# 保型微分方程式の構成について

早稲田大学　木村 昭太郎
Shotaro Kimura
Waseda University

**概要**

保型微分方程式とは，解空間がモジュラー不変性を満たす微分方程式である．保型微分方程式の研究は整数論に留まらず，様々な分野で行われている．例えば，頂点作用素代数や，共形場理論，楕円種数などへの応用がある．そのため，保型微分方程式を様々なモジュラー形式に対して一般化することは興味深い問題である．本稿では，種々のモジュラー形式に対する保型微分方程式の構成とその性質について紹介する．また，高階の保型微分方程式を Rankin-Cohen bracket を用いて統一的に構成できることを紹介する．

本稿は同じ題名で 2023 年 1 月 26 日に「保型表現の解析的・数論的研究」で行った講演に関する報告である．

## 1　導入

保型微分方程式とは解空間がモジュラー不変性を満たす微分方程式である．複素上半平面 $\mathbb{H}$ 上の関数 $f$ と $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して slash 作用素を $f\Big|_k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(\tau) := (c\tau+d)^{-k} f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$ と定める．この slash 作用素に対する不変性，つまり任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して $f\Big|_k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(\tau) = f(\tau)$ が成り立ち，正則性のあるものを楕円モジュラー形式と呼ぶのであった．微分方程式が解空間のモジュラー不変性を満たすというのは，解空間が slash 作用素で不変，つまり $f$ が微分方程式の解であれば，$f\Big|_k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ もまた微分方程式の解になるという意味である．この保型微分方程式の研究は，超特異楕円曲線の $j$ 不変量を根に持つ多項式に関する金子-Zagier[1] の研究に起源を持つ．この論文では次のような微分方程式が与えられている．

$$f''(\tau) - \frac{k+1}{6}E_2(\tau)f'(\tau) + \frac{k(k+1)}{12}E_2'(\tau)f(\tau) = 0 \qquad (\sharp_k)$$

ここで $f' = (2\pi\sqrt{-1})^{-1}df/d\tau$，$E_2$ は重さ 2 の Eisenstein 級数である．これが楕円モジュラー形式に対する保型微分方程式で，解空間のモジュラー不変性を満たしている．一般に解空間がモジュラー不変性を満たすからといって，解が楕円モジュラー形式になるとは限らない．しかし，興味深いことにこの微分方程式の解には様々なモジュラー形式が現れる．例えば，$k=4$ のときには，解として楕円モジュラー形式 $E_4(\tau)$（[2]）や，mixed mock モジュラー形式 $E_4(\tau)\int_\tau^{\sqrt{-1}\infty} \frac{\eta(\tau)^{20}}{E_4(\tau)^2}\frac{d\tau}{2\pi\sqrt{-1}}$（[3]）がある．ここで $\eta(\tau)$ は Dedekind の $\eta$ 関数である．また，$k=5$ のときには重さが 6 の準モジュラー形式 $E_4'(\tau) = \dfrac{E_2(\tau)E_4(\tau)-E_6(\tau)}{3}$ が解に現れる（[2]）．このようにモジュラー形式の分野において保型微分方程式の研究は興味深いものであるが，それに留まらず他の分野においても応用がある．代表的なものとしては頂点作用素代数の分類への応用 [4] や Calabi-Yau 多様体の楕円種数と正則ヤコビ形式に対

する保型微分方程式との関係 [5] がある．

本稿では保型微分方程式の構成について取り上げる．楕円モジュラー形式に対する保型微分方程式は，Ramanujan-Serre 微分作用素を用いた固有値問題として構成されていた．同様の方法で，正則ヤコビ形式の場合は [6] により，歪正則ヤコビ形式の場合は [7] により構成されている．これらは 2 階の保型微分方程式になっているが，これらのモジュラー形式に対する $E_2$ に拡張された Rankin-Cohen bracket を導入することで，統一的に記述することができた．更にこの Rankin-Cohen bracket を用いることで高階の保型微分方程式を構成することができる．

本稿の内容は以下の通りである．第 2 章では楕円モジュラー形式の定義を振り返った後，楕円モジュラー形式に対する保型微分方程式の構成方法とその性質について述べる．第 3 章では正則及び歪正則ヤコビ形式の定義を振り返り，それらに対する保型微分方程式について取り上げる．第 4 章では主結果である，楕円モジュラー形式，正則及び歪正則ヤコビ形式の 3 つのモジュラー形式それぞれに対して $E_2$ に拡張された Rankin-Cohen bracket を与え，これらを用いることで保型微分方程式が統一的に構成できることを紹介する．

## 2　楕円モジュラー形式に対する保型微分方程式

この節では楕円モジュラー形式の定義を振り返った後，先行研究 [1] である楕円モジュラー形式に対する保型微分方程式の構成について述べる．

### 2.1　楕円モジュラー形式

$SL_2(\mathbb{Z})$ における重さが整数の楕円モジュラー形式を定義する（[8] 参照）．

**定義 2.1** (楕円モジュラー形式)**.** 整数 $k$ に対して，正則関数 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ が以下の条件を満たすとき，$f$ を重さ $k$ の楕円モジュラー形式という．

(i) 任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して, slash 作用素を $f \Big|_k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (\tau) := (c\tau+d)^{-k} f\left(\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$ としたとき，$f \Big|_k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (\tau) = f(\tau)$.

