

如何にして学生に勉強させるか

— ネコ教授が楽しむ数学・計算機科学講義 —

電気通信大学 大学院 情報理工学研究科 伊藤大雄*

ITO Hiro

School of Informatics and Engineering,
The University of Electro-Communications

1 はじめに

「如何にして学生に勉強させるか」は大学教員にとっては永遠にして万国共通の課題だろう。「学生」を「生徒」や「児童」「子供」などに置き換えれば、人類の永遠の課題とも言える。教育の専門家でもない一大学教員の私がこの課題について述べるのは、いささか気が引けるが、四半世紀以上に渡って大学で講義を行なってきた結果会得した自分なりの技は無いことは無い。ここにそれを認（した）めておく事にする。諸先生方の参考になるか甚だ不安ではあるが、「愚者も千慮に必ず一得有り」（『史記』淮陰侯列伝）と言うでは無いか。

教育について常々考えていることがある。

教訓 人は必要であるか面白いかでないと真剣に学ばない。

これは真理だと思う。大学受験の際に真剣に勉強した人は多いだろう。また、自分の趣味に関することは途轍もなく詳しい人も多い。これらは必要か面白いからだから勉強した例であり、そのどちらにも該当しないが真剣に勉強したという例は寡聞にして聞いた事が無い¹。

この「必要」は「勉強しておいた方が良いでしょう」という程度ではなく、受験勉強がそうである様に「一所懸命勉強しないと非常に不味い事になる」というぐらいの必要性なので、「必修科目」程度の必要性ではまだまだ甘いようだ。そうだとすると、残る手は「面白い」と思わせるしか無い。講義内容を学生に面白いと感じさせるにはどうしたら良いであろうか。

なお筆者の専門は理論計算機科学、特に離散アルゴリズムであり、大学では離散数学、グラフ理論、データ構造とアルゴリズム、計算量理論などの講義を主に担当してきた。本稿は必然的にそういった講義に関する話となるが、他分野であっても結構応用が利くと思う。

2 課題や教科書の工夫

2.1 課題の工夫

まず考えられるのは、課題自体を面白いものにする方法だ。離散数学や離散アルゴリズム、計算量理論ではゲーム・パズルを対象として議論することができる。ゲームの必勝法やパズルの解

*itohiro@uec.ac.jp

¹そういう例があったら教えて欲しい。

法は数学的法則に則ったものが多い。グランディ数 (Grandy number) や二人完全情報ゲームの対手戦略 (pairing strategy) など一般性を持つものも多い。

図 1 の左の面積 34 の部屋を 1×2 の畳で敷き詰めることは出来ないのだが、その証明は右側の図の様に白黒二色で塗ることで簡単に出来る。 1×2 の畳はどう敷いても必ず白マスと黒マスを一

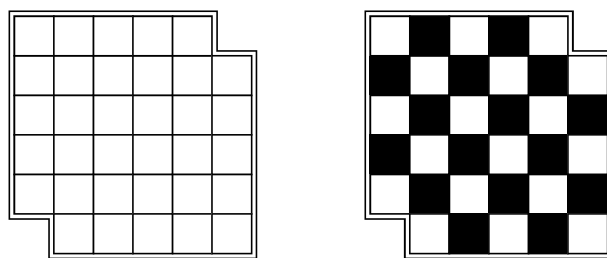


図 1: 左の部屋を 1×2 の畳で敷き詰めることが出来ないことの証明 (右)。

つずつ覆うが、白マスは 18 個で黒マスは 16 個と数が異なるので、敷き詰め不可能というわけだ。この様に白黒二色に塗り分ける、いわゆる偶奇性 (parity) を使った証明は実に様々な場面に出てくる。これなどは数学的素養のある学生にとっては結構魅力的な技法だと思う。

パズル・ゲームの数学の話題にはコンウェイやマーチン・ガードナーなど偉大な先人の数えきれない業績²が大変参考になる。拙著でもこういった関係の書籍や記事はいくつか有り [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]、講義の教科書や参考書としても利用している。

