レベル p の Siegel Eisenstein 級数のみたす
単純な関数等式

千葉工業大学・軍司圭一
Keiichi Gunji
Chiba Institute of Technology

1　はじめに

この原稿は，プレプリント [Gu3] の内容を解説したものである．細かい証明等は [Gu3] にゆずることとし，大まかな内容の紹介や，なぜそのような発想に至ったのかの経緯などを中心に，日本語でお伝えすることにする．

主題となるのは EIsenstein 級数の関数等式であるが，その一般論はよく知られた Langlands のレクチャーノート ([La]) でほぼ完成しているといってもよい．内容を大雑把に述べると以下のようになる．G を簡約群，P を放物型部分群とし，$P = MAN$ と Langlands 分解をとる．M のカスピダル表現 π に対し，主系列表現の空間 $\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(\pi, s)$ ($s \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$) から φ をとると，Eisenstein 級数 $E(g, \psi, s)$ が定義される．Weyl 群の元 w に対し，Intertwining operator (絡作用素)

$$M(s)\colon \mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(\pi, s) \to \mathrm{Ind}_{P'(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(\omega\pi, \pi(s))$$

が定まる (P' は P とは一般には異なる放物型部分群)．この時 $E(g, \psi, s)$ と $E(g, M(s)\psi, \pi(s))$ の間に関数等式が成り立つというのが，Langlands の主定理の 1 つである．なお，我々の考えている Siegel Eisenstein 級数はカスピダル表現から誘導して得られるものではないが，シンプレクティック群の極小放物型部分群から得られる Eisenstein 級数の留数として実現できるため (cf. [Kal, (3.13)])，この結果を援用することができる．

しかしこうして得られる関数等式が，古典的な Siegel 上半空間上の関数として書いたときにどう表されるのかを考察するのには，また別な困難がある．Kalinin は，Langlands の結果 (正確にはそれを解説した Harish Chandra のレクチャーノート [HC]) を $G = Sp_n$ の場合に書き下し，古典的枠組みで，$Sp(n, \mathbb{Z})$ に関する Siegel Eisenstein 級数の関数等式の具体形を与えた ([Kal])．また Mizumoto は，Siegel Eisenstein 級数の Fourier 展開の定数項を詳しく解析することで，関数等式の別証明を与えている．その結果を紹介しよう．$\varGamma^n = Sp(n, \mathbb{Z})$ をランクが n，行列サイズ $2n$ のシンプレクティック群とし，$P_{0,n}(\mathbb{Z})$ を左下 (n, n)-ブロックが 0 であるような Siegel 放物型部分群とする．ここで添え字に 0 を付けたのは，後に考える GSp の放物型部分群と区別するためであ

る．Siegel 上半空間 $\mathbb{H}_n$ の元を $Z = X + \sqrt{-1}Y$ と表し，偶数 k と複素数 s に対して

$$E_k^n(Z,s) = \det(Y)^{s-k/2} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in P_{0,n}(\mathbb{Z})\backslash \Gamma^n} \det(CZ+D)^{-k} |\det(CZ+D)|^{-2s+k}$$

と定める．ただし記号は [Miz] とは少し変えてあり，s を $s+k/2$ で置き換えると [Miz] と一致するが，後の都合でこちらを採用する．この右辺は $\mathrm{Re}(2s) > n+1$ で絶対収束し，全 s 平面に有理型に解析接続する．なお，解析接続も [Kal] や [Miz] の主結果の一部であるが，ここでは関数等式に限って話をする．さらに

$$\mathbb{E}_k^n(Z,s) := \frac{\Gamma_n\left(s+\dfrac{k}{2}\right)}{\Gamma_n(s)} \xi(2s) \prod_{j=1}^{[n/2]} \xi(4s-2j) E_k^n(Z,s),$$

とおく．ここで $\Gamma_n(s) = \pi^{n(n-1)/4} \prod_{i=0}^{n-1} \Gamma(s-i/2)$ であり，$\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ は完備化した Riemann zeta 関数であって $\xi(s) = \xi(1-s)$ をみたす．すると関数等式

$$\mathbb{E}_k^n(Z,s) = \mathbb{E}_k^n\Big(Z, \frac{n+1}{2} - s\Big)$$

が成り立つというのが [Kal]，[Miz] の結果である (ただし，[Kal] は $k=0$ のときのみ).

この結果を奇素数レベルの場合に拡張するのがこの原稿の目的である．ただしこのときは，シンプレクティック群のランクを n とすると Siegel Eisenstein 級数の空間は $n+1$ 次元あるため，関数等式はベクトル値のものを考えることになる．$n=1$ の場合は任意のレベルに対し詳しい結果がよく知られているが (例えば [Kub, Theorem 4.4.2])，次数が大きくなると関数等式を表す行列は極めて複雑なものになることが予想される．これをなるべく単純な形で表記するのが目標となる．

2 レベル p の Siegel Eisenstein 級数

以下 p を奇素数とし，p を法とする自明指標を χ_0，2 次指標を χ_p とおく．$\psi = \chi_0$ または χ_p とかいて，両者を統一的に記述する．$g \in Sp(n,\mathbb{R})$ (あるいは $GSp(n,\mathbb{R})$) に対し，(n,n)-行列 A_g, B_g, C_g, D_g を $g = \begin{pmatrix} A_g & B_g \\ C_g & D_g \end{pmatrix}$ で定義する．$\mathit{\Gamma}_0^n(p) = \{\gamma \in Sp(n,\mathbb{Z}) \mid C_\gamma \equiv 0 \bmod p\}$ とすると，両側剰余類 $\mathit{\Gamma}_0^n(p)\backslash Sp(n,\mathbb{Z})/P_{0,n}(\mathbb{Z})$ の代表系として，$\{w_r \mid 0 \le r \le n\}$ が取れる．ここで

$$w_r = \left(\begin{array}{cc|cc} 0_r & & -\mathbf{1}_r & \\ & \mathbf{1}_{n-r} & & 0_{n-r} \\ \hline \mathbf{1}_r & & 0_r & \\ & 0_{n-r} & & \mathbf{1}_{n-r} \end{array}\right)$$

と置いた．$w_0 = \mathbf{1}_{2n}$ であり，$w_n = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix}$ である．代表系 $\{w_r\}_{r=0}^n$ が $\mathbb{H}_n/\mathit{\Gamma}_0^n(p)$ の 0 次元カスプに対応しており，レベル p の Siegel Eisenstien 級数は各 0 次元カスプ w_r ごとに次のように定義される．保型因子を $j(\gamma,Z) = \det(C_\gamma Z + D_\gamma)$ で定め，$P_{0,n}(\mathbb{Z}) w_r \mathit{\Gamma}_0^n(p)$ 上の関数 ψ^* を

$$\psi^*(\eta w_r \kappa) = \psi(\det D_\eta \det D_\kappa), \quad \eta \in P_{0,n}(\mathbb{Z}),\ \kappa \in \mathit{\Gamma}_0^n(p) \tag{2.1}$$

で定めると，これは $\psi^2=1$ ゆえに well-defined となる．k を $\psi(-1)=(-1)^k$ をみたす整数とすると，w_r に対応する重さ k, レベル p, 指標 ψ の Siegel Eisenstien 級数が

$$E^n_{k,\psi}(w_r;Z,s)=\det(Y)^{s-k/2}\sum_{\gamma\in P_{0,n}(\mathbb{Z})\backslash P_{0,n}(\mathbb{Z})w_r\Gamma_0^n(p)}\psi^*(\gamma)\,j(\gamma,Z)^{-k}\,|j(\gamma,Z)|^{-2s+k} \tag{2.2}$$