(ii) $f$ はカスプ $\sqrt{-1}\infty$ で正則である．

重さ $k$ のモジュラー形式の空間を $M_k$ と書く．また，特にカスプで零点を持つとき，カスプ形式と呼ぶ．

楕円モジュラー形式 $f$ は上の定義より $f(\tau+1) = f(\tau)$ が成り立つことから，Fourier 級数展開を持つ．重要な具体例を 2 つ挙げる．

<u>重さ $k$ の正規化された Eisenstein 級数</u>

$$E_k(\tau) := 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n.$$

ここで $B_k$ は $k$ 番目の Bernoulli 数，$\sigma_{k-1}(n) := \sum_{d|n} d^{k-1}, q := e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ である．

これは $k$ が 4 以上の偶数のときは重さ $k$ の楕円モジュラー形式となる．一方 $k=2$ の場合，$E_2$ は楕円モジュラー形式にはならないが，次の変換則を満たす．

$$E_2\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^2 E_2(\tau) + \frac{6}{\pi\sqrt{-1}} c(c\tau+d), \ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})\right)$$

これを準モジュラー形式と呼ぶ.

判別式形式

$$\Delta(\tau) := \frac{1}{1728}(E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2) = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \cdots$$

これは重さ 12 のカスプ形式になっている.

## 2.2 楕円モジュラー形式に対する保型微分方程式

楕円モジュラー形式に対する保型微分方程式の先行研究（[1]）について取り上げる．楕円モジュラー形式に対する保型微分方程式（Kaneko-Zagier 型微分方程式）は次の二階線形常微分方程式である．

$$f''(\tau) - \frac{k+1}{6}E_2(\tau)f'(\tau) + \frac{k(k+1)}{12}E_2'(\tau)f(\tau) = 0. \tag{$\sharp_k$}$$

ここで $f' = (2\pi\sqrt{-1})^{-1}df/d\tau$ である．この保型微分方程式 $(\sharp_k)$ は微分作用素を用いた固有値問題として構成できる．このことを述べるために次の Ramanujan-Serre 微分作用素を定義する．

**命題 2.2** (Ramanujan-Serre 微分作用素)**.** Ramanujan-Serre 微分作用素 $\vartheta_k$ を

$$\vartheta_k := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{d}{d\tau} - \frac{k}{12}E_2(\tau)$$

と定めると，これは楕円モジュラー形式の重さを 2 あげる微分作用素になる．つまり $f \in M_k$ とすると，$\vartheta_k(f) \in M_{k+2}$ となる．

これを合成した $\vartheta_{k+2} \circ \vartheta_k : M_k \to M_{k+4}$ を考える．$k \equiv 0$ または $4 \pmod 6$ と仮定すると，楕円モジュラー形式の次元公式より $\dim M_{k+4} = \dim M_k$ であるから $M_{k+4} = E_4 M_k$ となる．そこで

$$\varphi_k := \frac{1}{E_4}\vartheta_{k+2} \circ \vartheta_k : M_k \to M_k$$

とするとこれは $M_k$ の自己準同型となる．直接計算から（$\varphi_k(f)$ の定数項）$= \dfrac{k(k+2)}{144} \times$（$f$ の定数項）となるので，$\dfrac{k(k+2)}{144}$ が $\varphi_k$ の固有値であることがわかる．そして固有値問題

$$\varphi_k(f)(\tau) = \frac{k(k+2)}{144}f(\tau)$$

を書き換えることにより保型微分方程式 $(\sharp_k)$ が得られる． 次にこの保型微分方程式 $(\sharp_k)$ の重要な 2 つの性質について述べる．

**命題 2.3** ([1], 解空間のモジュラー不変性)**.** 整数 $k$ を固定する．関数 $f(\tau)$ が保型微分方程式 $(\sharp_k)$ の解ならば，任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して $f\Big|_k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(\tau)$ も $(\sharp_k)$ の解である．

**命題 2.4** ([2], 一意性)**.** 次のような $\mathbb{H}$ 上の微分方程式

$$f''(\tau) + A(\tau)f'(\tau) + B(\tau)f(\tau) = 0 \tag{1}$$

を考える．ただし，$A(\tau)$, $B(\tau)$ は $\mathbb{H}$ 上正則で無限遠点においても正則とする．有理数 $k$ を固定して，更に次の条件（解空間のモジュラー不変性）を仮定する．

