Torification of dually flat manifolds and its application

日本女子大学理学部
藤田玄
Hajime Fujita
Faculty of Natural Science,
Japan Women's University

1 概要

本稿は 2023 年度 RIMS 共同研究「変換群の幾何とトポロジー」における筆者の [3] に基づいた講演内容に沿ったものである.

双対平坦構造あるいは Hesse 構造は, Riemann 多様体のアファイン接続とその計量に関する双対接続であってそれらの曲率も捩れも消えているものである. 情報幾何学や数理統計における重要な対象である指数型分布族などは自然な双対平坦構造をもつことが知られており, 統計的推測や機械学習などの数理的側面に幾何学的な理解を提供してきた. 双対平坦構造における計量は (局所的には)Hesse 計量, つまり滑らかな関数の Hessian である. 逆に, アファイン空間の領域上の滑らかな狭義凸関数の Hessian と自明平坦接続により双対平坦構造が定義でき, その凸関数はポテンシャル関数と呼ばれる. 双対平坦構造に付随して, (Bregman) ダイバージェンスという関数が定義される. ダイバージェンスは Riemann 計量に付随する距離関数の 2 乗の一般化であり, その Pythagoras の定理は最尤推定の理論などで有用となる.

双対平坦構造の研究自体は情報幾何学と別にも発展しており, その指導原理の一つに**双対平坦構造は Kähler 構造の実多様体版である**というものがある. それを端的に表すものに以下の Dombrowski の定理がある.

定理 1.1 (Dombrowski[2])**.** 平坦な Riemann 多様体 (U, h) とそのアファイン接続 ∇ が双対平坦構造を定めるための必要十分条件は接束 TU に自然に定まる概複素構造と Riemann 計量が Kähler 構造を定めることである.

Dombrowski の対応においてトーリック Kähler 多様体の位置付けを考察するために, Molitor[5] によって *torification* という概念が導入された. トーリック (シンプレクティック) 多様体はその運動量写像の像として Delzant 多面体を定める. Delzant 構成はトーリック多様体 (の弱同変同値類) の集合と Delzant 多面体 (の整アファイン変換による同値類) の集合との間の全単射を与える. Delzant 対応は両者の様々な幾何学的側面をつ

本研究は科研費 (課題番号 18K03288) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 53B12, 53D20, 53C55
キーワード : dually flat structure, Bregman divergence, Delzant polytope, toric Kähler manifold

なぐ辞書を提供し, その項目のひとつに Delzant 多面体上のシンプレクティックポテンシャルによるトーリック多様体上の Kähler 構造の記述 (Guillemin-Abreu 理論) がある. Delzant 多面体とシンプレクティックポテンシャルの組は Delzant 多面体の内部に双対平坦構造を定める.

本稿では, そのような Delzant 多面体の双対平坦構造の torification の枠組みでの考察を説明する. 特にトーリック幾何を用いてその双対平坦構造を境界に自然に拡張すること, 拡張されたダイバージェンスが境界においてある連続性をもつこと, 境界点まで含めて拡張 Pythagoras の定理が成立すること, を説明する. 講演では具体例である射影空間 $\mathbb{C}P^n$ と対応する Delzant 多面体である Δ^n を用いて説明したが, ここでは可能な限り一般的な設定で説明する. なお, 7 節で述べるように, ある種の Delzant 多面体は有限集合上の混合型分布族という確率密度関数族に対応する. その Delzant 多面体の境界は確率密度関数としては確率の値が 0 になる点に対応し, 情報幾何学の統計的応用では通常は扱われないことに注意する.

謝辞. 講演の機会を与えて下さった世話人の岡山理科大学の阿部拓さんに感謝申し上げます. また, トーリック幾何と双対平坦多様体の関係を論じた Molitor の論文 [5] を紹介して下さった理研 AIP の東條広一さんにも感謝申し上げます.

2 双対平坦構造と Bregman ダイバージェンス

定義 2.1. 組 (X, h, ∇, ∇^*) が**双対平坦多様体である**とは, X は滑らかな多様体, h はその Riemann 計量, ∇ は接束 TX の接続, ∇^* はその h に関する双対接続で, ∇ と ∇^* の曲率および捩れが 0 となるもののことである. また, (h, ∇) あるいは (h, ∇^*) を X 上の**双対平坦構造**という.

平坦な Riemann 多様体とその Levi-CIvita 接続は双対平坦構造を与える. これはある意味で自明な双対平坦多様体である. 以下のいわゆる Hesse 計量は双対平坦多様体の局所モデルとして重要な例を与える. 本稿では主にこの形の双対平坦多様体を扱う.

