理工系の数学教育に従事して思うこと

名古屋大学・名誉教授　三井　斌友*

Taketomo MITSUI

Professor Emeritus, Nagoya University

はじめに

この研究集会の趣旨に沿って，高等教育における数学の意義・内容について，主として筆者の経験に基づく解説を試みる．筆者はこの主題についてこれまで系統的な研究を行っていないので，理論的探求が十分に行われたとの自信はないが，研究上の主題を数値解析 (numerical analysis) とする筆者が，高等教育における様々な場面でこれまで試み，あるいは心掛けてきた内容を記述し，読者の参考となることを願っている．

いわゆる文系・理系の区分にかかわらず，高等教育において数学が占める意義・役割はきわめて大きいと考えている．昨今 “データサイエンス” が人口に膾炙し，そのソフトウェアさえあれば何でも解決するかの誤解・迷信がみられるが，それは極めて皮相な考えであろう．データサイエンスが必要であるからこそ，人々の数学リテラシーが高まらなければならず，そのために高等教育における数学の役割は，むろんその内容・方法をさらに研究し，高めることは求められているが，一層重視されなければならないと考える．そのために本稿がささやかな一助となれば幸いである．

1　大学数学教育との関わり — 職歴を振り返って

まず筆者自身の大学数学に関する教育・被教育体験から出発しよう．筆者は 1963 年 4 月，東京大学教養学部理科一類に入学し，65 年 4 月 同学部基礎科学科に第二期生として進学，1967 年 4 月 同大学大学院理学系研究科相関理化学専門課程修士課程に進学して，69 年 3 月に修了した．学部 4 年次から基礎科学科数学研究室で学生生活を過ごしたが，院生時代に上智大学理工学部非常勤講師として，線型代数学を担当する経験をもった．1969 年 4 月 京都大学数理解析研究所に助手として採用され，数値解析研究部門で教員生活を始めたが，この在職中に，同志社大学工学部，京都産業大学理学部，京都大学教養部で非常勤講師として教養科目（線型代数学，微積分学など）を，また京都大学理学部の数値解析科目を担当した．1983 年 5 月 福井大学工学部（共通講座）に異動し，工学部各学科の専門基礎としての数学科目（微分方程式，複素解析，フーリエ・ラプラス解析，ベクトル解析など）を担当し．同時に大学院修士課程向けには数値解析の講義を行った．

1986 年 4 月 名古屋大学工学部情報工学科に異動した．ここでは専攻が既設で，85 年 4 月に学科を開設したところであって，学部専門科目として数値解析，情報数学（離散数学），他学科の計算機プログラミング，大学院科目として数値解析，数式処理などを担当した．さらに，1992 年 4 月 新設の同大学人間情報学研究科に異動した．これは教養部改組の一環として設置されたので，講義担当科目が広がり，情報文化学部専門科目として数値解析，情報数

*tom.mitsui@nagoya-u.jp

理解析学実習など，教養課程科目として初年次ゼミ，情報文化学部，農学部，医学部向けの線型代数学，微積分学，大学院科目として計算数理科学などを担当した．計算数理科学は多元数理研究科科目に指定されたこともあった．2007年3月に名大を定年退職したのち，2008年4月 新設の同志社大学理工学部数理システム学科へ移り，自学科向けにコンピュータ入門，複素解析，微分方程式，数値解析を，学部他学科向けに線型代数学，微積分学，微分方程式，フーリエ解析を，大学院向けには計算数理科学などを担当した．いわゆる「教員免許更新制度」が導入された事情もあって，夏期講座として教員免許更新講習（数学）も担当した．

ここで数値解析について触れておきたい．これを定義づければ “連続数学の数値アルゴリズムの設計・解析・評価に関する数学理論” (A mathematical discipline to design, analyse and evaluate numerical algorithms in continuous mathematics) ということができる．筆者も参加した “科学技術の智プロジェクト”（2006年12月 – 2008年3月）は科学技術リテラシー確立をめさしたが，その「数理科学専門部会報告書」(2008.6) には「数理科学の曼陀羅」として，数学のコアと，その外界（自然，環境，社会，文化，自然科学，工学，文化）とのかかわりを図示する試みを掲載した．この「曼陀羅」に則すと，数学コアと諸科学とが接する interface を ‘応用数理’ と考え，そこに生じる数量とその法則の把握が基本であるから，数値データを数理的に扱う局面では常に数値解析が必要になるといえよう．そのためアルゴリズムを重視することは当然であるが，同時にいわば “思考の形態” としてもアルゴリズムの重要性を認識している．こうした立脚点は自ずと，担当した授業にも反映してきたと考えている．なお上記報告書は．現在電子書籍版としてダウンロードできる．詳細は

`https://literacy.scri.co.jp/`科学技術の智プロジェクト報告書

を参照されたい．

2　大学生の数学力の現状

高等教育，特に大学における数学教育を考えるならば，まず対象となる学生たちの現状をつかむことが求められる．それに従事している教員が個々に観察すること，感じることも大切であるが，やはり系統的な調査結果に基づいた分析が肝要である．その意味で，日本数学会教育委員会が企画し，2011年4月から7月にかけて，全国の国公私立 48 大学の学生約 6 千名を対象にした数学力基本調査は，大学に入学したレヴェルの学生たちの「数学力」を，統計処理を含めて的確に分析した貴重な調査である．その調査報告書は