**条件.** $f(\tau)$ が (1) の解ならば，任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して $f\Big|_k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(\tau)$ も (1) の解となる．

このとき上の条件を満たす微分方程式 (1) は $(\sharp_k)$ に本質的に一意に定まる．

**注意.** 「本質的に一意に定まる」という意味について述べる．微分方程式 (1) が上の条件（解空間の保型性）を満たすことから $A(\tau)$, $B(\tau)$ の変換則を導くことで

$$A(\tau)=-\frac{k+1}{6}E_2(\tau),\ B(\tau)=\frac{k(k+1)}{12}E_2'(\tau)+cE_4(\tau)$$

となることがわかる．ここで $c$ は定数である．関数 $f$ が微分方程式 (1) の解であるとき，定数 $c$ により定まる定数 $m$ を用いて，$\Delta^m f$ が $(\sharp_{k+12m})$ の解になる．そのため一般性を失わずに $c=0$ とできる．

# 3　正則及び歪正則ヤコビ形式に対する保型微分方程式

この節では正則ヤコビ形式及び歪正則ヤコビ形式の定義を振り返った後，それぞれの保型微分方程式について述べる．正則ヤコビ形式に対する保型微分方程式は喜友名氏 [6]，歪正則ヤコビ形式に対する保型微分方程式は筆者 [7] による．

## 3.1　正則及び歪正則ヤコビ形式

正則ヤコビ形式 ([9]) 及び歪正則ヤコビ形式 ([10], [11]) の定義を振り返る．

**定義 3.1** (slash 作用素)**.** $k$, $m$ を正の整数とする．関数 $f(\tau,z):\mathbb{H}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ に対する slash 作用素を以下のように定める．$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して

$$f\Bigg|^{\mathrm{hol}}_{k,m}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}(\tau,z):=(c\tau+d)^{-k}e^{-2\pi\sqrt{-1}\frac{cmz^2}{c\tau+d}}f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right),$$

$$f\Bigg|^{\mathrm{skew}}_{k,m}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}(\tau,z):=(c\overline{\tau}+d)^{-(k-\frac{1}{2})}(c\tau+d)^{-\frac{1}{2}}e^{-2\pi\sqrt{-1}\frac{cmz^2}{c\tau+d}}f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right).$$

ここで $\overline{\tau}$ は $\tau$ の複素共役とする．また，$(\lambda,\mu)\in\mathbb{Z}^2$ に対して

$$f\,|_m\,[\lambda,\mu]\,(\tau,z):=e^{2\pi\sqrt{-1}(\lambda^2m\tau+2\lambda mz)}f(\tau,z+\lambda\tau+\mu).$$

**定義 3.2** (正則ヤコビ形式)**.** $k$, $m$ を正の整数とする．関数 $f(\tau,z):\mathbb{H}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が以下の条件を満たすとき，$f$ を重さ $k$，指数 $m$ の正則ヤコビ形式という．

(i) $f$ は $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ 上正則.

(ii) 任意の $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して $f\Bigg|^{\mathrm{hol}}_{k,m}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}(\tau,z)=f(\tau,z)$.

(iii) 任意の $(\lambda,\mu)\in\mathbb{Z}^2$ に対して，$f\,|_m\,[\lambda,\mu]\,(\tau,z)=f(\tau,z)$.

(iv) $f(\tau,z)$ は次の形の Fourier 展開を持つ.

$$f(\tau,z)=\sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\4mn\geq r^2}}c(n,r)q^n\zeta^r.$$

ここで $q:=e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$，$\zeta:=e^{2\pi\sqrt{-1}z}$ とする．

重さ $k$，指数 $m$ の正則ヤコビ形式の空間を $J^{\mathrm{hol}}_{k,m}$ と書く．

**定義 3.3** (歪正則ヤコビ形式). $k$, $m$ を正の整数とする．関数 $f(\tau, z): \mathbb{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が以下の条件を満たすとき，$f$ を重さ $k$，指数 $m$ の歪正則ヤコビ形式という．

(i) $f$ は $z \in \mathbb{C}$ に関して正則，$\tau \in \mathbb{H}$ に関して実解析的.

(ii) 任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して $f \Big|_{k,m}^{\mathrm{skew}} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (\tau, z) = f(\tau, z)$.

(iii) 任意の $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$ に対して，$f\,|_m\,[\lambda, \mu]\,(\tau, z) = f(\tau, z)$.