例 2.2. U を $\mathbb{R}^n$ の領域, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ を U 上の滑らかな狭義凸関数とする. このとき, $\mathrm{Hess}(\varphi)$ を U 上の Riemann 計量とみなすと, U 上の自明接続 ∇^{flat} に対して $(\mathrm{Hess}(\varphi), \nabla^{\mathrm{flat}})$ は U 上の双対平坦構造を与える. φ をポテンシャルといい, この双対平坦構造をポテンシャルに付随する双対平坦構造という. 後の都合上双対平坦多様体としては $(U, \mathrm{Hess}(\varphi), \nabla := (\nabla^{\mathrm{flat}})^*, \nabla^* := \nabla^{\mathrm{flat}})$ を考える.

定義 2.3. $\mathbb{R}^n$ の領域 U 上のポテンシャル φ に付随する双対平坦構造 $(\mathrm{Hess}(\varphi), \nabla)$ に対し, その **Bregman ダイバージェンス** $D(\cdot||\cdot) : U \times U \to \mathbb{R}$ が

$$D(\xi||\xi') := \langle \xi - \xi', (\mathrm{grad}\varphi)(\xi') \rangle - (\varphi(\xi') - \varphi(\xi))$$

により定義される. ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の Euclid 内積である. φ の Legendre 変換 ψ を用

いて
$$D(\xi||\xi') = \varphi(\xi) + \psi(\xi') - \langle \xi, \xi' \rangle$$
と定義することもできる.

平坦 Riemann 多様体に対する Bregman ダイバージェンスは距離関数の 2 乗に一致する. 一般の双対平坦構造に関して Bregman ダイバージェンスは対称性を満たさないが, 次の Pythagoras の定理が成立する.

定理 2.4 (ダイバージェンスに関する Pythagoras の定理)**.** 定義 2.3 の設定において, $\xi, \xi', \xi'' \in U$ に対して, ξ と ξ' をつなぐ ∇-測地線と ξ' と ξ'' をつなぐ ∇^*-測地線が ξ' において直交するとき,
$$D(\xi\|\xi'') = D(\xi\|\xi') + D(\xi'\|\xi'')$$
が成立する.

正規分布族, Poisson 分布, カテゴリカル分布 (偏りのあるコインやサイコロを表す有限集合上の分布族) などは指数型分布族というクラスの確率密度関数の族である. 指数型分布族のパラメータ空間には自然に双対平坦構造が入ることが知られており, その構造は情報幾何学における主要な研究対象の一つとなっている. なお, 指数型分布族の双対平坦構造の Riemann 計量は **Fisher 計量**とよばれる計量に, Bregman ダイバージェンスは **Kullback-Leibler ダイバージェンス**とよばれる量に一致する.

3 Delzant 多面体, トーリック Kähler 多様体と Guillemin-Abreu 理論

本稿ではトーリック多様体はトーリックシンプレクティック多様体をさす. つまり, $2n$ 次元シンプレクティック多様体 (M, ω)[*1]がトーリック多様体であるとは, (M, ω) に n 次元コンパクトトーラス T の効果的な Hamiltonian トーラス作用があることである. 正確には (M, ω) と T 作用と運動量写像の組をトーリック多様体という. このとき, 運動量写像による M の像 P は Delzant 多面体となる. つまり, P は単純 (各頂点には n 本の辺がある), 有理的 (各頂点の辺の方向ベクトルは $\mathbb{Q}$-ベクトルでとれる), 非特異 (各頂点に集まる方向ベクトルは $(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{R}^n)$ の基底でとれる), である. 逆に, ある種のシンプレクティック商の手続きである Delzant 構成により, 与えられた Delzant 多面体を運動量写像の像にもつトーリック多様体が構成できる.

シンプレクティック商による構成をみると, Delzant 多面体 P に対するトーリックシンプレクティック多様体 M にはトーラス不変な Kähler 構造が入ることがわかる. Guillemin, Abreu によるその Riemann 計量の記述を [1] に基づいて述べる. P を n 次元の Delzant 多面体, $\mu : M \to P$ を Delzant 構成により対応するシンプレクティック多様体とその運動量写像とする. P の内部 P° の任意の点 ξ の逆像 $\mu^{-1}(\xi)$ はトーラス作用に

[*1] 明示的には述べないが基本的には M のコンパクト性を仮定する.