で定義される．右辺は $\mathrm{Re}(2s)>n+1$ で絶対収束し，全 s 平面に有理型解析接続される．正則 Siegel Eisenstein 級数は $s=k/2$ としたものであり，これを単に $E^n_{k,\psi}(w_r;Z)$ と書くことにする．$E^n_{k,\psi}(w_r;Z,s)$ $(0\le r\le n)$ たちで張られる空間を $\mathcal{E}_{k,s}(\Gamma_0^n(p),\psi)$ と書き，Siegel Eisenstein 級数の空間と呼ぶ．一般の s に対しては $\dim\mathcal{E}_{k,s}(\Gamma_0^n(p),\psi)=n+1$ である．なお，$\psi^2\neq 1$ であるような Dirichlet 指標 ψ に対しては，$E^n_{k,\psi}(w_r;Z,s)$ は $r=0$ または n のときに限り well-defined であり，それ以外の w_r に対応する Siegel Eisenstein 級数は存在しない．

既に述べたように，なるべく簡単な形で関数等式を記述するのが目的であるが，そのための基本方針は次のようになる．

方針 p におけるヘッケ作用素 $U(p)$ に対し，$U(p)$-固有関数であるような Siegel Eisenstein 級数の関数等式は簡単な形となる．

ここで，$\Gamma_0^n(p)$ に関する保型形式に対する $U(p)$-作用素は以下のように定義される．

まず $GSp^+(n,\mathbb{R})=\{g\in GL(2n,\mathbb{R})\mid {}^tgw_ng=\mu(g)w_n,\ \mu(g)>0\}$ の元 g に対し，保型因子を $j(g,Z)=\mu(g)^{-n/2}\det(C_gZ+D_g)$ として定める．これは $j(a\mathbf{1}_{2n},Z)=1$ となるように正規化したものである．$GSp^+(n,\mathbb{R})$ は $\mathbb{H}_n$ に $g\langle Z\rangle=(A_gZ+B_g)(C_gZ+D_g)^{-1}$ で作用し，$g\in GSp^+(n,\mathbb{R})$ と $\mathbb{H}_n$ 上の関数 f に対し，$f|_kg(Z)=j(g,Z)^{-k}f(g\langle Z\rangle)$ と定める．$A_k(\Gamma_0^n(p),\psi)=\{f\colon\mathbb{H}_n\to\mathbb{C}\mid f|_k\gamma=\psi(\det D_\gamma)f,\ \gamma\in\Gamma_0^n(p)\}$ とする．$\tau_p=\begin{pmatrix}\mathbf{1}_n & 0\\ 0 & p\mathbf{1}_n\end{pmatrix}$ とし，$A_k(\Gamma_0^n(p),\psi)$ に作用する $U(p)$-作用素を，

$$U(p)f=p^{nk/2-n(n+1)/2}\sum_{\gamma\in\Gamma_0^n(p)\backslash\Gamma_0^n(p)\tau_p\Gamma_0^n(p)}\psi(\det A_\gamma)f|_k\gamma \tag{2.3}$$

で定める．剰余類 $\Gamma_0^n(p)\backslash\Gamma_0^n(p)\tau_p\Gamma_0^n(p)$ の代表系として $\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{1}_n & S\\ 0 & p\mathbf{1}_n\end{pmatrix}\,\middle|\, S\in\mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z}/p)\right\}$ が取れるので，$U(p)$ のフーリエ係数への作用は次のようになる．正則な保型形式 f に対しては，$f(Z)=\sum_T C(T)\mathbf{e}(TZ)$ (ただし，$\mathbf{e}(X)=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{Tr}(X))$) を f のフーリエ展開とすれば，$\big(f|U(p)\big)(Z)=\sum_T C(pT)\mathbf{e}(TZ)$ である．同様に非正則な Siegel Eisenstein 級数のフーリエ展開を $E^n_{k,\psi}(w_r;Z,s)=\sum_T b(T,Y,s)\mathbf{e}(TX)$ と書くと

$$U(p)E^n_{k,\psi}(w_r;Z,s)=\sum_T b(pT,p^{-1}Y,s)\mathbf{e}(TX) \tag{2.4}$$

が成り立つ．

2.1 Siegel 級数

ここで，関数等式の実例を見るために，Eisenstein 級数と関係が深い Siegel 級数について説明する．Siegel Eisenstein 級数のフーリエ係数はオイラー積表示を持つが，各素数 q に対するオイラー q-因子が Siegel 級数である．ただしレベル付きの Siegel Eisenstein 級数を考える場合，レベルを割る素数に対する Siegel 級数は，その振る舞いが一般の場合とは大きく異なり，これを**分岐 Siegel 級数** (ramified Siegel series) と呼ぶことにする．

各素数 q に対し，$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z}_q)$ で対称行列の集合を表し，$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z}_q)^*$ で半整数対称行列の集合を表す． 任意の $R \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}_q)$ は，ある $g \in Sp(n, \mathbb{Q}_q)$ を用いて $T = C_g^{-1}D_g$ と表すことができるが，これを用いて $\delta(R) = q^{\mathrm{ord}_q(\det C_g)}$ とおく．

p と異なる素数 q に対しては，$T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z}_q)^*$ に対して Siegel 級数を

$$S_n(T, q^{-s})_q = \sum_{R \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}_q/\mathbb{Z}_q)} \delta(R)^{-s}\mathbf{e}(RT) \tag{2.5}$$

と定める．ただし $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}_q) \bmod \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z}_q)$ を $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}_q/\mathbb{Z}_q)$ と略記した．右辺は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ なる $s \in \mathbb{C}$ に対して収束し，q^{-s} の有理関数になることが知られているので，左辺のように記述してよい．すると，我々の扱う $E^n_{k,\psi}(w_r; Z, s)$ の $T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})^*$ におけるフーリエ係数のオイラー q-因子は，r によらず $S_n(T, \psi(q)q^{-2s})$ で与えられる．

非退化すなわち $\det T \neq 0$ である T に対し，

$$\gamma_q(T, X) = \begin{cases} (1-X)(1-\chi_T(q)q^{n/2}X)^{-1}\displaystyle\prod_{j=1}^{n/2}(1-q^{2j}X^2) & n \text{ が偶数のとき} \\ (1-X)\displaystyle\prod_{j=1}^{(n-1)/2}(1-q^{2j}X^2) & n \text{ が奇数のとき} \end{cases} \tag{2.6}$$

と定める．ここで χ_T は，2 次拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{n/2}\det(2T)})/\mathbb{Q}$ に付随する 2 次指標である．この $\gamma_q(T, q^{-s})$ を Siegel 級数のゼータ因子と呼ぶことにしよう．するとある q^{-s} の多項式 $F_q(T, q^{-s})$ が存在して，

$$S_q(T, q^{-s}) = \gamma_q(T, q^{-s})F_q(T, q^{-s})$$

が成り立つ．この F_q を Siegel 級数の多項式部分と呼ぶ．各 $T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})^*$ に対し，ほとんどすべての q に対して $F_q(T, q^{-s}) = 1$ となる．また $F_q(T, q^{-s})$ の明示式 (すなわち $S_n(T, q^{-s})_q$ の明示式) は Katsurada により，[Kat, Theorem 4.3, Theorem 4.4] で与えられている．

重要な事実として，Siegel 級数の多項式部分は関数等式をみたす．簡単のため，q が奇素数の場合のみ紹介する．非退化な $T \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})^*$ に対し，$\mathrm{ord}_q(\det T)$ が偶数または奇数に応じて $r = 0$ または 1 とする．また $\zeta_q(T)$ を n が偶数のときは 1 とし，n が奇数のときは $\zeta_q(T) = h_q(T)\left(\det T, (-1)^{(n-1)/2}\det T\right)_q$ で定める．ここで $h_q(T)$ は Hasse 不変量，$(\cdot, \cdot)_q$ は Hilbert 記号である．