(iv) $f(\tau, z)$ は次の形の Fourier 展開を持つ．

$$f(\tau, z) = \sum_{\substack{n, r \in \mathbb{Z} \\ 4mn \le r^2}} c(n, r) e^{2\pi\sqrt{-1}(n\tau + \frac{r^2 - 4mn}{2m}\sqrt{-1}y + rz)}.$$

ここで $\tau = x + \sqrt{-1}y$ とする．

重さ $k$，指数 $m$ の歪正則ヤコビ形式の空間を $J_{k,m}^{\mathrm{skew}}$ と書く．

次に正則及び歪正則ヤコビ形式の重要な性質であるテータ分解について述べる．

**定理 3.4** ([9]，正則ヤコビ形式のテータ分解). $f(\tau, z) = \sum c(n, r) q^n \zeta^r$ を重さ $k$，指数 $m$ の正則ヤコビ形式とする．このとき

$$f(\tau, z) = \sum_{\mu \pmod{2m}} h_\mu(\tau) \theta_{m,\mu}(\tau, z)$$

と書ける．ここで，

$$h_\mu(\tau) := \sum_{N \ge 0} c_\mu(N) q^{\frac{N}{4m}},$$

$$c_\mu(N) := \begin{cases} c\left(\frac{N + r^2}{4m}, r\right) & \left(N \equiv -r^2 \pmod{4m}, r \equiv \mu \pmod{2m}\right), \\ 0 & \left(N \not\equiv -r^2 \pmod{4m}\right), \end{cases}$$

$$\theta_{m,\mu}(\tau, z) := \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r \equiv \mu \pmod{2m}}} q^{\frac{r^2}{4m}} \zeta^r$$

である．

歪正則ヤコビ形式の場合のテータ分解についても [9] と同様にして考えられる．

**定理 3.5** (歪正則ヤコビ形式のテータ分解). $f(\tau, z) = \sum c(n, r) e^{2\pi\sqrt{-1}\left(n\tau + \frac{r^2 - 4mn}{2m}\sqrt{-1}y + rz\right)}$ を重さ $k$，指数 $m$ の歪正則ヤコビ形式とする．このとき

$$f(\tau, z) = \sum_{\mu \pmod{2m}} h_\mu(-\overline{\tau}) \theta_{m,\mu}(\tau, z)$$

と書ける．ここで，

$$h_\mu(-\overline{\tau}) := \sum_{N \ge 0} c_\mu(-N) e^{2\pi\sqrt{-1}(\frac{-N}{4m}\overline{\tau})},$$

$$c_\mu(-N) := \begin{cases} c\left(\frac{N + r^2}{4m}, r\right) & \left(N \equiv -r^2 \pmod{4m}, r \equiv \mu \pmod{2m}\right), \\ 0 & \left(N \not\equiv -r^2 \pmod{4m}\right) \end{cases}$$

である．

## 3.2 正則及び歪正則ヤコビ形式に対する保型微分方程式

この節では正則及び歪正則ヤコビ形式に対する保型微分方程式の先行研究について取り上げる．楕円モジュラー形式に対する保型微分方程式は，重さを 2 上げる Ramanujan-Serre 微分作用素を用いて固有値問題を考えることで構成された．正則及び歪正則ヤコビ形式の場合も同様の方法で保型微分方程式を構成する．また，このように構成した保型微分方程式は，楕円モジュラー形式の場合に述べた 2 つの性質，つまり解空間のモジュラー不変性と一意性を満たしている．まず，正則ヤコビ形式の場合について述べる．

**命題 3.6** ([12]，正則ヤコビ形式に対する熱作用素)**.** $k, m$ を正の整数とする．熱作用素 $L_m$ を

$$L_m := \frac{1}{\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^2}\left(8\pi\sqrt{-1}m\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

と定める．さらにこれを補正した作用素 $\partial_{k,m}$ を

$$\partial_{k,m} := L_m - \frac{(2k-1)m}{6}E_2(\tau)$$

と定めると，これは正則ヤコビ形式の重さを 2 上げる微分作用素になる．つまり $f \in J^{\mathrm{hol}}_{k,m}$ とすると，$\partial_{k,m}(f) \in J^{\mathrm{hol}}_{k+2,m}$ となる．

[6] では，この微分作用素を用いて形式的な固有値問題を考えることにより次の保型微分方程式を構成している．

$$\begin{aligned} f^{[4]}(\tau,z) - 8mf^{[2](1)}(\tau,z) &+ \frac{(2k+1)m}{3}E_2(\tau)f^{[2]}(\tau,z) \\ &+ 16m^2f^{(2)}(\tau,z) - \frac{4(2k+1)m^2}{3}E_2(\tau)f'(\tau,z) \\ &+ \frac{(2k-1)(2k+1)m^2}{3}E_2'(\tau)f(\tau,z) = 0. \end{aligned} \tag{$\flat_{k,m}$}$$

ここで $f' = (2\pi\sqrt{-1})^{-1}\partial f/\partial\tau, f^{(n)} := (2\pi\sqrt{-1})^{-n}\partial^n f/\partial\tau^n, f^{[n]} := (2\pi\sqrt{-1})^{-n}\partial^n f/\partial z^n$ である．