よる自由軌道になり, 逆像 $M^\circ := \mu^{-1}(P^\circ)$ は自由軌道の和集合に一致する. P° の凸性から M° には主 T-束としての自明化が存在する. P が $\mathbb{R}^n$ 上の連立線形不等式

$$l^{(i)}(\cdot) = \langle \nu^{(i)}, \cdot \rangle + \lambda^{(i)} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, N)$$

により定義されているとする. ただし, N は P の $n-1$ 次元面の数であり, $\nu^{(i)}$ は面の法ベクトルで各頂点において $\mathbb{Z}^n$ の基底をなすようにとっておく. P° 上のなめらかな関数 $\varphi_P : P^\circ \to \mathbb{R}$ を

$$\varphi_P(\xi) := \sum_{i=1}^{N} l^{(i)}(\xi) \log l^{(i)}(\xi)$$

により定義 [*2] し, **Guillemin ポテンシャル**という. φ_P は P 上の連続関数に自然に拡張できることに注意する.

定理 3.1 ([1][4])**.** 主 T-束の自明化 $M^\circ \cong P^\circ \times T$ を適切にとると, この分解のもとで Delzant 構成により定義される M 上の Kähler 構造の Riemann 計量は

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Hess}(\varphi_{\mathrm{P}}) & 0 \\ 0 & \mathrm{Hess}(\varphi_{\mathrm{P}})^{-1} \end{pmatrix}$$

と表示できる.

さらに, M 上の任意のトーラス不変 Kähler 構造の Riemann 計量について, シンプレクティックポテンシャルとよばれる関数 $\varphi : P^\circ \to \mathbb{R}$ が存在し, その Hessian で Riemann 計量が記述および分類されることが [1] において示されている. P 上のシンプレクティックポテンシャル φ により P° 上の双対平坦構造 $(\mathrm{Hess}(\varphi), \nabla)$ が定まることに注意する.

4 Torification

Molitor[5] により導入された双対平坦多様体に対する torification の概念を説明する. (X, h, ∇, ∇^*) を双対平坦多様体とする. 接束 TX の枠であって ∇ に関して平行なものが存在するとき, その枠の整数係数 1 次結合によって生成される格子を Γ とすると, Γ は平行移動によって TX に作用する. この作用は Dombrowski による対応から定まる TX 上の Kähler 構造を保ち, したがって商空間 $X_\Gamma := TX/\Gamma$ も Kähler 多様体の構造を, 自然な射影 $X_\Gamma \to X$ はトーラス束の構造をもつ.

定義 4.1 (Torification [5])**.** 上の設定で, コンパクトトーラス T の作用をもつ Kähler 多様体 M が存在し, M 上の自由 T-軌道全体の集合 M° と X_Γ の間に Kähler 多様体上のトーラス束の構造としての同型 $M^\circ \cong X_\Gamma$ が存在するとき, M を X の *torification* という.

注意 4.2. Torification に関する注意を述べておく.

[*2] オリジナルの定義では $\frac{1}{2}$ 倍がついているがここでは省略する.

- X_Γ 自身は X の torification である．一般に, torification は存在しても一意性はない.
- [5] では *regular torification* というあるよいクラスがより詳しく考察されており, 例えば regular torification の一意性が示されている.
- Euclid 空間の領域 U とポテンシャル $\varphi : U \to \mathbb{R}$ から定まる双対平坦構造 $(\mathrm{Hess}(\varphi), \nabla^*)$ に対しては, 座標関数から定義される平行ベクトル場から Γ が定まり, したがってその torification が存在する.
- 一般に torification M はコンパクトとは限らない. 実際, [5] で $\mathbb{C}$ に通常の複素構造と $T = S^1$-作用を考えたものが Poisson 分布族に対応する双対平坦多様体の (regular) torification であることが述べられている.

5 主結果：Delzant 多面体上の双対平坦構造とダイバージェンスの境界への拡張

P を n 次元 Delzant 多面体, $\mu : M \to P$ をコンパクトトーラス T による Hamilton 作用をもつトーリック多様体とその運動量写像とする．P° を P の内部, $\varphi : P^\circ \to \mathbb{R}$ をシンプレクティックポテンシャルとすると, $(P^\circ, \mathrm{Hess}(\varphi))$ には双対平坦構造とその Bregman ダイバージェンス D が, また Guillemin-Abreu 理論により, M には Kähler 計量が定まる．P の k 次元の面 F をとると, M の複素 k 次元の Kähler 部分多様体 $M_F := \mu^{-1}(F)$ が定まる．F の法ベクトルたちが生成する T の部分トーラス $T_F^\perp$ は M_F を固定する部分トーラスに一致し, その商トーラス $T_F := T/T_F^\perp$ の作用から M_F 自体も $2k$ 次元のトーリック Kähler 多様体となる．Guillemin-Abreu 理論により M_F 上の運動量写像の像 P_F 上のシンプレクティックポテンシャル $\varphi_F : P_F^\circ \to \mathbb{R}$ が存在し, P_F° 上の双対平坦構造 $(\mathrm{Hess}(\varphi_\mathrm{F}), \nabla)$ とその Bregman ダイバージェンス D_F が定まる．Hesse 計量 $\mathrm{Hess}(\varphi)$ を F に拡張することはできないが, ダイバージェンス D はある意味で連続的に D_F に拡張できるというのが次の定理の主張である.