`https://www.mathsoc.jp/overview/committee/education/`

から閲覧できるし，文献 [3] の「2.2 リテラシーから見た大学生の数学教育」（宇野 勝博）にも紹介されている．ここでは，概要の一部をかいつまんで紹介しよう．

調査は，対象者の属性を調べる事項から始まる．すなわち，小学校・中学校・高等学校の各課程の教科科目について,「得意だった」「不得意だった」「どちらでもない」の3種類に分類してもらう設問から始まり，次いで塾や予備校（家庭教師を含む）で算数・数学の指導を受けたことがあるかを問い，大学受験で数学の試験を受けたことがあるかを「ない」「マークシート方式のみ受験した」「記述式試験を受けた」の3選択で回答を求める．

学力基本調査の第一ステージ（解答時間5分）として選択解答式の設問

> ある中学校の三年生の生徒 100 人の身長を測り，その平均を計算すると 165.3 cm になりました。この結果から確実に正しいと言えることには○を，そうでないものには×を，左側の空欄に記入して下さい。

をあげ，事項として次の 3 点を示している．

(1) 身長が 163.5 cm よりも高い生徒と低い生徒は，それぞれ 50 人ずついる。

(2) 100 人の生徒全員の身長をたすと，$163.5 \text{ cm} \times 100 = 16350 \text{ cm}$ になる。

(3) 身長を 10 cm ごとに「130 cm 以上で 140 cm 未満の生徒」「140 cm 以上で 150 cm 未満の生徒」$\cdots$ というように区分けすると,「160 cm 以上で 170 cm 未満の生徒」が最も多い。

すなわち，統計的平均の定義と，それに関する初歩的な推論を二択式で問うている．次は

次の報告から確実に正しいと言えることには○を，そうでないものには×を，左側の空欄に記入して下さい。

> 公園に子供たちが集まっています。男の子も女の子もいます。よく観察すると，帽子をかぶっていない子供は，みんな女の子です。そして，スニーカーを履いている男の子はひとりもいません。

と設問し，事項として次の 3 点を示している．

(1) 男の子はみんな帽子をかぶっている。

(2) 帽子をかぶっている女の子はいない。

(3) 帽子をかぶっていて，しかもスニーカーを履いている子供は，一人もいない。

すなわち，やはり二択式で，命題の条件の論理的な読み取りを問うている．第二ステージ（解答時間１０分）の第 1 問は

偶数と奇数を足すと，答えはどうなるでしょうか。次の選択肢のうち正しいものに○を記入し，そうなる理由を下の空欄で説明してください。

(a) いつも必ず偶数になる。

(b) いつも必ず奇数になる。

(c) 偶数になることも奇数になることもある。

である．すなわち，整数の性質に関する初歩的な論証を問う問題であり，しかも記述式解答によって理解度も測ろうとしている．第 2 問は

2 次関数 $y = -x^2 + 6x - 8$ はどのような放物線でしょうか。重要な特徴を，文章で 3 つ答えてください。

であって，解答欄には (1), (2), (3) の欄が用意されている．やはり記述解答方式で二次関数の性質を問うている．第三ステージ（解答時間１０分）の設問は

右の図の線分を（問題用紙に直線分を与えている），定規とコンパスを使って正確に三等分したいと思います。どのような作図をすればよいでしょうか。作図の手順を，箇条書きにして分かりやすく説明してください。なお，説明に図を使う場合は，定規やコンパスを使わずに描いてもかまいません。

であって，やはり記述解答方式で，平面図形の性質と作図アルゴリズムを問うている．

この調査結果と，それに基づく「数学教育への提言」（2012 年 2 月）は先の Web page に掲載されているが，それを標語的に総括してしまうと

問 1-1　４人に１人は，平均の意味がわからず
問 1-2　命題の逆・対偶の理解という論理的読解に課題残る
問 2-1　対象者の在籍が国立難関校とそれ以外を分けた問題 — 整数の性質の論証
問 2-2　やはり対象者の在籍が国公立と私立を分けた問題 — グラフの性質
問 3　「相似を利用した作図」との点で知識の利用に課題

といえよう.「提言」の ‘基本調査とその分析’ ではさらに

- 論理を正確に解釈する能力に問題
- 論理を整理された形で記述する力が不足
- 定規とコンパスで作図するということが何を意味するのかを理解していない

と分析しているのであるが，なかでも解答結果に対する統計的相関分析で注目したいのは，調査対象者の数学記述試験の経験あり・なしが,「正解に近い & 不正解から遠い」か「正解から遠い & 不正解に近い」かを分ける指標として頻発することであろう．このような分析結果は現在も続いているのではないかと憂慮する．

「論理的読解に課題残る」の総括は，確かに社会一般でもその傾向が観察される．たとえば，某国の首相は国会で次のように発言したと記録されている．

> 「あなたはサマワが危険地帯であるなら自衛隊の派遣は正しくないと言ったじゃないですか．一方，私は『サマワが危険なのか危険でないのかは知らない』と言いました．言い換えれば,『サマワが危険であるとは断言できない』ということです．だから，自衛隊をサマワに派遣することが正しくないとは言えないでしょう．派遣は正しいんです.」

多少なりとも数理的論理を習得したものは，“そこが非戦闘地域ならば自衛隊を派遣する” との原命題に対して “そこが戦闘地域ならば自衛隊を派遣しない” は裏命題であり，“自衛隊を派遣するならば，そこが非戦闘地域である” は逆命題であり、“自衛隊を派遣しないならば，そこは戦闘地域である” は対偶であることを知っているし，“逆は（必ずしも）真ならず” も了解している．