**注意.** 正則ヤコビ形式に対する保型微分方程式 $(\flat_{k,m})$ の性質について述べる．

1. $z$ に関して 4 階，$\tau$ に関して 2 階の線形偏微分方程式である．
2. 重さ $k$ と指数 $m$ に依る．
3. 解空間のモジュラー不変性を満たす．つまり，関数 $f(\tau,z)$ が $(\flat_{k,m})$ の解ならば，任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$，$(\lambda,\mu) \in \mathbb{Z}^2$ に対して $f\Big|^{\mathrm{hol}}_{k,m}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(\tau,z)$，$f\left|_m [\lambda,\mu]\right.(\tau,z)$ も $(\flat_{k,m})$ の解となる．
4. 楕円モジュラー形式の場合と同じ意味で $(\flat_{k,m})$ は本質的に一意である．

また，テータ分解 (定理 3.4) の観点から，楕円モジュラー形式に対する保型微分方程式 $(\sharp_k)$ と次のような関係がある．

**定理 3.7.** 関数 $f(\tau,z) = \displaystyle\sum_{\mu \pmod{2m}} h_\mu(\tau)\theta_{m,\mu}(\tau,z)$ が $(\flat_{k,m})$ の解であることと，すべての $\mu \pmod{2m}$ に対して $h_\mu(\tau)$ が $(\sharp_{k-\frac{1}{2}})$ の解であることが同値である．

次に，歪正則ヤコビ形式の場合における筆者 [7] による結果を述べる．まず，歪正則ヤコビ形式に対する微分作用素を定める．

**命題 3.8.** $k, m$ を正の整数とする．微分作用素 $\overline{\partial_k}$ を

$$\overline{\partial_k} := \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial\overline{\tau}} - \frac{2k-1}{24}E_2(-\overline{\tau})$$

と定めると，これは歪正則ヤコビ形式の重さを 2 上げる微分作用素になる．つまり $f \in J^{\mathrm{skew}}_{k,m}$ とすると，$\overline{\partial_k}(f) \in J^{\mathrm{skew}}_{k+2,m}$ となる．

この微分作用素を用いて次の歪正則ヤコビ形式に対する保型微分方程式を得る．

$$\ddot{f}(\tau, z) - \frac{2k+1}{12}E_2(-\overline{\tau})\dot{f}(\tau, z) + \frac{(k-\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})}{12}\dot{E}_2(-\overline{\tau})f(\tau, z) = 0. \tag{$\natural_k$}$$

ここで $\dot{f} := (-2\pi\sqrt{-1})^{-1}df/d\overline{\tau}$ である．

**注意.** 歪正則ヤコビ形式に対する保型微分方程式 $(\natural_k)$ の性質について述べる．

1. $-\overline{\tau}$ に関して 2 階の線形常微分方程式である．特に，$z$ に関する微分は表れない．
2. 重さ $k$ のみに依り，指数 $m$ には依らない．
3. 解空間のモジュラー不変性を満たす．つまり, 関数 $f(\tau, z)$ が $(\natural_k)$ の解ならば, 任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$，$(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$ に対して $f \left|^{\mathrm{skew}}_{k,m} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right. (\tau, z)$，$f\,|_m\,[\lambda, \mu]\,(\tau, z)$ も $(\natural_k)$ の解となる．
4. 楕円モジュラー形式の場合と同じ意味で $(\natural_k)$ は本質的に一意である．

また正則ヤコビ形式の場合と同様に，テータ分解 (定理 3.5) から次のことが言える．

**定理 3.9.** 関数 $f(\tau, z) = \displaystyle\sum_{\mu \pmod{2m}} h_\mu(-\overline{\tau})\theta_{m,\mu}(\tau, z)$ が $(\natural_k)$ の解であることと, すべての $\mu \pmod{2m}$ に対して $h_\mu(-\overline{\tau})$ が，$(\sharp_{k-\frac{1}{2}})$ の変数 $\tau$ を $-\overline{\tau}$ にしたものの解であることが同値である．

# 4 Rankin-Cohen bracket と保型微分方程式の構成

この節では主結果である，重さ 2 の Eisenstein 級数へ拡張された Rankin-Cohen bracket を用いることで，これまでに述べた種々のモジュラー形式に対する保型微分方程式を統一的に記述できることを示す．まず，楕円モジュラー形式における Rankin-Cohen bracket について振り返った後，それを用いて保型微分方程式が記述できることを示す．その後，正則及び歪正則ヤコビ形式の場合を述べる．