定理 5.1 (ダイバージェンスの境界での連続性,[3])**.** $\eta, \eta' \in F^\circ$ に対して

$$\lim_{P^\circ \ni \xi' \to \eta'} \lim_{P^\circ \ni \xi \to \eta} D(\xi \| \xi') = D_F((\pi_F^*)^{-1}(\eta) \| (\pi_F^*)^{-1}(\eta'))$$

が成立する．ただし, π_F^* は射影 $\pi_F : T \to T_F$ が誘導する F と P_F の間の全単射である.

後の 6 節の例でわかるように, 極限の順序を入れ替えることは一般にはできない．この極限の存在により, 境界点 $\eta \in F^\circ$ と内点 $\xi' \in P^\circ$ のダイバージェンスが

$$D'_F(\eta \| \xi') := \lim_{P^\circ \ni \xi \to \eta} D(\xi \| \xi')$$

により定まる．この D_F と D'_F を用いて Pythagoras の定理が次の形で成立する.

定理 5.2 (境界点も含めた Pythagoras の定理,[3])**.** $\eta, \eta' \in F^\circ$, $\xi' \in P^\circ$ に対して, ξ' から

η に向かう ∇-測地線と η から η' に向かう ∇^*-測地線が η において直交するとき,

$$D_F(\eta'\|\eta) + D'_F(\eta\|\xi') = D'_F(\eta'\|\xi')$$

が成立する．ただし, 2 つの測地線の直交性は自明化を用いて $M^\circ \cong P^\circ \times T$, $M_F^\circ \cong P_F^\circ \times T_F$ 内に η, η', ξ' および測地線をうつして考える．

6 例：直角二等辺三角形と $\mathbb{C}P^2$

2 次元 Delzant 多面体 P として $\xi_1\xi_2$ 平面において

$$\xi_1 \geq 0,\ \xi_2 \geq 0,\ 1 - \xi_1 - \xi_2 \geq 0$$

で定義される直角二等辺三角形 Δ^2 を考える．この P は 3 点集合上の確率密度関数族 (混合型分布族) をパラメトライズする双対平坦多様体を定める．対応するトーリックシンプレクティック多様体は $\mathbb{C}P^2$ であり, Guillemin ポテンシャル

$$\varphi_P(\xi) = \xi_1 \log \xi_1 + \xi_2 \log \xi_2 + (1 - \xi_1 - \xi_2) \log(1 - \xi_1 - \xi_2)$$

から定まる Kähler 計量は Fubini-Study 計量である．このとき,

$$\mathrm{Hess}(\varphi_P) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi_1} & \frac{1}{1-\xi_1-\xi_2} \\ \frac{1}{1-\xi_1-\xi_2} & \frac{1}{\xi_2} \end{pmatrix},$$

となり, ダイバージェンス $D : P^\circ \times P^\circ \to \mathbb{R}$ は

$$D(\xi\|\xi') = \xi_1 \log \frac{\xi_1}{\xi'_1} + \xi_2 \log \frac{\xi_2}{\xi'_2} + (1 - \xi_1 - \xi_2) \log \frac{1 - \xi_1 - \xi_2}{1 - \xi'_1 - \xi'_2}$$

となる．P の面 F として $\xi_1 + \xi_2 = 1$ で定義されるものをとる．F の逆像 $M_F = \mu^{-1}(F)$ は $\mathbb{C}P^2$ の斉次座標 $[z_1 : z_2 : z_3]$ において $z_3 = 0$ で定義され, Fubini-Study 計量を入れた $\mathbb{C}P^1$ と Kähler 多様体として同型である．このとき,

$$\lim_{\xi'_1+\xi'_2\to 1} \lim_{\xi_1+\xi_2\to 1} D(\xi\|\xi') = \xi_1 \log \frac{\xi_1}{\xi'_1} + (1 - \xi_1) \log \frac{1 - \xi_1}{1 - \xi'_1}$$