このような一般的・社会的背景があるからというのみではないが，90 年代後半ころから，筆者は様々な数学科目を受講する学生の既学修内容・学習態度・意欲に不安を覚えるようになった．そこで，大学１年次の数学科目の授業開始時に，受講生の意識状況を知るべく，アンケートを試みることとした．たとえば，同志社大学理工学部の電気工学科１年次生クラス（約５０名）の線型代数学の授業開始時に，次のような質問を行い，その場で Yes or No の挙手を求め，回答傾向を見た．

Q1. 数学は暗記科目である．

Q2. 数学は問題を解く科目で，解答は一つしかない．

Q3. $1 + 1 = 2$ とは限らない．考えている状況による．

Q4. 数学の内容は，時間と手間をかければ誰でも理解できるものである．

その回答傾向をみると，Q1, Q2 については約半数が Yes に挙手し，Q3, Q4 について半数強が Yes に手を挙げるが，自信なさげであった．それは世上よく聞いていた，予備校，あるいは高校の教室でさえ「数学の問題が与えられたら，考えるな，暗記した解答パターンのどれにに当てはまるかを素早く判断して，解答を書け」と教えられてきた学生たちという，背後にある問題を感ぜざるをえない事態であった．

既述の "科学技術の智プロジェクト" では,「全ての日本人が身に付けてほしい科学技術の基礎的素養として，科学技術リテラシーを明示しよう」との目的で実施され，その目標は全ての日本人（高校卒業相当の水準）なので，特に理工系学部学科の大学生はリテラシーの目標のうちの

- 日常生活で数学を能動的に使う
- 専門職業人として数学を能動的に使う
- 個人生活の中で数学を用いて判断する
- 数学的な考え方を通して思考力・コミュニケーション能力を高める

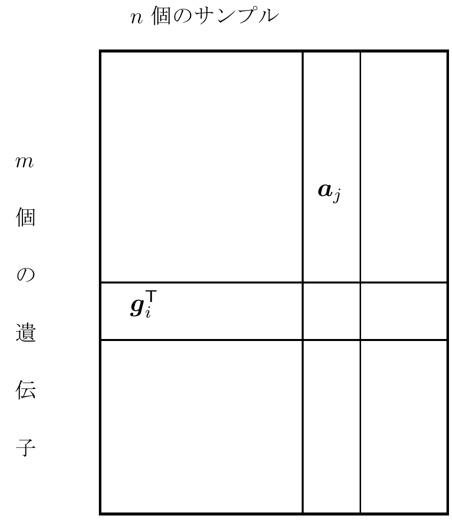
は達成してほしいと期待するのは妥当とみるべきであろう．目標のうちの「数学が社会や科学で果たしている役割および文化としての価値を理解する」,「数学を楽しむ」は，措くとしてもである．しかし，本共同研究がめざす目標である，最新の社会的課題（データサイエンス，AI — 人工知能？人造知能？ —，統計などなど）にも対応できる能力 (competence) が問われるなかで，理工系の数学教育をどう考えるかは，なかなかの難問と言えよう．しかも，これまでの 3 回の数理研研究集会（2011 年 2 月，2014 年 2 月，2018 年 2 月）での報告や，文献 [1, 3] において既に多くの方々が識見を記述していて，もう語り尽くされているのではとの疑念をぬぐえないが，本稿で披瀝する個人的な経験と感想が，参考になるならば幸いである．

3　基礎科目（線型代数学，微積分学）の意義

今更ながら，大学の数学教育における基礎科目二教科の重要性を強調しすぎることはないだろう．しかし困難なのは，受講する学生たちがその意義を理解して，学習に取り組むように，しかも展望をもって取り組むようにできにくいことにある．特に線型代数学は（微積分学と比べてさえ）むずかしく感じていると判断される．しかし，線型代数学における線型性，線型写像，n 次元空間，固有値 $\cdots$ などの概念はいずれも，先に述べた意味での "応用数理" に進もうとするならば，絶対不可欠である．このような "乖離" が生じる根拠は，たとえば次のように分析されている [5].

> 数学は，実在の諸関係を表現する形式ではあっても，宇宙空間に実在するものではありません．... 構想力がこしらえ上げた数の世界，ベクトル，行列，... などが有効性を持つのは，意識の外に実在する諸量の諸関係を，忠実に反映しているためです.

この "反映" をいかにして自らのものとできるかが課題である．データ解析における行列の特異値分解の意義（[2] 第 1 章）を例として，課題の解明を試みてみよう．遺伝子データ解析では，DNA マイクロアレイ (DNA microarray) を用いることで，多数の検体（サンプル）に対して遺伝子配列を知ることができる．それは次に示す $m \times n$ の遺伝子発現行列 (gene expression matrix) A として記述される．ここで $\boldsymbol{a}_j$ は，第 j サンプルの遺伝子成分を表示する列ベクトル，$\boldsymbol{g}_i^\top$ は，第 i 遺伝子成分がサンプルにどのように含まれるかを表示する行ベクトルである．



遺伝子発現行列がえられたとき，特定の症状・遺伝発現に関して，主要な遺伝子配列は何かを特定することが重要であり，A の特異値分解 (singular-value decomposition, SVD) がそれを実現する．

　線型代数を復習すると，実数を成分とする m 行 n 列の行列 $A \in \mathcal{M}(m, n; \mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n], \qquad \boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^m$$