定理 2.1 (Siegel 級数の関数等式) Siegel 級数の多項式部分 $F_q(T, q^{-s})$ は，関数等式

$$F_q(T, q^{-(n+1-s)}) = \zeta_q(T) \left|q^r \det T\right|_q^{(n+1)/2-s} F_q(T, q^{-s})$$

をみたす．

$q = 2$ のときの定式化は，以下の文献を参考のこと．

この定理は，最初に Siegel 級数の明示式を求めるための手段として Katsurada により証明された ([Kat, Theorem 3.2])．その後，Kohnen と Böcherer ([BK, Theorem]) により証明の簡易化が行われている．彼らの結果は，[Miz] による Siegel Eisenstien 級数の関数等式から Siegel 級数の関数等式を示すというものであるが，後になって Eisenstein 級数を使わず，Siegel 級数の関数等式を直接示すという結果も得られている．例えば Hironaka-Sato ([HS, Theorem 4.1]) や Ikeda ([Ike, Theorem 4.1]) によるものがあり，特に Ikeda の [Ike, Theorem 2.1, Lemma 3.1] は分岐 Siegel 級数の関数等式にも適用可能である．しかし現時点ではまだ，これらの結果から直接分岐 Siegel 級数の関数等式を明示的に書き下すには至っていない．

次に分岐 Siegel 級数，つまりレベル p の Siegel Eisenstein 級数のオイラー p-因子について述べる．これは各カスプ w_r ごとに定義されていて，具体的には次のようになる．まず

$$\mathcal{M}_n^r = \{(C, D) \in M_{n,2n}(\mathbb{Z}_p) \mid \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in Sp(n, \mathbb{Z}_p),\ \det C \neq 0,\ \mathrm{rank}(C \bmod p) = r\}$$

と定め，

$$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}_p)^{(r)} = \{C^{-1}D \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}_p) \mid (C, D) \in \mathcal{M}_n^r\}$$

とおく．また $R = C^{-1}D \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}_p)^{(r)}$ に対して $\widetilde{\psi}(R) = \psi^*\big(\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ C & D \end{smallmatrix}\right)\big)$ (ψ^* の定義は (2.1)) とおくと，well-defined になり

$$S_n^r(\psi, N, p^{-s})_p = \sum_{R \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{(r)}} \widetilde{\psi}(R)\delta(R)^{-s}\mathbf{e}(RN) \tag{2.7}$$

と定める．これもまた p^{-s} の有理関数となり，$E_{k,\psi}^n(w_r; Z, s)$ の N におけるフーリエ係数のオイラー p-因子が $S_n^r(\psi, N, p^{-2s})_p$ となることが示される．

一般の次数 n に対しての分岐 Siegel 級数の明示式は難しい．$S_n^0(\psi, N, p^{-s})_p$ については [Gu2, Theorem 4.3] に，$r = 0$ を含む一般の $S_n^r(\psi, N, p^{-s})_p$ は [Wat, Theorem 1.1, Theorem 1.2] に，それぞれ有限和の形で書き下した式はあるが，対称行列に関する複雑な不変量を含む難解な和が残ったままの式であり，[Kat] の結果と比べても，明示式の最終形とは言い難い．実際，以下に述べる次数 2 の場合の実例を [Gu2] や [Wat] から導くのもそう簡単であるとは言えない．([Gu2, Section 6] 参照)．

分岐 Siegel 級数は Siegel Eisenstein 級数のフーリエ係数のオイラー p-因子であるから，Eisenstein 級数の関数等式から，分岐 Siegel 級数の関数等式も当然従うはずである．Eisenstein 級数の関数等式を見つけるのは難しいが，分岐 Siegel 級数は単なる p^{-s} の有理関数であるので，具体例について調べることは容易である．分岐 Siegel 級数の関数等式を見つけられれば，逆にそこから

Eisenstein 級数の関数等式を予測できるという仕組みであり，幸いなことに筆者は，これまでに分岐 Siegel 級数の実例をいくつか計算している．

例 1 次数が 2，指標が χ_p でカスプ w_1 に対応する正則な Siegel Eisenstein 級数 $E^2_{k,\chi_p}(w_1;Z)$ を考えると，これは固有値が p^{k-1} の $U(p)$-固有関数になる．後の記号に合わせ，これを $E^{2,(1)}_{k,\chi_p}(Z)$ と書くことにする．このフーリエ展開は [Gu1] で計算されており，対応する分岐 Siegel 級数 $S^1_2(\chi_p,T,p^{-s})_p$ は以下のようになる．非退化な $T\in\mathrm{Sym}^2(\mathbb{Z})^*$ は $\mathbb{Z}_p$ 上で考えて $T=p^m\operatorname{diag}(\alpha,p^t\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_p^\times$ としてよく，この時

$$S^1_2(\chi_p,T,p^{-s})_p=\frac{\chi_p(\alpha)p^{(2-s)m+3/2-s}(1-p^{2-2s})}{(1-p^{3-2s})(1-\chi^*_T(p)p^{1-s})}\bigl(1-p^{(3-2s)l}-\chi^*_T(p)p^{1-s}(1-p^{(3-2s)(l-1)})\bigr)$$

が成り立つ．ここで，χ^*_T は $\chi_T\chi_p$ から定まる原始的指標であり，t が偶数なら $\chi^*_T=\chi_T\chi_p$, t が奇数ならば $\chi_T\chi_p=\chi_0\chi'_T$ となる原始的指標 χ'_T が χ^*_T である．また l は定理 2.1 の r を用いて，$l=m+(t+r)/2$ である．

分岐 Siegel 級数 $S^1_2(\chi_p,T,p^{-s})$ の関数等式を考えたいが，そのためには不分岐の時と同様，適切なゼータ因子を取り除いた “多項式部分” を考える必要がある．ただし分岐 Siegel 級数のときは，これは一般には p^{-s} の有理式であって，必ずしも多項式になるわけではない．ここではそれを**主要部** (principal part) と呼ぶことにしよう．この場合主要部 $F^{(1)}_p(\chi_p,T,p^{-s})$ は

$$S^1_2(\chi_p,T,p^{-s})_p=\frac{1-p^{2-2s}}{1-\chi^*_T(p)p^{1-s}}F^{(1)}_p(\chi_p,T,p^{-s}) \tag{2.8}$$

として定めるとよい．すなわち

$$F^{(1)}_p(\chi_p,T,p^{-s})=\frac{\chi_p(\alpha)p^{(2-s)m+3/2-s}}{1-p^{3-2s}}\bigl(1-p^{(3-2s)l}-\chi^*_T(p)p^{1-s}(1-p^{(3-2s)(l-1)})\bigr)$$

である．すると簡単な計算により，関数等式

$$F^{(1)}_p(\chi_p,T,p^{-(3-s)})=|p^r\det T|_p^{3/2-s}\,F^{(1)}_p(\chi_p,T,p^{-s}) \tag{2.9}$$

が成り立つことが確かめられる．

注意 主要部を (2.8) のように定めるのは次の理由による．不分岐な Siegel 級数から生じるゼータ因子は (2.6) から $\dfrac{(1-\chi_p(q)q^{-s})(1-q^{2-2s})}{1-\chi^*_T(q)q^{1-s}}$ である．ゼータ関数を構成するのに足りない p-因子を，分岐 Sielge 級数のゼータ因子で補う必要があるため，主要部を (2.6) と定めるべきだということが分かる．

実は，この関数等式に気づいたことこそが今回の結果の出発点になっている．それでは他の $U(p)$-固有関数に関してはどうなっているのかというのが当然気になるところであり，以下それについても調べていく．