となる．この極限値は M_F の Fubini-Study 計量に対するダイバージェンスに他ならない．

次に, 任意の正の実数 v に対して $\xi = (a, b) \in P^\circ$ から初速度 (v, v) で伸びる $(\nabla^{\mathrm{flat}})^*$-測地線は終点 (極限) $\left(\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}\right) =: (\eta', 1 - \eta') \in F^\circ$ をもち, そこで F(の M_F における像) に直交することがわかる．このとき,

$$D'_F((\eta', 1 - \eta')\|(a, b)) = -\log(a + b)$$

となる．また, $(\eta, 1 - \eta) \in F^\circ$ に対して

$$D_F((\eta, 1 - \eta)\|(\eta', 1 - \eta')) = \eta \log \frac{\eta}{a} + (1 - \eta) \log \frac{1 - \eta}{b} + \log(a + b),$$

$$D'_F((\eta, 1-\eta)\|(a,b)) = \eta \log \frac{\eta}{a} + (1-\eta)\log\frac{1-\eta}{b},$$

となることがわかり, Pythagoras の定理

$$D'_F((\eta,1-\eta)\|(a,b)) = D_F((\eta,1-\eta)\|(\eta',1-\eta')) + D'_F((\eta',1-\eta')\|(a,b))$$

の成立が確認できる.

7 補足：有限集合上の確率密度関数族との関係

6 節で考えた直角二等辺三角形 Δ^2 は次のようにして 3 点集合 $[3]=\{1,2,3\}$ 上の確率密度関数全体 $\mathcal{P}([3])$ と同一視できる.

$$\Delta^2 \ni \xi = (\xi_1, \xi_2) \mapsto \left[p_\xi : \begin{cases} 1 \mapsto \xi_1 \\ 2 \mapsto \xi_2 \\ 3 \mapsto 1-\xi_1-\xi_2 \end{cases} \right] \in \mathcal{P}([3]).$$

より一般に, 正の整数 n に対して

$$\Delta^n := \{\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le \xi_k \ (k=1,\ldots,n),\ \sum_{k=1}^n \xi_k \le 1\}$$

で定義される単体は $n+1$ 点集合上の確率分布族全体 $\mathcal{P}([n+1])$ と対応する. $\mathcal{P}([n+1])$ へのこのパラメータ付けは混合型分布族とよばれる分布族の一種で自然に双対平坦構造を持つことが知られている. 一方, Δ^n は n 次元射影空間 $\mathbb{C}P^n$ への標準的トーリック作用に関する Delzant 多面体でもある. これは, $\mathbb{C}P^n$ が $\mathcal{P}([n+1])$(の定める双対平坦多様体) の torification であることを意味する. ただし, Kähler 計量は Fubini-Study 計量を考えており, 対応するシンプレクティックポテンシャルは Guillemin ポテンシャルである. そこで, より一般の Delzant 多面体が有限集合上の混合型分布族を定め, 対応するトーリック多様体がその torification となりうるか, という問いを考えてみる. 3 節のように P が $\mathbb{R}^n$ 上の連立線形不等式

$$l^{(i)}(\cdot) = \langle \nu^{(i)}, \cdot \rangle + \lambda^{(i)} \ge 0 \quad (i=1,\ldots,N)$$

により定義されているとする. $\xi \in P$ に対して $p_\xi : [N] \to [0,1]$ を

$$p_\xi(i) := \frac{l^{(i)}(\xi)}{\sum_{j=1}^N l^{(j)}(\xi)}$$

により定義する. 次が上述の問いに対する答えを与える.

定理 7.1 ([3])**.** $\{p_\xi(\cdot)\}_{\xi\in P}$ が N 点集合 $[N]$ 上の混合型分布族を定め, P に対応するトーリック Kähler 多様体 M がその torification になるための必要十分条件は $\displaystyle\sum_{i=1}^N l^{(i)}(\cdot)$ が定数関数となることであり, これは

$$\sum_{i=1}^N \nu^{(i)} = 0 \tag{1}$$

と同値である.

条件 (1) のトーリック幾何的な意味付けは現状では不明である.

参考文献

[1] M. Abreu, *Kähler geometry of toric manifolds in symplectic coordinates*, Symplectic and contact topology: interactions and perspectives (Toronto, ON/Montreal, QC, 2001), 2003, pp. 1-24.

[2] P. Dombrowski, *On the geometry of the tangent bundle*, J. Reine Angew. Math. 210 (1962), 73-88.

[3] H. Fujita, *Torification of Delzant polytope as dually flat space and its applications*, arXiv:2305.08422v2.

[4] V. Guillemin, *Kaehler structures on toric varieties*, J. Differential Geom.40(1994), no.2, 285-309.

[5] M. Molitor, *Kähler toric manifolds from dually flat spaces*. arXiv:2109.04839v1.