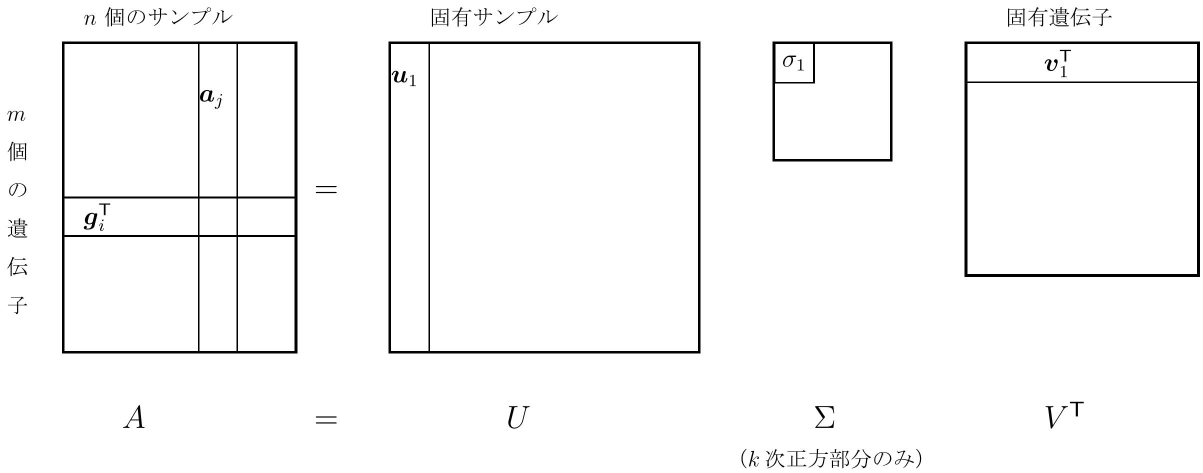
が与えられたとき，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m)$ は，線型写像 F_A を意味する．

$$F_A : \quad \mathbb{R}^n \quad \xrightarrow{A} \quad \mathbb{R}^m$$

すると，U, V を直交行列 （$U^\top U = I_m, V^\top V = I_n$） として，分解 $A = U\Sigma V^\top$ が一意的に可能であることが知られている．すなわち

$$\begin{aligned} U &= [\boldsymbol{u}_1 \ \boldsymbol{u}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{u}_m] \in \mathcal{M}(m, m; \mathbb{R}) \quad (\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{R}^m), \\ \Sigma &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ \text{\Large 0} & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(m, n; \mathbb{R}), \quad r = \operatorname{rank}(A), \\ V &= [\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n] \in \mathcal{M}(n, n; \mathbb{R}) \quad (\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

が成り立ち，$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ は A の特異値とよばれる．これを遺伝子発現行列に適用すれば



が成り立つことを意味する．特異値は大きさの順に並んでいるので，σ_1 に対応するベクトル $\boldsymbol{g}_i^\top$, $\boldsymbol{u}_1$ が重視されるべきことを示しているし，特定の症状・遺伝発現に関して，主要な遺伝子配列は何かを特定することも可能であることを意味している．このようにビッグデータも，「性質の並び」対「サンプルの並び」を示す行列として表現できることが，きわめて多い．すると，表現行列の特異値分解が有用であり，しかも dqds 法 (differential quotient difference with shifts) と名付けられた特異値分解の有効な数値アルゴリズムが知られている．それは

$$A \;\rightarrow\; \text{(直交変換)} \;\rightarrow\; \text{上二重対角行列} \rightarrow \text{(反復計算)} \;\rightarrow\; \text{特異値分解}$$

との道筋をとる方法である．すなわち，線型代数を理解することなくデータ解析はありえないのであり，受講者にこの展望をどう描いてもらうかが，授業の課題といえよう．ここに描いたような，線型代数の応用例を概説することが有用であるかもしれない．微積分学がデータ解析などで果たす役割は，変化の数学的把握の方法として函数があり，その性質を調べ，応用するのが微分積分演算であるから、もっと明瞭である．

4　線型代数学・微積分学授業でのレポート課題例

先に引用した数学リテラシーの「報告書」では，数学の本質を分析して次のように総括した．

- 数学の基礎は数と図形である
- 数学は抽象化した概念を論理によって体系化する
- 数学は抽象と論理を重視する記述言語である
- 数学は論理的な構造（数理モデル）の学として諸科学に開かれている

大学での数学教育でも “抽象・論理・記述言語” という特質を一層意識することが，受講者による将来の応用展開にとっても重要ではないかとの観点にたって，線型代数学・微積分学の

レポート課題に，筆者は以下の問題を含めてみた．期末試験問題ではなくレポート課題として課したのは，歪められた「点数主義」ではなく，数学の特質に沿った考察・思考をしてほしいとの意図があり，レポート提出時には「解答例」の提示も行った．

線型代数学のレポート課題例 1

$\mathcal{M}_n$ を n 次正方行列全体が作る集合とする．次のそれぞれの命題が成り立つかどうかを，理由を付して述べよ．すなわち，成り立つときはその証明を述べ，成り立たないときは，成り立たない例（これを反例という）を一つあげよ．

(1) $A, B \in \mathcal{M}_n$ で，A, B とも正則ならば，$A + B$ も正則である．

(2) $A \in \mathcal{M}_n$ が正則ならば，A と A^{-1} は可換である．

解答例 (1) 成り立たない．反例として $n = 2$ で

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

とおけば，A, B とも正則で，$A^{-1} = A, B^{-1} = B$ であるが

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

なので，$A + B$ は正則ではない．

(2) 成り立つ．$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$ が成り立つからである．

課題の意図:行列の正則性，行列積や行列どうしの演算の理解．

線型代数学のレポート課題例 2

n 次正方行列全体に，通常のやり方で加法とスカラー乗法を定義した線型空間 $M_n(\mathbb{R})$ について，次の部分集合を考える．それぞれが $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間かどうかを，理由を付して答えよ．

