に近づくとき*,*

$$\frac{1}{d_{\underline{k}}(N)} \sum_{F \in HE_{\underline{k}}(N)} D(\pi_F, \phi, \mathrm{Spin}) = \hat{\phi}(0) + \frac{1}{2}\phi(0) + O\Big(\frac{1}{\log\log N}\Big)$$

が成り立つ*.*

(2) (*weight aspect*)$(N, 11!) = 1$ を仮定する. 重さ $\underline{k} = (k_1, k_2)$ の和 $k_1 + k_2$ が無限大に近づくとき*,*

$$\frac{1}{d_{\underline{k}}(N)} \sum_{F \in HE_{\underline{k}}(N)} D(\pi_F, \phi, \mathrm{Spin}) = \hat{\phi}(0) + \frac{1}{2}\phi(0) + O\Big(\frac{1}{\log((k_1 - k_2 + 2)k_1 k_2)}\Big)$$

が成り立つ*.*

これより, Theorem 5.6 の類似が GSp(4) の場合にも成立する.

Theorem 5.9. *GRH* を仮定する*. Level aspect* および *weight aspect* は *Proposition 5.8* の設定に従うとする*.* このとき*,* ある定数 u(*weight aspect* に関してのみ) が存在して[13]*,*

$$\frac{1}{d_{\underline{k}}(N)} \sum_{F \in HE_{\underline{k}}(N)} \mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}} L(s, \pi_F, \mathrm{Spin}) \leq \begin{cases} 40 + \frac{1}{2} + O\Big(\frac{1}{\log\log N}\Big), & \textit{level aspect} \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{2} + O\Big(\frac{1}{\log((k_1-k_2+2)k_1k_2)}\Big), & \textit{weight aspect} \end{cases}$$

が成立する*.* 特に*,* ある定数 $C > 0$ が存在して*,*

$$\frac{1}{d_{\underline{k}}(N)} \sum_{F \in HE_{\underline{k}}(N)} \mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}} L(s, \pi_F, \mathrm{Spin}) \leq C$$

が成り立つ*.*

Remark 5.10. *Theorem 5.6* および *Theorem 5.9* はその族の中で零点の *order* が *'*"大きい*"* もの達の *density* は非常に小さいことを示唆する*.*

6. 謝辞

講演の機会を与えてくださいましたオーガナイザーの宮崎 直氏および青木 宏樹氏に感謝申し上げます. また, 草稿を作成するにあたり, 議論をして頂いた Henry H. Kim 氏および若槻氏に感謝申し上げます.

[13]Weight aspect に関する定数 u を決定するためには [13] で援用した Shin-Templier の結果 [27] を解読する必要がある.

References

[1] J. Arthur, The endoscopic classification of representations. Orthogonal and symplectic groups. American Mathematical Society Colloquium Publications, 61. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[2] J. Arthur and L. Clozel, Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula. Annals of Mathematics Studies, 120. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989. xiv+230 pp.

[3] H. Atobe, *Applications of Arthur's multiplicity formula to Siegel modular forms*, arXiv:1810.09089.

[4] J-W. Cogdell, JNotes on L-functions for GLn. School on Automorphic Forms on GL(n), 75–158, ICTP Lect. Notes, 21, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2008.

[5] R. Dalal, *Sato-Tate Equidistribution for Families of Automorphic Representations through the Stable Trace Formula*, Algebra Number Theory **16** (2022), no. 1, 59–137.

[6] C. Hooley, On Artin's conjecture. J. Reine Angew. Math. 225 (1967), 209–220.

[7] H. Iwaniec, W. Luo, and P. Sarnak, Low lying zeros of families of L-functions. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 91 (2000), 55–131 (2001).

[8] H. Jacquet, A correction to Conducteur des représentations du groupe linéaire [MR0620708]. Pacific J. Math. 260 (2012), no. 2, 515–525.

[9] H. Jacquet, I. Piatetski-Shapiro, J. Shalika, J. Conducteur des repr'esentations du groupe lin'eaire. Math. Ann. 256 (1981), no. 2, 199–214.