例 2 $E^2_{k,\chi_p}(w_2;Z)$ は固有値 p^{2k-3} の $U(p)$-固有関数であり，これを $E^{2,(2)}_{k,\chi_p}(Z)$ と書く．この分岐 Siegel 級数は $S^2_2(\chi_p,T,p^{-s})_p=1$ となる．

一般の次数 n でも $S^n_n(\psi,T,p^{-s})_p=1$ である．Siegel 級数が自明なので関数等式を考えても意味がないように見えるが，実はそうではない．ゼータ因子 (2.6) があるため，主要部にその逆数が現れるのである．もちろん正規化をどうするかの問題もあり，ゼータ因子をどのように定めるかはすぐには分からないが，少なくとも T に依存する項 $(1-\chi^*_T(p)p^{1-s})^{-1}$ はゼータ因子に含まれているはずである．実際には，今回の主定理である Eisenstein 級数の関数等式から逆算して，ゼータ因子及び主要部を

$$S^2_2(\chi_p,T,p^{-s})_p=\frac{1-p^{3-2s}}{1-\chi^*_T(p)p^{1-s}}F^{(2)}_p(\chi_p,T,p^{-s}),$$

つまり

$$F^{(2)}_p(\chi_p,T,p^{-s})=\frac{1-\chi^*_T(p)p^{1-s}}{1-p^{3-2s}}$$

と定めるとうまくいくことが分かる．

例 3 $E^2_{\chi_p,k}(w_0;Z)$ は $U(p)$-固有関数ではないが

$$E^{2,(0)}_{k,\chi_p}(Z):=E^2_{k,\chi_p}(w_0;Z)-\frac{\chi_p(-1)p^{1-2k}(p-1)}{1-p^{3-2k}}E^2_{k,\chi_p}(w_2;Z)$$

と定めると固有値 1 の $U(p)$-固有関数が得られる．その分岐 Siegel 級数は

$$-\frac{\chi_p(-1)p^{2-2s}p^{(3-2s)(m+l)}(1-p^{2-2s})(1-\chi^*_T(p)p^{s-2})}{(1-p^{3-2s})(1-\chi^*_T(p)p^{1-s})}$$

と表される (cf. [Ta1, Proposition 3.1])．この主要部を

$$F^{(0)}(\chi_p,T,p^{-s})=-\frac{\chi_p(-1)p^{2-2s}p^{(3-2s)(m+l)}(1-\chi^*_T(p)p^{s-2})}{1-p^{3-2s}}$$

で定める．

例 2, 3 のように Siegel 級数の主要部を定めると，関数等式

$$F^{(0)}(\chi_p,T,p^{-(3-s)})=\chi_p(-1)p^{-1}\,|p^r\det T|_p^{3/2-s}\,F^{(2)}(\chi_p,T,p^{-s}) \tag{2.10}$$

が成り立つことがわかる．この場合の関数等式も，$\chi_p(-1)p^{-1}$ という項を除いて，例 1 の関数等式 (2.9) と同じ形をしている．

以上の例から，Siegel Eisenstein 級数の間に

$$E^{2,(1)}_{k,\chi_p}(Z,3/2-s)\longleftrightarrow E^{2,(1)}_{k,\chi_p}(Z,s),\quad E^{2,(2)}_{k,\chi_p}(Z,3/2-s)\longleftrightarrow E^{2,(0)}_{k,\chi_p}(Z,s)$$

の形の関数等式があることが予想される．これを一般の次数の場合に拡張して考えよう．まず固有値に関しては次のようになる．

命題 2.2 Siegel Eisenstein 級数の空間 $\mathcal{E}^n_{k,s}(\varGamma^n_0(p),\psi)$ に作用する $U(p)$ の固有値は $l(s,j) = n(k/2-s)+2sj-j(j+1)/2$ とおくとき，$\{p^{l(s,j)} \mid 0 \le j \le n\}$ で与えられる．

この命題は，正則な Eisenstein 級数に対して Böcherer ([Böc, Section 4, Proposition]) や Walling ([Wal, Corollary 4.2]) により示されたものの拡張であるが，次節で彼らとは異なる証明法の方針を紹介する．さて，簡単な計算により，$l(s,j) = l((n+1)/2-s, n-j)$ が確かめられる．よって $\kappa_n = (n+1)/2$ とおくと，ここから次の定理が成り立つことが予想される．

定理 2.3 $\mathcal{E}^n_{k,\psi}(\varGamma^n_0(p),\psi)$ において，$0 \le \nu \le n$ をみたす ν に対し，$E^{n,(\nu)}_{k,\psi}(Z,s)$ で固有値 $p^{l(s,\nu)}$ の固有関数を表す．このとき関数等式

$$E^{n,(\nu)}_{k,\psi}(Z,s) = C(s)E^{n,(n-\nu)}_{k,\psi}(Z,\kappa_n - s)$$

が成り立つ．

実際この定理は，Langlands による Eisenstein 級数の一般論から成り立つことが示される (§4 参照)．これが単純な関数等式の正体であり，あとは次を示すことが目標となる．

目標 (1) $U(p)$-固有関数 $E^{n,(\nu)}_{k,\psi}(Z,s)$ を $E^n_{k,\psi}(w_j;Z,s)$ を用いて構成する手段を与える．
(2) 関数等式に現れる s の関数 $C(s)$ を具体的に書き下す．

3 Siegel Eisenstein 級数と $U(p)$-作用素

この節では，Siegel Eisenstein 級数への空間の $U(p)$-作用を具体的に書き下し，命題 2.2 を示すとともに，固有関数を構成する手段を与える．この節の内容は [Wal, Section 4] で既に得られているが，[Wal] では Eisenstein 級数を直接取り扱っているのに対し，ここではアデール上に持ち上げて調べる方法を紹介する．完全に p-local な話に持ち込むことができるため，そのほうが計算の見通しがずっと良くなる．

3.1 アデール上の保型形式

まず保型形式を通常の方法でアデール上に持ち上げる．ただしここではヘッケ作用素を取り扱うため，代数群は Sp_n ではなく GSp_n にする必要がある．$\mathbb{A}$ を $\mathbb{Q}$ 上のアデール環とし，

$$G = GSp_n = \{g \in GL_{2n} \mid {}^t g w_n g = \mu(g) w_n,\ \mu(g) \in GL_1\}$$

とおいて，$G_{\mathbb{A}} = GSp(n,\mathbb{A})$ などと表す．$G^+_\infty = GSp^+(n,\mathbb{R})$ とし，その Siegel 上半空間への作用や保型因子 $j(g,Z)$ は §2 で与えた通りとする．

$G_{\mathbb{A}}$ のコンパクト部分群 $K = \prod_v K_v$ を

$$K_v = \begin{cases} Sp(n, \mathbb{R}) \cap O(2n) & v = \infty \text{ のとき} \\ GSp(n, \mathbb{Z}_q) & v = q \neq p \text{ が有限素点のとき} \\ \{\gamma \in GSp(n, \mathbb{Z}_p) \mid C_\gamma \equiv 0 \bmod p\} & v = p \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める．K は $G_{\mathbb{A}}$ の極大コンパクト部分群ではないが，$G_{\mathbb{A}} = G_{\mathbb{Q}} G_\infty^+ K$ という分解がある．

指標 ψ は p を法とする自明指標 χ_0 または 2 次指標 χ_p であったが，これに付随するイデール指標 $\omega \colon \mathbb{A}^\times / \mathbb{Q}^\times \to \mathbb{C}$ を

$$\omega : \mathbb{A}^\times = \mathbb{Q}^\times \mathbb{R}^\times \prod_{q < \infty} \mathbb{Z}_q^\times \to \mathbb{Z}_p^\times \to (\mathbb{Z}_p / p\mathbb{Z}_p)^\times \xrightarrow{\psi^{-1}} \mathbb{C}^\times$$