(1) 行列式が 1 である行列全体

(2) ある $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して，等式 $AX = XB$ を満たす X の全体

(3) ある n 次ベクトルの組 $\boldsymbol{a}(\neq \boldsymbol{0})$ と $\boldsymbol{b}$ に対して $Y\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ をみたす Y の全体

解答例 (1) 部分空間ではない．部分空間の公理には，$A \in$ 部分空間ならば，任意のスカラー λ に対して，スカラー倍 $\lambda A \in$ 部分空間が含まれている．しかし $\det(A) = 1$ のとき，$\det(2A) = 2^n \det(A) = 2^n$ であって，満たさない．
(2) 部分空間である．任意のスカラー λ, μ と，題意の等式を満たす任意の X, Y に対して

$$\begin{aligned} A(\lambda X + \mu Y) &= A(\lambda X) + A(\mu Y) = \lambda AX + \mu AY \\ &= \lambda XB + \mu YB = (\lambda X + \mu Y)B \end{aligned}$$

と計算できるから，$\lambda X + \mu Y$ も題意の等式を満たす．
(3) 部分空間ではない．題意の等式を満たす，ともに零行列ではないある X, Y に対して

$$(X + Y)\boldsymbol{a} = X\boldsymbol{a} + Y\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{b}$$

と計算できる．$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ なので，$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ であって，$2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$ は成立せず，$X + Y$ が題意の等式を満たさない．

出題意図： 部分空間の公理，行列とベクトルの積，行列式の性質，反例, 部分空間の公理, 行列の線型結合,「任意」と「ある」．

線型代数学のレポート課題例 3

線型代数学の期末試験を行ったところ，設問

> n 次正方行列 A と，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ があって，ある自然数 k に対して
>
> $$A^k\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \qquad A^{k+1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$
>
> が成り立つならば，ベクトルの組 $\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, \cdots, A^k\boldsymbol{x}$ は線型独立であることを示せ．

に対して，ある学生の解答は次のようであった．

> $$a_0\boldsymbol{x} + a_1A\boldsymbol{x} + a_2A^2\boldsymbol{x} + \cdots + a_kA^k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad (a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R})$$
>
> とおき，これが任意の $\boldsymbol{x}$ について成り立つとする．$A^k\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ で，どのような $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$) についても上式が成り立たなければならないので，$a_0 = a_1 = \cdots = a_k = 0$．また
>
> $$a_0\boldsymbol{x} + a_1A\boldsymbol{x} + a_2A^2\boldsymbol{x} + \cdots + a_kA^k\boldsymbol{x} = A^{k+1}\boldsymbol{x}$$
>
> より，与えられたベクトルの組に $A^{k+1}\boldsymbol{x}$ を加えると，線型従属になる．よって与えられたベクトルの組は線型独立である．

この解答に対する評価は 0 点であった．解答のどこが誤っているかを指摘し，訂正をせよ．

解答例 誤解答なので，数学的・線型代数的な誤りは数多い．いくつかを指摘するならば

(i) ベクトルの組の線型独立性の理解が怪しい．設問は $\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, \cdots, A^k\boldsymbol{x}$ の線型独立性を示すことを求めているのだから，それらは線型従属関係にあるかどうか，すなわち

$$a_0\boldsymbol{x} + a_1A\boldsymbol{x} + \cdots + a_kA^k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

には非自明な解 $\{a_i\}$ があるかどうかを調べなければならない．誤答例で「任意の $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$) について成り立つとする」との設定が，そもそも誤っている．$\boldsymbol{x}$ は課題で与えたベクトルであって，任意ではない．

(ii) さらに，誤答例が「どのような非零の $\boldsymbol{x}$ についても上式が成り立たなければならないので，$a_0 = a_1 = \cdots = a_k = 0$」という主張は，数学的根拠がない．

(iii) また，等式

$$a_0\boldsymbol{x} + a_1A\boldsymbol{x} + a_2A^2\boldsymbol{x} + \cdots + a_kA^k\boldsymbol{x} = A^{k+1}\boldsymbol{x}$$

より，$A^{k+1}\boldsymbol{x}$ を加えると，線型従属になるから，それ以外のベクトルの組は線型独立との主張は無意味である．

出題意図: “「証明」は，論理に従い，既存の定理・公式を用いて命題（主張）の正し読む者に納得させる行為”（浪川 幸彦）なので,「ひとのふり見て，わがふり直せ」. (課題に対する正答例は省略)

微積分学のレポート課題例 1

次の主張に反論せよ．もし反論できなければ，その主張を認めたことを意味する．

> $1=-1$ である．なぜなら，$f(x)=\arcsin(\sin x)$ とおけば，$f(x)=x$ であるから，両辺を微分して $f'(x)=1$ をえる．特に $f'(\pi)=1$ である．一方，合成函数の微分法によって
>
> $$f'(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}}$$
>
> であるから，x に π を代入して $f'(\pi)=-1$ である．ゆえに $1=-1$ である．

解答例 逆函数を形式的に取り扱うと生じる陥穽である．逆函数を定義する前提として，（真の）単調函数が対象であることに注意する．$\sin x$ は x の周期函数であるから，単調函数である定義域を確定しなければ，逆函数を定義できない．