## 4.1 楕円モジュラー形式の場合

まず，楕円モジュラー形式に対する Rankin-Cohen bracket について振り返る．

**命題 4.1** ([13])**.** $f, g$ を $\mathbb{H}$ 上の関数とし，$n \geq 0$ とする．Rankin-Cohen bracket $[f, g]_{k,l,n}$ を

$$[f, g]_{k,l,n}(\tau) := \sum_{r+s=n} (-1)^r \binom{n+k-1}{s}\binom{n+l-1}{r} D^r_\tau(f(\tau))D^s_\tau(g(\tau))$$

とする．ここで上の和は整数 $r \geq 0, s \geq 0$ を走るものとし，$D_\tau := (2\pi\sqrt{-1})^{-1}d/d\tau$ とする．$f \in M_k, g \in M_l$ であるなら，$[f, g]_{k,l,n} \in M_{k+l+2n}$ である．

*Proof.* $f \in M_k$ に対して生成関数 $\tilde{f}(\tau; X)$ を

$$\tilde{f}(\tau; X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\tau)}{n!(n+k-1)!}(2\pi\sqrt{-1}X)^n$$

と定める．ここで $X$ は形式的な変数である．また，$f \in M_k$ であることから変換則を微分していくことで

$$\frac{f^{(n)}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)}{n!(n+k-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^{n-m}(c\tau+d)^{k+n+m}}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-m}(n-m)!} \frac{f^{(m)}(\tau)}{m!(m+k-1)!}$$

となることがわかる．これにより生成関数は次の変換則を満たす．

$$\tilde{f}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}; \frac{X}{(c\tau+d)^2}\right) = (c\tau+d)^k e^{\frac{cX}{c\tau+d}} \tilde{f}(\tau; X).$$

$f \in M_k, g \in M_l$ に対してそれぞれの生成関数 $\tilde{f}, \tilde{g}$ の積は

$$\tilde{f}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}; \frac{-X}{(c\tau+d)^2}\right) \tilde{g}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}; \frac{X}{(c\tau+d)^2}\right) = (c\tau+d)^{k+l} \tilde{f}(\tau; -X)\tilde{g}(\tau; X)$$

を満たす．この生成関数の積の係数の部分に Rankin-Cohen bracket が現れる．

$$\tilde{f}(\tau; -X)\tilde{g}(\tau; X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[f, g]_{k,l,n}(\tau)}{(n+k-1)!(n+l-1)!}(2\pi\sqrt{-1}X)^n.$$

すると，先程の生成関数の積の変換則から，$[f, g]_{k,l,n}(\tau)$ は重さ $k+l+2n$ の楕円モジュラー形式であることがわかる． $\square$

この議論を重さ 2 の Eisenstein 級数 $E_2$ に対しても同様に行うことができる．

**命題 4.2** ([14])**.** $f, g$ を $\mathbb{H}$ 上の関数とし，$n \geq -1$ とする．Rankin-Cohen bracket$[f, g]_{k,l,n}$ を

$$[f, g]_{k,l,n}(\tau) := \sum_{r+s=n} (-1)^r \binom{n+k-1}{s} \binom{n+l-1}{r} D_\tau^r(f(\tau)) D_\tau^s(g(\tau))$$

とする．ここで記号は以下のように与える．

1. 上の和の整数 $r, s$ は $0 \leq r \leq n+1, -1 \leq s \leq n$ を走るものとする．
2. $\binom{p}{-1} := \dfrac{12}{p+1}$.
3. $D_\tau^{-1}(g(\tau)) := \begin{cases} 0 & g \in M_l \text{ の場合,} \\ 1 & g = E_2 \text{ の場合.} \end{cases}$

このとき $f \in M_k$ で，$g \in M_l$ または $g = E_2 (l = 2)$ であるなら，$[f, g]_{k,l,n} \in M_{k+l+2n}$ である．

証明は命題 4.1 とほとんど同じだが，違う点は $E_2$ の微分が次のようになる点である．

$$\frac{E_2^{(n)}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)}{n!(n+2-1)!} = \frac{12c^{n+1}(c\tau+d)^{n+1}}{(2\pi\sqrt{-1})^{n+1}(n+1)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^{n-m}(c\tau+d)^{2+n+m}}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-m}(n-m)!} \frac{E_2^{(m)}(\tau)}{m!(m+2-1)!}$$

この違いを反映させるために整数 $s$ を $-1$ まで動かして，係数を上のように定めた．命題 4.2 の $E_2$ に拡張された Rankin-Cohen bracket を用いると次のことがわかる．

**定理 4.3.** $f$ を $\mathbb{H}$ 上の関数とする．このとき

$$[f, E_2]_{k,2,0}(\tau) = -\frac{12}{k}\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{d}{d\tau} - \frac{k}{12}E_2(\tau)\right)f(\tau) = -\frac{12}{k}\vartheta_k(f)(\tau)$$

には Ramanujan-Serre 微分作用素が現れる．また，

$$[f, E_2]_{k,21}(\tau) = -\frac{12}{k+1}\left(f''(\tau) - \frac{k+1}{6}E_2(\tau)f'(\tau) + \frac{k(k+1)}{12}E_2'(\tau)f(\tau)\right)$$