で定める．ω も自明指標または 2 次指標である．$\mathbb{Q}$ の素点 v に対し，ω の v-成分を ω_v と書く．つまり $\omega_v \colon \mathbb{Q}_v^\times \hookrightarrow \mathbb{A}^\times \xrightarrow{\omega} \mathbb{C}^\times$ である．

$f \in A_k(\Gamma_0^n(p), \psi)$ に対し，$G_{\mathbb{A}}$ 上の関数 $\Lambda(f)$ を以下で定める．$\mathbf{i}_n = \sqrt{-1} \cdot \mathbf{1}_n$ とおく．分解 $G_{\mathbb{A}} = G_{\mathbb{Q}} G_\infty^+ K$ に応じて $g = \gamma g_\infty \kappa$ と書いたとき，

$$\Lambda(f)(g) = \omega_p(\det D_{\kappa_p}) j(\gamma_\infty, \mathbf{i}_n)^{-k} f(g_\infty \langle \mathbf{i}_n \rangle)$$

と定める．このとき $\Phi = \Lambda(f)$ は条件

$$\begin{cases} \gamma \in G_{\mathbb{Q}} \text{ に対し } \Phi(\gamma g) = \Phi(g), \\ u \in K_\infty \text{ に対し } \Phi(gu) = \Phi(g) j(u, \mathbf{i}_n)^{-k}, \\ \kappa = (\kappa_q) \in \prod_q K_q \text{ に対し } \Phi(g\kappa) = \Phi(g) \omega_p(\det D_{\kappa_p}) \end{cases} \tag{3.1}$$

をみたす．逆に (3.1) をみたす $G_{\mathbb{A}}$ 上の関数 Φ に対し，$\mathbb{H}_n$ 上の関数 $\Pi(\Phi)$ を $\mathbb{H}_n \ni Z = g_\infty \langle \mathbf{i}_n \rangle$ となる g_∞ を用いて

$$\Pi(\Phi)(Z) = \Phi(g_\infty) j(g_\infty, \mathbf{i}_n)^k$$

と定めると，$\Pi(\Phi) \in A_k(\Gamma_0^n(p), \psi)$ である．Λ と Π は互いに逆写像になる．

次にアデール上で Hecke 作用素を定める．$H_p = K_p \begin{pmatrix} p\mathbf{1}_n & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_n \end{pmatrix} K_p \subset GSp(n, \mathbb{Q}_p)$ とし，(3.1) をみたす $G_{\mathbb{A}}$ 上の関数 Φ に対し

$$(U(p)\Phi)(g) = p^{nk/2 - n(n+1)/2} \int_{H_p} \omega_p(\det D_x)^{-1} \Phi(gx) \, dx$$

と定める．ここで dx は $\mathrm{vol}(K_p) = 1$ となる $GSp(n, \mathbb{Q}_p)$ 上のハール測度である．$U(p)\Phi$ もまた (3.1) をみたし，剰余類 H_p / K_p を考えることにより

$$(U(p)\Phi)(g) = p^{nk/2 - n(n+1)/2} \sum_{u \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z}_p/p)} \Phi\left(g \begin{pmatrix} p\mathbf{1}_n & u \\ 0 & \mathbf{1}_n \end{pmatrix}\right) \tag{3.2}$$

が分かる．このヘッケ作用素は §2 で定めた $U(p)$ と整合的である．すなわち次が成り立つ．

補題 3.1 $f \in A_k(\Gamma_0^n(p), \psi)$ に対し

$$U(p)(\Lambda(f)) = \Lambda(U(p)f)$$

が成り立つ.

3.2 Siegel Eisenstein 級数と $U(p)$-作用素

まず Siegel Eisenstein 級数 $E^n_{k,\psi}(Z,s)$ を $G_{\mathbb{A}}$ 上の関数に持ち上げる．$G_{\mathbb{Q}_v}$ 上の滑らかな関数の空間を $\mathcal{S}_v$ と表す．ここで滑らかな関数とは，$v = \infty$ のときは C^∞-級関数の意味であり，v が有限素点のときは局所定数関数の意味である．$r = 0, 1$ と各素点 v に対し，

$$I_v^r(s,\omega) = \left\{ f \in \mathcal{S}_v \;\middle|\; f\left(\left(\begin{smallmatrix} \mu\,{}^tD^{-1} & * \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)g\right) = \omega_v(\mu)^r \omega_v(\det D) \left|\mu^n \det D^{-2}\right|_v^{s/2} f(g) \right\}$$

と定める (退化主系列の空間)．なおパラメーター s は $(n+1)/2$ ずらした方が表現論の文脈では自然になるが，今は関数の入れ物としてだけ見ているので，この方が記号が単純になる．もちろん ω (すなわち ψ) が自明指標のときは $I_v^0(s,\omega) = I_v^1(s,\omega)$ である．そして，

$$I_v^r(s,\omega)_{K_v} = \begin{cases} \{f \in I_q^r(s,\omega) \mid f(g\kappa) = f(g), \kappa \in K_q\} & v = q \neq p \text{ のとき} \\ \{f \in I_p^r(s,\omega) \mid f(g\kappa) = \omega_p(\det D_\kappa) f(g),\ \kappa \in K_p\} & v = p \text{ のとき} \\ \{f \in I_\infty^r(s,\omega) \mid f(g\kappa) = j(\kappa, \mathbf{i}_n)^{-k} f(g),\ \kappa \in K_\infty\} & v = \infty \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める．$P_n = \{g \in G \mid C_g = 0\}$ とおくと，$v \neq p$ のときは $G_{\mathbb{Q}_v} = P_n(\mathbb{Q}_v)K_v$ であるので，$\dim I_v^r(s,\omega)_{K_v} = 1$ である．その基底として $f_v^{(r)}(\mathbf{1}_{2n}) = 1$ となる $f_v^{(r)} \in I_v^r(s,\omega)_{K_v}$ をとる．一方 $v = p$ のときは両側分解 $G_{\mathbb{Q}_p} = \coprod_{i=0}^n P_n(\mathbb{Q}_p) w_i K_p$ がある．よって各 w_i ごとに特性関数をとって $\dim I_p^r(s,\omega)_{K_p} = n+1$ となりそうだが，実はそうではない．自明指標のときはよいが，2 次指標のときは，左からの $P_n(\mathbb{Q}_p)$ の作用と右からの K_p の作用が整合していないと関数の値が 0 になってしまうのである．

補題 3.2 ω が 2 次指標，つまり $\psi = \chi_p$ とする．$h(w_i) \neq 0$ なる $h \in I_p^r(s,\omega)_{K_p}$ が存在するための必要十分条件は $i \equiv r \bmod 2$ である．

この補題ゆえ, 退化主系列の空間を 2 種類 (I^0 と I^1) 用意する必要があった．なお, GSp ではなく Sp に持ち上げる場合には，このような区別は生じない．さて，ω が自明指標のときは $I_p(s,\omega)_{K_p} = I_p^0(s,\omega)_{K_p} = I_p^1(s,\omega)_{K_p}$ と書き，ω が 2 次指標のときは $I_p(s,\omega)_{K_p} = I_p^0(s,\omega)_{K_p} \oplus I_p^1(s,\omega)_{K_p}$ とおく．補題 3.2 から $\dim I_p(s,\omega)_{K_p} = n+1$ であり，その基底 $\{h_i\}_{0 \le i \le n}$ を，$h_i(w_i) = 1$ かつ $\mathrm{Supp}(h_i) = P_n(\mathbb{Q}_p) w_i K_p$ として定める．