すなわち $\sin x$ $(-\pi/2<x\leq\pi/2)$ の逆函数として $\arcsin x$ を定義する．その定義域は $-1<x\leq 1$，値域は $-\pi/2<y\leq\pi/2$ である．

したがって $\arcsin(\sin x)$ の定義域は $-\pi/2<x\leq\pi/2$ であって，その上でのみ導函数 $\dfrac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}}$ が与えられ，$x=\pi$ を代入することができない．この定義域では $\cos x\geq 0$ であるから，$\sqrt{\cos^2 x}=\cos x$ であって，$f'(x)=1$ が成り立ち，矛盾は起こらない．

コメント: 逆函数の定義の再確認，周期函数の性質を意図している．しかし，コンピュータソフトウェアを不注意に適用すると，この矛盾に気づかないままになる恐れがある．たとえば Maple に何の条件も付けず`diff(arcsin(sin(x)), x)`と投入すると，$\cos(x)/\sqrt{-\sin(x)^2+1}$ と解答し，さらに`eval(subs(x=Pi, %))`と投入すると，-1 と答えるし，また，$\arcsin(\sin x)$ の定義域を超えて $-3.5\leq x\leq 3.5$ に対して，そのグラフを描きすらする．それを無批判に受け取ると $f'(0)=1$，$f'(\pi)=-1$ と理解しかねない．

もちろん，解析学が先に進めば，複素函数論で $\arcsin x$ の多価函数 $\arcsin z$ への拡張，その主値などの取り扱いを学び，この課題の意義がわかるであろうが，数学ソフトウェアに任せて万事大丈夫というわけにはゆかない，一つの例である．

微積分学のレポート課題例 2

$(-1,1)$ を定義域とする函数 $f(x)$ に対して，次の２通りの極限を考える．

$$\text{(a)}\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h},\qquad \text{(b)}\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}$$

(1) (a) が極限値をもてば，(b) も極限値をもち，それらは等しいことを示せ．

(2) (b) の極限値は存在するが，(a) の極限が収束しない例を一つ示せ．

解答例 (1) (a) で定義される量を A とする．(b) について

$$\begin{aligned}\frac{f(h)-f(-h)}{2h} &= \frac{f(h)-f(0)+f(0)-f(-h)}{2h}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{f(h)-f(0)}{h}+\frac{f(0)-f(-h)}{h}\right)\end{aligned}$$

なので，第一項の極限値は A，第二項については

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0)-f(-h)}{h}=\lim_{h'\to 0}\frac{f(0)-f(h')}{-h'}=\lim_{h'\to 0}\frac{f(h')-f(0)}{h'}=A$$

と <u>極限値が確定するから</u> $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}=\frac{1}{2}(A+A)=A$ である．
(2) $f(x)$ を，$(-1,1)$ を定義域とし，次のように定義する．

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{for}\quad 0\le x<1,\\ \sqrt{-x} & \text{for}\quad -1<x<0\end{cases}$$

すると極限値 (b) に関しては $h\downarrow 0$ のとき $\frac{\sqrt{h}-\sqrt{h}}{2h}=0$ であり，極限値は 0．$h\uparrow 0$ のときも同様に 0．ゆえに極限値 (b) は 0 と確定する．しかし極限値 (a) に関しては

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\downarrow 0}\frac{\sqrt{h}}{h}=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{\sqrt{h}}$$

なので，発散する．$h\uparrow 0$ のときも同様だから，この極限値は存在しない．
コメント: 極限値計算の規則，一般的函数 $f(x)$ のままでの計算，極限値の意味，反例となる函数をイメージし，工夫するなどを目指している．配布した解答例では，反例の函数のグラフを付記したが，ここでは省略．

このようにして，数学の特質である‘抽象性’，‘論理性’ や，‘数学が記述言語である’ ことに受講生が気づき，体得できることをめざした．なかでも ‘反例’ を工夫・発見する過程を通じて，理解が深まるであろうことを期待した．

5 数学再教育の試み

1990 年代筆者は，愛知県に本社を置く大手自動車部品メーカーの技術研修所から，技術系社員の社内研修で数学教育を行いたいので協力をとの申し入れを受けた．その際に説明された設置理由は

> 技術系社員の出身学科は，電気・機械・物理・化学など多岐に渡るが，新製品開発にはそうした出身者による共同作業が必須である．しかし，その際に作業グループにおける「共通言語」が乏しいことが障害になっている．数学がまさにその「共通言語」なので，大学学部レヴェルの数学を再教育することで，活性化を図りたい

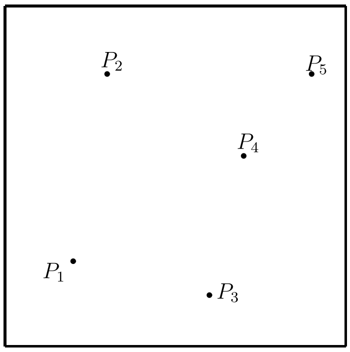
とのことであった．首肯できることなので，名古屋大学の他の教員数人の協力もえて，技術研修所における新コースの企画立案に加わり，土曜日ごとに開催された研修コースの講義を分担した．コースでは毎回演習課題を課し，出席者が解答発表を行うし，講評も行う．さらに，コース最終回では成果確認の意味の「試験」も実施するという,「数学再教育」の試みとして本格的であったので，本稿でその特徴点を紹介しよう．
このコースの “狙いどころ” として，次の点を確認して進めた．