は保型微分方程式 $(\sharp_k)$ の左辺である．つまり $[f, E_2]_{k,2,1}(\tau) = 0$ は保型微分方程式 $(\sharp_k)$ となる．更に，$[f, E_2]_{k,2,n-1}(\tau) = 0$ や，$g \in M_l$ に対して $[f, g]_{k,l,n}(\tau) = 0$ を考えるとこれらは $n$ 階の保型微分方程式になる，つまり解空間がモジュラー不変性を満たしている．

$E_2$ に拡張された Rankin-Cohen bracket を用いると，これまでに得られていた保型微分方程式のみならず，高階の保型微分方程式を構成できることがわかる．更にこの議論を正則及び歪正則ヤコビ形式においても同様に行うことができる．

## 4.2 正則及び歪正則ヤコビ形式の場合

正則ヤコビ形式 $f \in J_{k,m}^{\mathrm{hol}}$ に対して生成関数 $\tilde{f}(\tau, z; X)$ を

$$\tilde{f}(\tau, z; X) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_m^n(f(\tau, z))}{n!(n + (k - 1/2) - 1)!}((2\pi\sqrt{-1})^2X)^n$$

と定める ([15] を参照)．このとき生成関数は $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して次の変換則を満たす．

$$\tilde{f}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}; \frac{X}{(c\tau + d)^2}\right) = (c\tau + d)^k\mathbf{e}\left(\frac{cmz^2}{c\tau + d}\right)e^{8\pi\sqrt{-1}m\frac{cX}{c\tau+d}}\tilde{f}(\tau, z; X).$$

また，歪正則ヤコビ形式 $f(\tau, z) \in J_{k,m}^{\mathrm{skew}}$ に対して生成関数 $\tilde{f}(\tau, z; X)$ を

$$\tilde{f}(\tau, z; X) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_{-\overline{\tau}}^n(f(\tau, z))}{n!(n + (k - 1/2) - 1)!}(2\pi\sqrt{-1}X)^n$$

と定める．このとき生成関数は $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して次の変換則を満たす．

$$\tilde{f}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}; \frac{X}{(c\tau + d)^2}\right) = (c\overline{\tau} + d)^{k-1}|c\tau + d|\mathbf{e}\left(\frac{cmz^2}{c\tau + d}\right)e^{\frac{cX}{c\overline{\tau}+d}}\tilde{f}(\tau, z; X).$$

これらの生成関数を用いることで楕円モジュラー形式の場合と同様にして $E_2$ に拡張された Rankin-Cohen bracket を構成することができる．

**命題 4.4.** $f$ を $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ 上の関数，$g$ を $\mathbb{H}$ 上の関数とし，$n \geq -1$ とする．このとき Rankin-Cohen bracket を次で定める．

- $[f, g]_{k,m,l,n}^{\mathrm{hol}}(\tau, z) := \sum_{r+s=n}\binom{n + (k - \frac{1}{2}) - 1}{s}\binom{n + l - 1}{r}(-4m)^sL_m^r(f(\tau, z))D_\tau^s(g(\tau))$,
- $[f, g]_{k,l,n}^{\mathrm{skew}}(\tau, z) := \sum_{r+s=n}(-1)^r\binom{n + (k - \frac{1}{2}) - 1}{s}\binom{n + l - 1}{r}D_{-\overline{\tau}}^r(f(\tau, z))D_{-\overline{\tau}}^s(\overline{g(\tau)})$.

ここで記号は以下のように与える．

1. 上の和の整数 $r, s$ は $0 \le r \le n+1, -1 \le s \le n$ を走るものとする．
2. $\begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} := \dfrac{12}{p+1}$.
3. $D_\tau^{-1}(g(\tau)) = D_{-\overline{\tau}}^{-1}(\overline{g(\tau)}) := \begin{cases} 0 & g \in M_l \text{ の場合}, \\ 1 & g = E_2 \text{ の場合}. \end{cases}$

このとき $f \in J_{k,m}^{hol}$(resp. $f \in J_{k,m}^{skew}$) で，$g \in M_l$ または $g = E_2 (l=2)$ であるなら，$[f,g]_{k,m,l,n}^{\mathrm{hol}} \in J_{k+l+2n,m}^{hol}$(resp. $[f,g]_{k,l,n}^{\mathrm{skew}} \in J_{k+l+2n,m}^{skew}$) である．