高校へ出張講義にもよく呼ばれるが、そのときの講義名は「娯楽数学入門」であり、これらの話題から抜粋して話している。ほとんどの高校生にとって、「数学とは数式と幾何」ぐらいの認識のところ、こういったパズルが数学になるという事を知って目の鱗が落ちる思いをしたという感想をくれる生徒も結構居る。そういう事を聞くのは喜びであり、わざわざ講義に行った甲斐が有ると感じる。

2.2 教科書の工夫

教科書自体を工夫する方法もある。最近の拙著で『イラストで学ぶ離散数学』[8] がある。これは講談社の『イラストで学ぶ』シリーズから声を掛けていただいて書いたものだ。私は漫画やイラストを描くのが好きで、小学生の頃からコマ割りをした漫画を描き、小学校の学級新聞に四コマ漫画を載せていたし、大学時代には漫研に所属していた³ぐらいなので、この話が来たときに、「これを私が書かずに誰が書く」と思って即座に引き受けた。このシリーズの他の著者は、多分全員がイラストはプロに描いてもらっていると思うが、私は当然自分で全て描いた⁴。

この本はそのシリーズ名から、一般向けの本というのが基本設定だと思うが、勤務している大学で『離散数学』の講義を持っていることから、「せっかくだから講義で使える教科書にもなるようにしよう」と考えた。かなり無茶な挑戦だったが、定理や証明はきっちり書く一方、イラストを充実させて直感的な説明も沢山書くという手法でなんとか乗り切ったと思っている。実際、拙著としては異例の売り上げを記録している⁵し、学生から教科書に対して文句が出ているということも無い。そのイラストの一部を抜き出して本稿末尾の図 2 に掲げておく。学生に興味を持たせる為には、こういう手法も時に有効なのかもしれない。

²文献があまりにも多く、検索すればいくらでも出てくるので、ここでは省略することにする。

³機関紙『風車小屋』の 11~17 号に作品が掲載されている。

⁴正確には、漫画でない部分を一箇所だけ講談社にお願いした。

⁵発行から 4 年弱で第 5 刷が発行された。

3 講師に興味を持ってもらう方法

学生に興味を持たせる方法として、講師自身（つまり私）に興味を持たせることが重要と考えている。その為の方法として、講義内容に関係した逸話や裏話を話すのが効果的だ。学会やその研究分野の裏話、論文投稿のシステムの説明や国際会議運営やPCの苦労話などは学生にとって新鮮なようで、眠そうだった学生の目を醒まさせる効果もある。

その他に、ある用語が出てきたら、そこから連想する話題を繋げゆくのも良く用いる。例えば「エラトステネスの篩（ふるい）」が出てきたら、「エラトステネスが地球の直径を測った」という逸話を話す。続けて「つまりギリシャ時代には地球が球であることは知識階級には知られていた」ということを述べ、「しかし万有引力の発見されていない当時、地球が球ならば、裏側の人が下に落ちたり、地球自体が下に落ちたりしないか心配にならないか？」と続け、「プラトンの著作『パイドン』（私は高校生の時に読んだ）の中で、その事について『地球の周りの空間が均質ならば、落ちる方向が無いので、その場所に止まっている』と説明されている」ことを話したりする。このことから「古典を読むことの重要性」にまで言及することもある。こういう逸話を話すことで、学生の興味を沸かせ、知識がより強固になる。

他にも話題の展開の例を挙げておく。当然ながら一時（いちどき）にこの全てを話すわけではなく、適当なところで切る。他の話題から繋がってこの階段の途中から入ることもある。なお、以下では詳細をいちいち述べるのは冗長なので、項目のみを記す。

素数

- 素数判定アルゴリズム
 - エラトステネスの篩は何故「遅い」のか
 - アルゴリズムの計算時間：指数時間と多項式時間
 - 論文「PRIMES is in P」（AKS 判定法）
 - FOCS 2002 のバンケットの後の特別セッションの話
 - 公開鍵暗号
 - 素因数分解の決定性多項式時間アルゴリズムは見つかっていない。
 - 素数は財産（金庫で管理！）
 - 量子計算による多項式時間アルゴリズム (Shor)
 - 暗号：シーザー暗号（HAL と IBM）、ポーの『黄金虫』