- 研修参加者の多くは理工系学部の卒業生（高専出身者が少数参加）なので，学部レヴェルの数学を remind してもらうとともに，数学のもつ ‘抽象・論理・記述言語’ の特性を意識できるようにする．
- 線型代数学・微積分学・確率統計の，それぞれ基礎的内容を復習し，また平面幾何を素材にしながら論理性を訓練する．
- 技術開発現場で生じた，解説可能なモデリング例も取り入れて，数学の「値打ち」を体感してもらう．

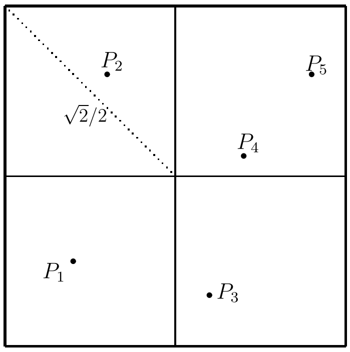
このコースで実施した，コースの演習課題の例をいくつか紹介しよう．

演習課題例 1

1 辺の長さが 1 の正方形の内部に，5 点 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 がある．d_{ij} で点 P_i と点 P_j との距離を表すとき，d_{ij} のうちの少なくも一つは $\sqrt{2}/2$ 未満であることを示せ．



解説 「鳩の巣原理 (pigeon hole principle)」の応用であるが，この原理，あるいは離散数学は大学初年次教育で触れられることが少ない．しかし数理的推論を適用することで発見できる事実でもあるので，次のように「補助線」を与えた図を示して解説した．



演習課題例 2

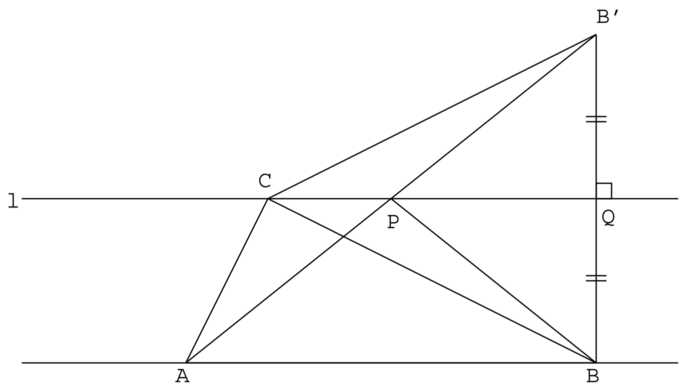
底辺の長さと，底辺からの高さが定められた三角形で，3 辺の長さの和が最小となるのは二等辺三角形であることを，作図して示せ．

解説 平面幾何における推論の典型であり，適切な補助線が「決め手」であるが，そのための推論過程を学ぶことを狙う．次のような推論を，図を描きながら導くことができるかを問う．

図のように三角形 ABC を定め，長さが決まった辺を AB，その定める直線から一定の距離の平行線 ℓ 上に頂点 C．点 B の，ℓ に関する対称な点を B'，ℓ は BB' の垂直二等分線．その交点を Q．三角形の三辺の長さの和は

$$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{CB'}$$

$\overline{AB}$ は一定であるから，$\overline{AC}+\overline{CB'}$ は，C が直線 AB' と ℓ の交点であるとき最小．その交点を P とすれば，$\triangle PBQ \equiv \triangle PB'Q$ であり，また P は AB' の二等分点であるから，$\overline{BP}=\overline{B'P}=\overline{AP}$ となり，$\triangle ABP$ は二等辺三角形.



演習課題例 3

電子素子 LSI の製造過程における不良率が 1.0 % であるという．この LSI を 100 個詰めた箱の中に，不良品が 3 個以上ある確率はいくらか，小数第 4 位まで求めよ．数値計算のために電卓を使ってよい.

解説 統計学の初歩であるが，このような技術研修の場であるので，電卓を使って数値を目に見えるようにした．解答例は：
確率事象を

A_0:100 個の中に不良品が無い事象
A_1:100 個の中に不良品が 1 個含まれる事象
A_2:100 個の中に不良品が 2 個含まれる事象

とする．求める確率の事象は，$A_0 \cup A_1 \cup A_2$ の余事象である．また，A_0，A_1，A_2 は互いに排反であるから，

$$P=1-\{(0.99)^{100}+{}_{100}C_1\cdot(0.99)^{99}\cdot 0.01+{}_{100}C_2\cdot(0.99)^{98}\cdot(0.01)^2\}\approx 0.0794$$

演習課題例 4

函数 x^x $(x>0)$ を考える．
(i) 電卓などの道具を使って，$y=x^x$ の値を $x=1,1/2,1/3,1/4,\ldots$ に対して求め，その最小値をとる x がどのあたりか，見当をつけよ．
(ii) $y=x^x$ の導函数を求め，それを用いて最小値を達成する x とその最小値の近似値を求めよ．

解説 電卓を使う「実験数学」の試みも導入し，微積分学を “体感” することも目指した．解答例は (ii) のみだが：

(ii) 対数微分法を使う．$y=x^x$ とすると $\log y = x\log x$，$(\log y)' = \dfrac{y'}{y} = \log x + 1$ であるから $y' = x^x(\log x+1)$．$x>0$ では $x^x>0$ だから，最小値をとる x は $\log x + 1 = 0$ を満たすので $x=1/e$ である． $x<1/e$ では $y'<0$， $x>1/e$ では $y'>0$ なので，y は $x=1/e$ で最小値 $(1/e)^{1/e} \approx 0.692201$ をとる．