さて，これらの Rankin-Cohen bracket を用いると楕円モジュラー形式の場合と同様に次のことがわかる．

**定理 4.5.** $f$ を $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ 上の関数とする．このとき以下が成り立つ．

1. $[f, E_2]_{k,m,2,1}^{\mathrm{hol}} = 0$ (resp. $[f, E_2]_{k,2,1}^{\mathrm{skew}} = 0$) は 2 階の保型微分方程式 ($\flat_{k,m}$) (resp. ($\natural_k$)) となる．
2. $[f, E_2]_{k,m,2,n-1}^{\mathrm{hol}} = 0$ (resp. $[f, E_2]_{k,2,n-1}^{\mathrm{skew}} = 0$) は $n$ 階の保型微分方程式である．
3. $g \in M_l$ としたとき，$[f, g]_{k,m,2,n}^{\mathrm{hol}} = 0$ (resp. $[f, g]_{k,2,n}^{\mathrm{skew}} = 0$) は $n$ 階の保型微分方程式である．

また，$n$ 階の正則ヤコビ形式に対する保型微分方程式 $[f, E_2]_{k,m,2,n-1}^{\mathrm{hol}} = 0$ 及び歪正則ヤコビ形式に対する保型微分方程式 $[f, E_2]_{k,2,n-1}^{\mathrm{skew}} = 0$ と，楕円モジュラー形式に対する保型微分方程式 $[f, E_2]_{k,2,n-1}(\tau) = 0$ の間にはテータ分解 (定理 3.4, 3.5) を通して以下のような関係がある．これは定理 3.7, 3.9 の一般の階数への拡張になっている．

**定理 4.6.** 関数 $f(\tau, z) = \displaystyle\sum_{\mu \pmod{2m}} h_\mu(\tau)\theta_{m,\mu}(\tau, z)$ が $[f, E_2]_{k,m,2,n}^{\mathrm{hol}} = 0$ の解であることと，すべての $\mu \pmod{2m}$ に対して $h_\mu(\tau)$ が $[h_\mu, E_2]_{k-\frac{1}{2},2,n} = 0$ の解であることが同値である．

**定理 4.7.** 関数 $f(\tau, z) = \displaystyle\sum_{\mu \pmod{2m}} h_\mu(-\overline{\tau})\theta_{m,\mu}(\tau, z)$ が $[f, E_2]_{k,2,1}^{\mathrm{skew}} = 0$ の解であることと，すべての $\mu \pmod{2m}$ に対して $h_\mu(-\overline{\tau})$ が $[h_\mu, E_2]_{k-\frac{1}{2},2,n} = 0$ の解であることが同値である．

## 謝辞

今回の講演の機会を与えてくださった世話人代表の宮崎 直 氏，副代表の青木 宏樹 氏に深く感謝いたします．

## 参考文献

[1] M. Kaneko and D. Zagier, Supersingular $j$-invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials, *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, 7:97–126, 1998.

[2] M. Kaneko and M. Koike, On modular forms arising from a differential equation of hypergeometric type, *Ramanujan J.*, 7(1-3):145–164, 2003.

[3] P. Guerzhoy, A mixed mock modular solution of the Kaneko-Zagier equation, *Ramanujan J.*, 36(1):149–164, 2015.

[4] M. Kaneko, K. Nagatomo, Y. Sakai, Modular Forms and Second Order Ordinary Differential

Equations: Applications to Vertex Operator Algebras, *Lett. Math. Phys.*, 103(4):439–453, 2013.

[5] D. Adler and V. Gritsenko, Elliptic genus and modular differential equations, *J. Geom. Phys.*, 181:104662-, 2013.

[6] T. Kiyuna, Kaneko-Zagier type equation for Jacobi forms of index 1, *Ramanujan J.*, 39(2):347–362, 2 2016.

[7] S. Kimura, The modular differential equation for skew-holomorphic Jacobi forms, *Ramanujan J.*, 59(4):1137–1146, 2022.

[8] J-P. Serre, *A Course in Arithmetic*, Graduate Texts in Mathematics, 7. Springer New York, New York, NY, 1st ed. 19 edition, 1973.

[9] M. Eichler and D. Zagier, The theory of Jacobi forms, volume 55. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, 1985.

[10] N.-P. Skoruppa, Developments in the theory of Jacobi forms, In *Automorphic functions and their applications*,(Acad. Sci. USSR, Inst. Appl. Math., Khabarovsk, 1990) pp. 167–185.

[11] R. Berndt and R. Schmidt, Elements of the Representation Theory of the Jacobi Group, Modern Birkhäuser Classics. Springer Basel, Basel, 1st ed. 19 edition, 1998.

[12] O. K. Richter, The action of the heat operator on Jacobi forms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(03):869–875, 2008.

[13] D. Zagier, Modular forms and differential operators, *Proc. Indian Acad. Sci., Math. Sci.*, 104(1):57–75, 2 1994.

[14] F. Q. Gouvêa, Non-ordinary primes: A story, *Experimental Math.*, 6(3):195–205, 1997.

[15] Y. Choie, Jacobi forms and the heat operator, *Math. Z.*, 225(1):95–101, 1997.