$\varphi \in I_p^r(s,\omega)_{K_p}$ に対し，$G_{\mathbb{A}}$ 上の関数 $\mathbf{f}_\varphi^{(r)}$ を，$(g_v) \in G_{\mathbb{A}}$ に対して

$$\mathbf{f}_\varphi^{(r)}\big((g_v)\big) = \varphi(g_p) \prod_{v \neq p} f_v^{(r)}(g_v)$$

で定めると，$\mathbf{f}_\varphi^{(r)}$ は左 $P_n(\mathbb{Q})$-不変である．ω が自明指標のときは $\mathbf{f}_\varphi = \mathbf{f}_\varphi^{(0)}$ とおき，ω が 2 次指標のときは，$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ ($\varphi_r \in I_p^r(s,\omega)$) に対して，$\mathbf{f}_\varphi = \mathbf{f}_{\varphi_0}^{(0)} + \mathbf{f}_{\varphi_1}^{(1)}$ と定める．

以上の準備の下に，Eisenstein 級数を次のように定める．$g \in G_\mathbb{A}$ と $\varphi \in I_p(s,\omega)$ に対し

$$E(\mathbf{f}_\varphi, g, s) = \sum_{\gamma \in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} \mathbf{f}_\varphi(\gamma g) \tag{3.3}$$

とおく．右辺は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で収束し，性質 (3.1) をみたす．

補題 3.3 $\{h_j\}$ を上で定義した $I_p(2s,\omega)_{K_p}$ の基底とすると，$0 \le j \le n$ に対して

$$\Pi\big(E(\mathbf{f}_{h_j}, g, 2s)\big) = E^n_{k,\psi}(w_j; Z, s)$$

が成り立つ．この対応により $I_p(2s,\omega)_{K_p}$ と $\mathcal{E}^n_{k,s}(\Gamma_0^n(p),\psi)$ は $\mathbb{C}$-ベクトル空間として同型であるが，さらにこれは $U(p)$-同変となる．ここで，ヘッケ作用素 $U(p)$ は (3.2) により $I_p(2s,\omega)_{K_p}$ に作用しているとみなしている．

この補題より，$\mathcal{E}^n_{k,s}(\Gamma_0^n(p),\psi)$ への $U(p)$-作用を考える代わりに，(3.2) で定義した $U(p)$-作用を $I_p(s,\omega)_{K_p}$ 上で考えればよいことになる．$I_p(s,\omega)_{K_p}$ の基底 $\{h_j\}$ はほとんど特性関数のようなものなので，計算はかなり単純化される．具体的には $w_i \begin{pmatrix} p\mathbf{1}_n & u \\ 0 & \mathbf{1}_n \end{pmatrix} \in P_n(\mathbb{Q}) w_j K_p$ となるような $u \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z}/p)$ と i, j の組み合わせがどうなっているかを調べるだけである．詳細な計算は [Gu3] に譲るとし，結果を述べると以下のようになる．まず $s \in \mathbb{C}$ と $0 \le i, j \le n$ に対し

$$m_{\chi_0}(s)_{ij} = \begin{cases} p^{2si - j(j+1)/2 + (j-i)(j-i+2)/4} \dfrac{\prod_{r=i+1}^{j}(p^r-1)}{\prod_{r=1}^{(j-i)/2}(p^{2r}-1)} & i \le j \text{ かつ } j \equiv i \bmod 2 \text{ のとき} \\ p^{2si - j(j+1)/2 + ((j-i)^2-1)/4} \dfrac{\prod_{r=i+1}^{j}(p^r-1)}{\prod_{r=1}^{(j-i-1)/2}(p^{2r}-1)} & i \le j \text{ かつ } j \not\equiv i \bmod 2 \text{ のとき} \\ 0 & i > j \text{ のとき} \end{cases}$$

$$m_{\chi_p}(s)_{ij} = \begin{cases} \chi_p(-1)^{(j-i)/2}\, p^{2si - j(j+1)/2 + (j-i)^2/4} \dfrac{\prod_{r=i+1}^{j}(p^r-1)}{\prod_{r=1}^{(j-i)/2}(p^{2r}-1)} & \begin{array}{l} i \le j \text{ かつ} \\ j \equiv i \bmod 2 \text{ のとき} \end{array} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

と定める．

定理 3.4 (cf. [Wal, Theorem 4.1]) $\psi = \chi_0$ または χ_p に対し，

$$U(p) E^n_{k,\psi}(w_i; Z, s) = p^{n(k/2-s)} \sum_{j=i}^{n} m_\psi(s)_{ij}\, E^n_{k,\psi}(w_j; Z, s),$$

が成り立つ．特に $\psi = \chi_p$ のとき，和は $j \equiv i \bmod 2$ なる j のみを動く．

$0 \leq i,j \leq n$ に対し (i,j)-成分が $m_\psi(s)_{ij}$ である行列を $M_\psi(s)$ で表すと，$U(p)$ の表現行列は $p^{n(k/2-s)} \cdot {}^t M_\psi(s)$ となり，下半三角行列である．特に固有値は表現行列の対角成分であり，これで命題 2.2 が証明された．さらに $U(p)$-固有関数が，線形代数の理論から次のようにして得られる．$b_\psi(s)_{ij}$ を，$i > j$ に対しては $b_\psi(s)_{ij} = 0$，また $b_\psi(s)_{ii} = 1$ とし，$i < j$ に対しては帰納的に

$$b_\psi(s)_{ij} = -\frac{p^{2si-i(i+1)/2}}{p^{(j-i)(2s-(j+i+1)/2)} - 1} \sum_{r=i}^{j-1} m_\psi(s)_{rj} b_\psi(s)_{ir}$$

で定める．$\psi = \chi_p$ のとき，$i \not\equiv j \bmod 2$ ならば $b_{\chi_p}(s)_{ij} = 0$ となる．

命題 3.5 $\psi = \chi_0$ または χ_p とする．$0 \leq i \leq n$ に対し，

$$E^{n,(i)}_{k,\psi}(Z,s) = E^n_{k,\psi}(w_i; Z, s) + \sum_{j=i+1}^{n} b_\psi(s)_{ij} E^n_{k,\psi}(w_j; Z, s)$$

と定めると，これは固有値が $p^{l(s,i)}$ の $U(p)$-固有関数である． ただし，$l(s,i) = n(k/2-s) + 2si - i(i+1)/2$.

$b_{\chi_p}(s)_{ij}$ が $j \not\equiv i \bmod 2$ のときに 0 であるのは，そもそも h_i と h_j の属している空間が異なっていたから ($I^0_p(s,\omega)_{K_p}$ と $I^1_p(s,\omega)_{K_p}$) として解釈できる．$B_\psi(s) = \{b_\psi(s)_{ij}\}_{0 \leq i,j \leq n} \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ と定めると，これは狭義上半三角行列である．

4 関数等式の明示式

レベル p の Siegel Eisenstein 級数の関数等式の具体的な形を調べるのが目標であるが，その前にまず定理 2.3 の証明について述べる．$r = 0, 1$ に対して $I^r(s,\omega)_K = \bigotimes_v I^r_v(s,\omega)_{K_v}$ とし，ω が自明指標のときは $I(s,\omega)_K = I^0(s,\omega)_K$，$\omega$ が 2 次指標のときは $I(s,\omega)_K = I^0(s,\omega)_K \oplus I^1(s,\omega)_K$ とおく．すると，絡作用素 $M(s)\colon I(s,\omega)_K \to I(n+1-s,\omega)_K$ が

$$M(s)f(g) = \int_{\mathrm{Sym}^n(\mathbb{A})} f\left(w_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) dX \tag{4.1}$$