またこのように “実践に近い” 場なので，少し進んだ微積分学の応用例を演習課題として課した．

ばね・質点系の振動で，摩擦による減衰があり，質量は単位の大きさで（$m=1$）外力項 $A\sin\Omega t$ があるときの運動方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + c\dfrac{dx}{dt} + kx = A\sin\Omega t$ を考え，$c^2-4k<0$ であるとする．共鳴振動を起こす条件を求めよ．

そしてこのような簡単な微分方程式でも，現象の数理モデリングには有用であり，実際にそのような現場の例があったことを紹介した．

数理モデルの問題設定: 自動車窓ガラスのワイパーは，その周期的運動とは別に細かい振動（びびり振動 chatter vibration）をすることがある．不快な現象なので，なるべく低減したい．びびり振動の種類は「ワイパーブレードの振動」と「リンク系（アームとロッド）でのアームの振動」に大別され，後者に注目し，アームのびびり振動のモデル化を行い，発生原因を定量的に分析し，対策をたてよう．

数理モデルの解析: 運転席側（D 側）アームと助手席側（P 側）アームの運動に注目し，D 側アームの慣性モーメント I_d，その変位 θ_d，P 側アームの慣性モーメント I_p，その変位 θ_p に着目して，各部分の運動方程式をたてる．P 側アームでは

$$I_p\ddot{\theta}_p + C_p(\dot{\theta}_p - \dot{\theta}_1) + K_p(\theta_p - \theta_1) = T_p,$$

D 側アームでは

$$I_d\ddot{\theta}_d + C_{2d}(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_1) + K_{2d}(\theta_d - \theta_1) = T_d$$

なので，力の釣り合い条件から θ_1 （第一ロッドの変位）, $\dot{\theta}_1$ は消去することができ，θ_p, θ_d が外力 $\bar{\theta}_M$ （モータの変位，外部函数），T_p （P 側のガラス面とアームの間の摩擦力），T_d（D 側のガラス面とアームの間の摩擦力）の作用を受けて運動する，2 階線型常微分方程式がえられる．

そこで Laplace 変換による安定性判別を行って，誘導される代数方程式の解である複素数 σ_1, σ_2 が安定性を支配していることが導かれる．さらに

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1 \equiv \Re\sigma_1 + \mathrm{i}\Im\sigma_1 \\ \sigma_2 &= \alpha_2 + \mathrm{i}\beta_2 \equiv \Re\sigma_2 + \mathrm{i}\Im\sigma_2\end{aligned}$$

とすれば，$\alpha_1 < 0$ かつ $\alpha_2 < 0$ のときのみ微分方程式の解は，漸近安定であって，びびり振動は発生しないであろうと解析できた．

この例は，数学学習の各段階で，数理モデリング — 数理モデルを構成し，その解によって，モデリング対象の解析・理解を行う — の導入が有効であることを示唆している．十分な準備と検討を経て，大学での数学教育でも取り入れたい要素といえるのではないだろうか．数理モデリングをどのように数学教育に取り入れるかに関する拙稿 [4] が，多少の参考になるやもしれない．

6 まとめ

冒頭でも述べたように，筆者のこれまでの教育経験を中心に高等教育における数学の役割について卑見を開示した．理工系学部・学科といえども，学生の既学修内容，学習意欲あるいは数学への認識には，問題を感じることは確かである．大学入学試験対応という “社会傾向” から生じるゆがみも，もちろんあるであろう．大学側が「高大接続」などの手を打つ動きもある．しかしこれに対して “過激な” 発言もある．分子生物学者・歌人の永田 和宏氏は次のように説く [6]．

> 大学は高校の連続でいいのか, 「リメディアル教育」. . . 私はこれには反対です. 1966 年に私が京都大学に入学した時，入学式の式辞で奥田 東総長は,「京都大学は諸君には何も教えません」と仰いました．高校までは「いかに正しく答えられるか」でしたが，大学では「いかに問うことができるか」に変わることです.「学習」（学んで修得する）から「学問」（学んで問い直す）に変わるとも言えます.

数学リテラシーの目標のうちでも「専門職業人として数学を能動的に使う」に焦点をおいて，数学のもつ ‘抽象・論理・記述言語’ という特質を，大学での学修を通じていかに学生が会得できるかが焦点であろう．

学部・専攻を超えて共通的な基礎である線型代数学・微積分学では，教員側が工夫しながら学習を組織することが必要である．その際，keywords として ‘アルゴリズム’, ‘反例’ などを生かしたいと考える．また，数学再教育（社会教育）も魅力的であり，また必要な場合があると考えられる．

参照文献

[1] 上野健爾，岡本和夫，黒木哲徳，野崎昭弘 編，シリーズ数学セミナー増刊 : 数学の教育をつくろう，2002.10.

[2] G. Strang 原著，日本応用数理学会監訳，計算理工学，近代科学社, 2017.1.

[3] 水町龍一 編著, 大学教育の数学的リテラシー, 東信堂, 2017.3.

[4] 三井斌友 著, 数理モデリング教育を数学リテラシー達成にどう生かすか，科学研究費補助金 (B) （課題番号 : 17H01985 / 研究代表者 : 浪川幸彦）報告書，2020.3, p. 153 - 168.

[5] 武藤 徹 著，武藤徹の高校数学読本３，多次元の世界をのぞく，日本評論社，2013.

[6] 永田和宏 著,「知の体力」と「問う力」，學士會会報 940 号 (2020.1)，23 - 32.