公理

- ユークリッド『原論』
 - 非ユークリッド幾何学
 - アインシュタインの一般相対性理論
 - 数学は最も役立つ学問（「役に立たない」と言うのは無知を曝け出すこと。）
- ZFC 公理系
 - 選択公理
 - バナッハ・タルスキーのパラドックス
 - 体積はうまく定義できない（面積はできる）。
 - 当たり前に見えるけど証明が必要なもの
 - ジョルダンの閉曲線定理

NP 完全

→ 7 大未解決問題

→ ポアンカレ予想の解決とペレルマンの隠居（100 万ドルの賞金もフィールズ賞も拒否）

→ 歴史に残る天才数学者にはいわゆる「変人」が多い。

- ・ ガロア：エコール・ポリテクニークの入試 [9]。決闘で死んだ。
- ・ エルドシュ：家を持たず放浪した。「君の頭は営業中かね？」 [10]
- ・ ナッシュ：映画『ビューティフルマインド』

→ $P \neq NP$ は不可能性の証明

→ 不可能性の証明にはメタ理論が必要

→ ギリシャの三大作図問題（円積・倍積・角の三等分）

→ 角の三等分家

→ 疑似科学はなぜ科学で無いか：反証性とオッカムの剃刀

→ UFO と UAP (unidentified aerial phenomena)

→ 対角線論法

→ ゲーデルの不完全性定理

→ ヒルベルトプログラム

→ ZFC 公理系

集合論

→ ラッセルのパラドックス

→ パラドックス色々

- ・ 床屋のパラドックス、予期しない死刑のパラドックス、ヘンペルの鳥、
サンクト・ペテルスブルグのパラドックス（ベルヌーイ）等
- ・ ゼノンのパラドックス
→ 師匠パルメニデスの哲学を擁護？「競技場のパラドックス」の真意。

→ 数学の新たな分野を切り開くことの重要性

- ・ 論理：ブール
- ・ 確率論：フェルマーとパスカル
- ・ 解析学：ライプニッツとニュートン
- ・ 虚数と複素数：カルダーノとガウス
- ・ グラフ理論：オイラー（ケーニヒスベルグの橋の問題）
→ 四色定理
→ 計算機を使った証明
- ・ ゲーム理論：ナッシュ（囚人のパラドックス）
→ 無秩序の代償 (Price of Anarchy) の理論
- ・ 計算科学：ゲーデルとチャーチ、チューリング、ノイマン等

上は一例であり、他にも色々ある。諸兄には自分の知識と興味の範囲でいろいろ手を加えて使っていただいても良いだろう。研究室に配属になった学生に「先生のあの話が面白かったので、この研究室に来た。」と言われたこともあるので、結構馬鹿にできない。ただ気をつけるべきは、時間配分を考え、肝心の講義内容を話す時間が削られない様にする事だ。事前に「今日はこのあたりでこの話を入れよう」などとある程度計画を立てておくのが良い。もちろん、学生の質問や反応を見つつ、臨機応変にやっていく必要はあるが。

4 おわりに

「はじめに」でも書いたが、私は教育の専門家では無い。従って、効果の分析ができる訳では無いが、ここに書いたことは経験的にかなり効果的と考えていることばかりである。特に

教訓 人は必要であるか面白いかでないと真剣に学ばない。

このことは真理であると信じている。“You can take a horse to the water, but you can't make him drink.” という諺もある。如何にして水を美味しいと思わせるか。我々教員の永遠のテーマであろう。