[10] N. Katz and P. Sarnak, Zeroes of zeta functions and symmetry. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 36 (1999), no. 1, 1–26.

[11] N. Katz and P. Sarnak, *Random Matrices, Frobenius Eigenvalues and Monodromy*, AMS Colloq. Publ. **45** (1999).

[12] H-H. Kim, M. Tsuzuki, and S. Wakatsuki, The Shintani double zeta functions. Forum Math. 34 (2022), no. 2, 469–505.

[13] H. H. Kim, S. Wakatsuki, and T. Yamauchi, An equidistribution theorem for holomorphic Siegel modular forms for GSp_4 and its applications. J. Inst. Math. Jussieu 19 (2020), no. 2, 351–419.

[14] H. H. Kim, S. Wakatsuki, and T. Yamauchi, *Equidistribution theorems for holomorphic Siegel modular forms for GSp_4; Hecke fields and n-level density*, Math. Z. 295 (2020), no. 3-4, 917–943.

[15] H. H. Kim, S. Wakatsuki, and T. Yamauchi, *Equidistribution theorems for holomorphic Siegel cusp forms of general degree: the level aspect*, to appear in Algebra and Number theory.

[16] J. Lansky and A. Raghuram, Conductors and newforms for SL(2). Pacific J. Math. 231 (2007), no. 1, 127–153.

[17] Miyauchi, Michitaka; Yamauchi, Takuya A remark on conductor, depth and principal congruence subgroups. J. Algebra 592 (2022), 424–434.

[18] Oi, Masao; Depth-preserving property of the local Langlands correspondence for quasi-split classical groups in large residual characteristic. Manuscripta Math. 171 (2023), no. 3-4, 529–562.

[19] H-L. Montgomery, The pair correlation of zeros of the zeta function. Analytic number theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIV, St. Louis Univ., St. Louis, Mo., 1972), pp. 181–193. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.

[20] M. Rubinstein, *Low-lying zeros of L-functions and random matrix theory*, Duke Math. J. **109** (2001), no. 1, 147–181.

[21] Z. Rudnick and P. Sarnak, *Zeros of principal L-functions and random matrix theory*, Duke Math. J. **81** (1996), no. 2, 269–322.

[22] H. Saito, *Explicit formula of orbital p-adic zeta functions associated to symmetric and Hermitian matrices*, Comment. Math. Univ. St. Paul. **46** (1997), 175–216.

[23] F. Sauvageot, *Principe de densité pour les groupes réductifsà Solène, pour son premier sourire*, Compos. Math. **108** (1997), 151–184.

[24] G. Savin, *Limit multiplicities of cusp forms*, Inv. Math. **95** (1989), no. 1, 149-159.

[25] J-P. Serre, *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 1, 75-102.

[26] S.W. Shin, *Automorphic Plancherel density theorem*, Israel J. Math. 192 (2012), no. 1, 83-120.

[27] S.W. Shin and N. Templier, *Sato-Tate theorem for families and low-lying zeros of automorphic L-functions*, Inv. Math., **203** (2016), no. 1, 1-177.

[28] T. Shintani, On zeta-functions associated with the vector space of quadratic forms. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 22 (1975), 25–65.
[29] P-Y. Tsai, Newforms for odd orthogonal groups. J. Number Theory 161 (2016), 75–87.
[30] Wakatsuki, Satoshi The dimensions of spaces of Siegel cusp forms of general degree. Adv. Math. 340 (2018), 1012–1066.
[31] 山内 卓也, An equidistribution theorem for holomorphic Siegel modular forms for GSp_4, 数理解析研究所講究録 = RIMS Kokyuroku (2017), 2055:137-147.
[32] T. Yamauchi, Transfers of some Hecke elements for the base change, arXiv:2104.13286, to appear in Kyoto Journal of Mathematics.

山内卓也
東北大学大学院 理学研究科
e-mail: yamauchi@math.tohoku.ac.jp