で定められる．そして $f \in I(s,\omega)_K$ に対し，Eisenstein 級数を (3.3) で $\mathbf{f}_\varphi = f$ としたものとして定義すると，Langlands の一般論より関数等式

$$E(f,g,s) = E\big(M(s)f, g, \kappa_n - s\big)$$

が成り立つことが知られている ([Ar, Part I, Main Theorem (a), (ii)] や [MW, VI.2.1. Theorem (1)] を参照)．絡作用素 $M(s)$ は明らかに $U(p)$-作用素と可換であるため，f が $U(p)$-固有関数ならば $M(s)f$ も $U(p)$-固有関数である．よって，等式 $l(s,j) = l(\kappa_n - s, n-j)$ から定理 2.3 が成り立つことが分かる．

4.1 Siegel Eisenstein 級数のフーリエ展開

絡作用素 $M(s)$ を与える積分 (4.1) を計算すれば関数等式の具体形が分かることになるのだが，この計算は決して易しくはない．代わりに Siege Eisenstein 級数のフーリエ展開，特にその定数項を計算する．すでに関数等式の存在は証明されているため，定理 2.3 の $C(s)$ は定数項の間の関数等式だけから決まってしまう．言い換えれば，定数項の間にきれいな関数等式が成り立つようにガンマ因子やゼータ因子を決めて，完備化された Eisenstein 級数 $\mathbb{E}(Z, s)$ を作ればよい．

Siegel Eisenstein 級数 $E^n_{k,\psi}(w_\nu; Z, s)$ のフーリエ展開は以下のようになる．まず定義式 (2.2) において，右辺の和は $\gamma \in Sp(n, \mathbb{Z})$ かつ $\mathrm{rank}(C_\gamma \bmod p) = \nu$ なる集合を動いていることに注意する．[Ma, p.306] に倣って，γ に関する和を $\mathrm{rank}\, C_\gamma = r$ ごとに分けて考える．すると $E^n_{k,\psi}(w_\nu; Z, s)$ のフーリエ展開は，$r \geq \nu$ に注意して，

$$(\det Y)^{s-k/2} \sum_{r=\nu}^{n} \sum_{N \in \mathrm{Sym}^r(\mathbb{Z})^*} \mathscr{S}^\nu_r(\psi, N, 2s) \sum_{Q \in \mathbb{Z}^{(n,r)}_{\mathrm{prim}}/GL_r(\mathbb{Z})} \xi_r\Big(Y[Q], N, s + \frac{k}{2}, s - \frac{k}{2}\Big) \mathbf{e}(N[{}^tQ]X)$$

と書くことができる．ここで $\mathbb{Z}^{(n,r)}_{\mathrm{prim}} = \{Q \in M_{n,r}(\mathbb{Z}) \mid (Q, *) \in GL_n(\mathbb{Z})\}$ であり，$Y[Q] = {}^tQYQ$ である．また $\mathscr{S}^\nu_r(\psi, N, s) = S^\nu_r(\psi, N, p^{-2s})_p \prod_{q \neq p} S_r(N, \psi(q)q^{-2s})_q$ であり (定義は (2.5) および (2.7))，$\xi_r(Y[Q], N, \alpha, \beta)$ は [Shi1] で扱われている合流型超幾何関数である．調べたいのはフーリエ展開の定数項であるから，$N = 0$ のときを考える．すると $\xi_r(Y[Q], 0, \alpha, \beta)$ は $\det Y[Q]$ のべきとガンマ関数の積という形をしているので ([Shi1, (1.31)] 参照)，係数には [Miz] で扱われている一般化 Epstein ゼータ関数が現れる．すなわち

$$\zeta^{(n)}_r(Y, s) = \sum_{Q \in \mathbb{Z}^{(n,r)}_{\mathrm{prim}}/GL_r(\mathbb{Z})} \det(Y[Q])^{-s}.$$

と定めると，$E^n_{k,\psi}(w_j; Z, s)$ のフーリエ展開の定数項は

$$C_r(s, k, Y) = (\text{ガンマ関数の積}) \times \det(Y)^{s-k/2} \zeta^{(n)}_r \left(Y, 2s - \frac{r+1}{2}\right)$$

を用いて $\sum_{r=\nu}^{n} \mathscr{S}^\nu_r(\psi, 0, 2s) C_r(s, k, Y)$ と表すことができる．

我々に必要なのは $U(p)$-固有関数 $E^{n,(\nu)}_{k,\psi}(Z, s)$ のフーリエ展開の定数項である．ところが Siegel Eisenstein 級数への $U(p)$ の作用は (2.4) で与えられるから，$C_r(s, k, p^{-1}Y) = p^{l(s,r)} C_r(s, k, Y)$ であることに注意すると，次が成り立つことが分かる．

補題 4.1 $U(p)$-固有関数 $E^{n,(\nu)}_{k,\psi}(Z, s)$ のフーリエ展開の定数項は $\mathscr{S}^\nu_\nu(\psi, 0, 2s) C_\nu(s, k, Y)$ である．

Eisenstein 級数を定義する和を C_γ の階数によって分解したものと，$U(p)$-固有関数の和への分解がきれいに対応しているというのがポイントであり，これによって計算が単純になるのである．残りは $\mathscr{S}^\nu_\nu(\psi, 0, 2s)$ の計算であるが，不分岐な Siegel 級数については既知であり，[Ki, Corollary

2] や [Shi2, Proposition 5.1] から次が得られる．$q \neq p$ に対し，

$$S_\nu(0, \psi(q)q^{-2s})_q = \frac{1-\psi(q)q^{-2s}}{1-\psi(q)q^{\nu-2s}} \prod_{i=1}^{[\nu/2]} \frac{1-q^{2i-4s}}{1-q^{2\nu+1-2i-4s}}.$$

分岐 Siegel 級数について筆者の知る限りでは，一般の $S_r^\nu(\psi, 0, p^{-s})_p$ の明示式はまだ得られていない．しかし我々に必要な $r=\nu$ の場合，自明な理由によってすべての $N \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z})^*$ に対して $S_\nu^\nu(\psi, N, p^{-2s}) = 1$ である．つまり定義式 (2.7) において $n=r$ とすると，$R = C^{-1}D$ をみたす C は $\mathrm{rank}(C \bmod p) = n$ をみたし，すなわち $C \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ であるから，結局和は $R=0$ のみとなってしまうということである．

注意 Siegel Eisenstein 級数のフーリエ展開から

$$E_{n,\psi}^k(w_\nu; Z, s) = \sum_{r=\nu}^n S_r^\nu(\psi, 0, p^{-2s}) E_{k,\psi}^{n,(r)}(Z,s)$$

が成り立つ．よって命題 3.5 で定めた狭義上半三角行列 $B_\psi(s)$ の逆行列を求めれば $S_r^\nu(\psi, 0, p^{-2s})$ は計算できる．なお，[Ta2, Proposition 2.2] に $b_{\chi_p}(s)_{0j}$ の (漸化式ではない閉じた) 明示式が与えられているが，筆者には証明がよく理解できない箇所がある．

以上の準備の下で主定理を述べる．$\gamma_\nu(\psi, s)$ を

$$\gamma_\nu(\chi_0, s) = \frac{1-p^{-2s}}{1-p^{\nu-2s}} \prod_{i=1}^{[\nu/2]} \frac{1-p^{2i-4s}}{1-p^{2\nu+1-2i-4s}},$$

$$\gamma_\nu(\chi_p, s) = (\varepsilon_p p^{-1/2})^\nu \prod_{i=1}^{[\nu/2]} \frac{1-p^{2i-4s}}{1-p^{2\nu+1-2i-4s}}$$