参考文献

- [1] 伊藤大雄, パズル・ゲームで楽しむ数学, 森北出版, 2010 年 2 月 24 日.
- [2] 伊藤大雄, 「一般化三並べ」における未解決問題, 数学セミナー, 日本評論社, Vol. 49, No. 12, pp. 28–32, 2010.
- [3] 伊藤大雄, “一般化ジャンケン,” 特集「娯楽のOR」, オペレーションズ・リサーチ (日本オペレーションズ・リサーチ学会誌), Vol. 58, No. 3, pp. 156–160, 2012.
- [4] 伊藤大雄, 専門家を唸らせたピーター・ウインクラーのピザパズル, 数学セミナー, 日本評論社, Vol. 52, No. 6, (通巻 620 号), pp. 50–55, 2013.
- [5] 伊藤大雄, 川渡り問題, 特集「授業で使えるおもしろパズルネタ大集合」, 数学教育, 明治図書, Vol. 55, No. 5, pp. 77–79, 2014.
- [6] 伊藤大雄, 雨に走れば公式 — 雨の中を歩くと走るで濡れる量の違い, 数学セミナー, 日本評論社, Vol. 59, No. 6, (通巻 704 号), pp. 44–48, 2020.
- [7] 伊藤大雄, 離散数学とパズル・ゲーム, 特集「離散数学に親しむ」, 数理科学, サイエンス社, Vol. 59, No. 12, pp. 7–13, 2021.
- [8] 伊藤大雄, イラストで学ぶ離散数学, 講談社, 2019 年 9 月 5 日.
- [9] L. インフェルト (著), 市井 三郎 (訳), ガロアの生涯 — 神々の愛でし人, 日本評論社, 1969.
- [10] ポール・ホフマン (著), 平石律子 (訳), 放浪の天才数学者エルデシュ, 草思社, 2000.



猫4匹が座布団3枚の上に居るならば
2匹以上居る座布団が必ず存在します。

メチャメチャ当たり前
なんですけど...



私の教授力は530000です



必要条件と十分条件

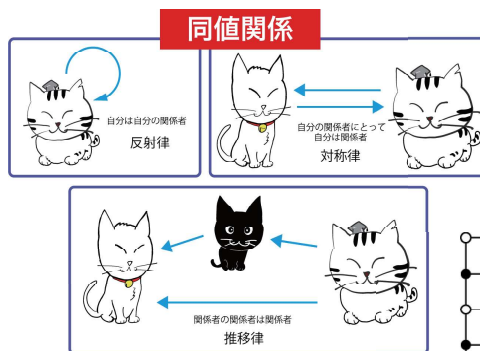
$A(x)$: 'xはコネコ総選挙に立候補した'



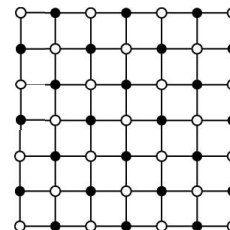
$B(x)$: 'xはコネコ総選挙で一番になった'



一番になったということは
立候補した事なので、
($\forall x$) ($B(x) \rightarrow A(x)$) は真、
すなわち $B(x) \Rightarrow A(x)$ なので、
 $A(x)$ は $B(x)$ の必要条件で、
 $B(x)$ は $A(x)$ の十分条件。
つまり、「立候補」は
「一番になる」ために必要で、
「一番になったこと」から
「立候補したこと」は十分に
言える。



煮干しが無ければ
秋刀魚を食べれば
いいのに



この2色に塗り分ける方法は
結構使われるので、
覚えておくと良いですよ。



($\alpha \rightarrow \beta$) は何故「 α が偽なら常に真」なのか

例: 命題 A: 'クロはお行儀よくしていればお刺身が貰える' は

命題 α :

'クロはお行儀よくしている'



命題 β :

'クロはお刺身が貰える'



とすると ' $\alpha \rightarrow \beta$ ' と書くことができる。

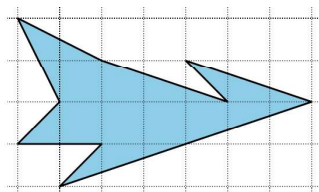
この命題は、 α が真の(お行儀よくしている)場合のこと
しか決めていない。



α が偽の(お行儀が悪い)場合は何も決めていないので
結果がどうあれ命題に反しない(つまり命題 A は真)。



キングネコ教授があらわれた!

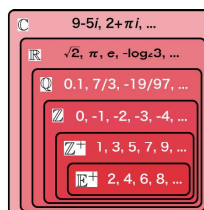


青い部分の面積を求めて下さい。

楽勝です。

図形を分割したり
引いたりしてはダメです。

うそっ!? (^^)



「大きさはどれも」って言われても
「もうちょっとなんとかならんのか」
と思うよね。



ひねり過ぎて
元ネタが分からん!



これ、ほんまに教科書なん・・・?

こーゆー中身です。



図 2: 『イラストで学ぶ離散数学』講談社のイラストの例。