と定める．ただし，$p \equiv 1$ または 3 に応じて $\varepsilon_p = 1$ または $\varepsilon_p = \sqrt{-1}$ とした．そして，

$$\mathbb{E}_{k,\chi_0}^{n,(\nu)}(Z,s) = \gamma_\nu(\chi_0, s) \frac{\Gamma_n\left(s+\frac{k}{2}\right)}{\Gamma_n(s)} \xi(2s) \prod_{j=1}^{[n/2]} \xi(4s-2j)\, E_{k,\chi_0}^{n,(\nu)}(Z,s),$$

$$\mathbb{E}_{k,\chi_p}^{n,(\nu)}(Z,s) = \gamma_\nu(\chi_p, s) \frac{\Gamma_n\left(s+\frac{k}{2}\right)}{\Gamma_n\left(s+\frac{a}{2}\right)} \xi(2s, \chi_p) \prod_{j=1}^{[n/2]} \xi(4s-2j)\, E_{k,\chi_p}^{n,(\nu)}(Z,s),$$

と定める．ここで $a=0$ または 1 は $p \equiv (-1)^a \bmod 4$ となるように定めたものであり，完備化されたディリクレの L 関数を $\xi(s,\chi_p) = \left(\frac{p}{\pi}\right)^{(s+a)/2} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s,\chi_p) = \xi(1-s,\chi_p)$ とかいた．

定理 4.2 (主定理 1) $\kappa_n = (n+1)/2$ とおく．$0 \leq \nu \leq n$ に対して，関数等式

$$\mathbb{E}_{k,\psi}^{n,(\nu)}(Z,s) = \mathbb{E}_{k,\psi}^{n,(n-\nu)}(Z, \kappa_n - s)$$

が成り立つ．

既に関数等式の存在は定理 2.3 で保証されているので，証明のためにはフーリエ展開の定数項に対しての関数等式を示せばよい．例えば $\mathbb{E}_{k,\chi_0}^{n,(\nu)}(Z,s)$ のフーリエ展開の定数項は

$$\Lambda_{k,\chi_0}^{n,(\nu)}(Y,s) = (\sqrt{-1})^{-\nu k} 2^{\nu(\nu+3)/2-2\nu s} \pi^{\nu(\nu+1)/2} \frac{\Gamma_\nu\left(2s-\dfrac{\nu+1}{2}\right)\Gamma_n\left(s+\dfrac{k}{2}\right)}{\Gamma_\nu\left(s+\dfrac{k}{2}\right)\Gamma_\nu\left(s-\dfrac{k}{2}\right)\Gamma_n(s)}$$
$$\times \frac{\zeta(2s-\nu)}{\zeta(2s)} \prod_{i=1}^{[\nu/2]} \frac{\zeta(4s+2i-2\nu-1)}{\zeta(4s-2i)} \xi(2s) \prod_{j=1}^{[n/2]} \xi(4s-2j)(\det Y)^{s-k/2} \zeta_\nu^{(n)}\left(Y, 2s-\frac{\nu+1}{2}\right)$$

であり，$\Lambda_{k,\chi_0}^{n,(\nu)}(Y,s) = \Lambda_{k,\chi_0}^{n,(n-\nu)}(Y,\kappa_n - s)$ が成り立つことを示す．基本方針は [Miz] と同様であり，一般化 Epstein ゼータ関数の関数等式と $\Gamma_n(s)$ の関数等式 ([Miz, Lemma 6.1, Lemma 6.2]) を使えば直接計算で示すことができる．

最後に通常の基底に対しての関数等式を述べておく．$\mathbb{E}_{k,\psi}^n(w_\nu; Z, s)$ を上と同様の正規化とし，$T_\psi(s)$ で，$(\nu, n-\nu)$-成分が $\gamma_\nu(\psi, s)$ であるような，サイズが $n+1$ の反対角行列を表す．

定理 4.3 (主定理 2) 関数等式

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}_{k,\psi}^n(w_0; Z, \kappa_n - s) \\ \vdots \\ \mathbb{E}_{k,\psi}^n(w_n; Z, \kappa_n - s) \end{pmatrix} = B_\psi(\kappa_n - s)^{-1} T_\psi(s) B_\psi(s) \begin{pmatrix} \mathbb{E}_{k,\psi}^n(w_0; Z, s) \\ \vdots \\ \mathbb{E}_{k,\psi}^n(w_n; Z, s) \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

すなわち関数等式を表す行列を，狭義上三角行列と反対角行列の積で表すことができる．

参考文献

[Ar] J. Arthur “Eisenstein series and the trace formula”, Proc. Sym. Pure Math. **33**, Part I, 253–274 (1979).

[BK] S. Böcherer and W. Kohnen “On the functional equation of singular series” Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **70**, 281-286, (2000).

[Böc] S. Böcherer “On the space of Eisenstein series for $\Gamma_0(p)$: Fourier expansions. With an appendix by H. Katsurada” Comment. Math. Univ. St. Pauli **63** no. 1-2, 3–22 (2014).

[Gu1] K. Gunji, “Fourier coefficients of the Siegel Eisenstein series of degree 2 with odd prime level, corresponding to the middle cusp”, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **92**, 69–83, (2022).

[Gu2] K. Gunji, “On the Fourier coefficients of the Siegel Eisenstein series of odd level and the genus theta series”, J. Number Theory **240**, 105–138, (2022).

[Gu3] K. Gunji “On the functional equations of the Siegel Eisenstein series of an odd prime level p”, preprint: arXiv:2306.10696.

[HC] Harish-Chandra, *Automorphic forms on semisimple Lie groups*, Lecture Notes in Math. Vol.62, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1968.

[HS] Y. Hironaka and S. Sato "The Siegel series and spherical functions on $O(2n)/(O(n) \times O(n))$", Automorphic forms and zeta functions-Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa-, 150–169 (2006).

[Ike] T. Ikeda, "On the functional equation of the Siegel series", Journal of Number Theory, **172**, 44–62 (2017).

[Kal] V.L. Kalinin "Eisenstein series on the symplectic group" Math. USSR SB. **32**, 449–476 (1977).

[Kat] H. Katsurada, "An explicit formula for Siegel series", Amer. J. Math. **121**, 415–452 (1999).

[Kub] T. Kubota, *Elementary theory of Eisenstein series*, Kodansha Ltd. (Tokyo), Halsted Press (New York), 1973.

[Ki] Y. Kitaoka "Dirichlet series in the theory of Siegel modular forms" Nagoya Math. J. **95**, 73–84 (1984).

[La] R. P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes in Mathematics, **544**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[Ma] H. Maass *Siegel's modular forms and Dirichlet series*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 216. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971

[Miz] S. Mizumoto "Eisenstein series for Siegel modular groups", Math. Ann. **297**, 581–625 (1993).

[MW] C. Moeglin, J. L. Waldupuger *Spectral decomposition and Eisenstein series*, Cambridge Tracts in Mathematics, 113, Cambridge University Press, Cambridge, 1995

[Shi1] G. Shimura, "Confluent hypergeometric functions on tube domains", Math. Ann. **260**, no. 3, 269–302 (1982).

[Shi2] G. Shimura, "On Eisenstein series", Duke Math. **50**, no. 2 417–476 (1983).

[Ta1] S. Takemori, "p-adic Siegel Eisenstein series of degree two", J. Number Theory **132** (2012), 1203–1264.

[Ta2] S. Takemori, "Siegel Eisenstein series of degree n and Λ-adic Eisenstein series", J. Number Theory **149** (2015), 105–138.

[Wal] L. Walling, "Hecke eigenvalues and relations for Siegel Eisenstein series of arbitrary degree, level, and character" Int. J. Number Theory **13**, no. 2, 325–370 (2017).

[Wat] M. Watanabe, "On the calculation of the ramified Siegel series", preprint: arXiv:2302.04429