

# TORIC SCHUBERT VARIETIES AND DIRECTED DYNKIN DIAGRAMS

大阪公立大学・数学研究所 栞田幹也

Mikiya Masuda

Osaka Central Advanced Mathematical Institute

Osaka Metropolitan University

## 1. 序

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  とすると,  $\mathbb{T} := (\mathbb{C}^*)^n$  の元を座標毎に  $\mathbb{C}^n$  の元に掛ける線形作用は, 旗多様体

$$\text{Fl}(n) := \{(V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n) \mid \dim_{\mathbb{C}} V_i = i (i = 1, \dots, n)\}$$

への作用を導く. 不動点は  $\mathbb{C}^n$  の基本ベクトル  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  を置換して得られる旗

$$f_w := (\langle \mathbf{e}_{w(1)} \rangle \subset \langle \mathbf{e}_{w(1)}, \mathbf{e}_{w(2)} \rangle \subset \cdots \subset \langle \mathbf{e}_{w(1)}, \dots, \mathbf{e}_{w(n)} \rangle = \mathbb{C}^n)$$

である. ここで  $w$  は  $n$  次対称群  $\mathfrak{S}_n$  の元,  $\langle \rangle$  はその中にあるベクトルで生成される  $\mathbb{C}^n$  の部分空間を表す. 従って不動点集合  $\text{Fl}(n)^{\mathbb{T}}$  と  $\mathfrak{S}_n$  の間に自然な 1 対 1 対応がある. この  $\mathbb{T}$  作用のモーメント写像

$$\mu: \text{Fl}(n) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

の像は置換多面体

$$\Pi_n := \{(v(1), \dots, v(n)) \in \mathbb{R}^n \mid v \in \mathfrak{S}_n\}$$
 の凸包  $\subset \mathbb{R}^n$

となる. 実際

$$\mu(f_w) = (w^{-1}(1), \dots, w^{-1}(n))$$

となり,  $\mu(\text{Fl}(n)^{\mathbb{T}})$  の凸包が  $\Pi_n$  である ([5] 参照). 置換多面体  $\Pi_n$  が  $\mathbb{R}^n$  の余次元 1 で  $(1, \dots, 1)$  が法線ベクトルであることは,  $\mathbb{T}$  の部分群  $\{(g, \dots, g) \in \mathbb{T} \mid g \in \mathbb{C}^*\}$  の  $\text{Fl}(n)$  への作用が自明であることに対応する.

$\text{Fl}(n)$  の 1 点  $y$  を取り,  $y$  の  $\mathbb{T}$  軌道の閉包  $\overline{\mathbb{T}y}$  を  $Y$  と記す.  $Y$  は高々  $n-1$  次元の (一般に特異点をもつ) トーリック多様体となる. Atiyah の定理 ([1, Theorem 2]) より  $\mu(Y)$  は  $\mu(Y^{\mathbb{T}})$  の凸包となり, トーリック多様体の理論より  $\mu(Y)$  は  $Y$  を決定する. 従って  $\mu(Y)$  として現れる凸多面体の特徴づけが重要な問題となる. 必要条件として,  $\mu(Y)$  のどの辺も  $\Pi_n$  の辺と平行でなければならないことが知られているが (Gelfand-Serganova [3]), 下図参照, これは十分条件ではなく, 完全な解答は得られていない.

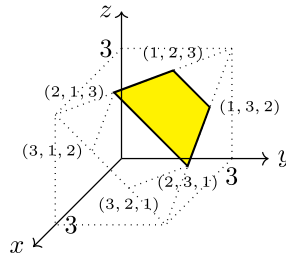


FIGURE 1. 等脚台形である  $\mu(Y)$  の例.  $\Pi_3$  は六角形

トーラス軌道の閉包  $Y$  たちの分類は  $\mu(Y)$  の分類に他ならず、未解決問題として残っているが、特別なクラスのトーラス軌道の閉包に関しては、 $\mu(Y)$  の言葉ではなく、他の組合せ論の対象の言葉で分類がなされている (例えば [6]). 本稿では、トーラス軌道の閉包  $Y$  が Schubert 多様体であるものたちが、有向パスグラフまたはその部分グラフで分類されることを報告する. 本稿で議論するのは A 型の場合であるが、一般の Lie 型では有向 Dynkin 図形またはその部分図形が現れる ([7]). なお、トーラス軌道の閉包に関して本稿と関連する話題を [5] で概説している.

## 2. トーリック SCHUBERT 多様体

一般線形群  $GL_n(\mathbb{C})$  の  $\mathbb{C}^n$  への線形作用は  $Fl(n)$  への推移的な作用を導く. この作用を  $GL_n(\mathbb{C})$  の上三角行列からなる部分群  $B$  に制限すると、 $Fl(n)$  は有限個の  $B$  軌道に分解する. 実際、各  $B$  軌道には唯一つの  $\mathbb{T}$  不動点  $f_w$  があり、その  $B$  軌道  $Bf_w$  を  $X_w^\circ$  と表すと  $Fl(n)$  は

$$Fl(n) = \bigsqcup_{w \in \mathfrak{S}_n} X_w^\circ$$

と分解する.  $X_w^\circ$  は  $\mathbb{T}$  不変で  $\mathbb{C}^{\ell(w)}$  と同型である. ここで  $\ell(w)$  は  $w$  の長さである.  $X_w^\circ$  を Schubert セル、その閉包を Schubert 多様体といい  $X_w$  と表す.  $X_w$  は  $\mathbb{T}$  作用で不変であるが、この作用に関してトーリック多様体であるとき  $X_w$  をトーリック **Schubert** 多様体と呼ぶ. 次の定理が我々の考察の出発点となる.

**定理 2.1** (Karuppuchamy [4]). *Schubert* 多様体  $X_w$  がトーリック *Schubert* 多様体であるための必要十分条件は、 $w$  が異なる単純互換の積で表されることである.

ここで単純互換とは互換  $(i, i+1)$  のことである. 以下これを  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) と表す. Schubert 多様体は一般に特異点をもつが、トーリック Schubert 多様体は非特異で Bott 多様体と呼ばれるものになる.

任意の  $w \in \mathfrak{S}_n$  は単純互換の無駄のない積 (reduced decomposition)

$$(2.1) \quad w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} \quad (m = \ell(w))$$

に表せるが、 $X_w$  がトーリック Schubert 多様体のとき、定理 2.1 より  $i_1, i_2, \dots, i_m$  は相異なる.

**定義 2.2.**  $i_1, i_2, \dots, i_m$  が相異なる上記の  $w$  に対して、有向グラフ  $\mathcal{G}_w$  を次のように定める.

- 頂点集合  $V(\mathcal{G}_w)$  は  $\{i_1, \dots, i_m\}$ ,
- 有向辺集合  $E(\mathcal{G}_w)$  は  $\{(i_p, i_q) \in V(\mathcal{G}_w) \times V(\mathcal{G}_w) \mid p < q, |i_p - i_q| = 1\}$ .

一般に  $w$  の分解 (2.1) は唯一通りではないが、 $i_1, \dots, i_m$  が相異なる場合、分解の仕方の自由度は  $s_i s_j = s_j s_i$  ( $|i - j| > 1$ ) の関係式によるものだけなので、有向グラフ  $\mathcal{G}_w$  は  $w$  の分解の仕方によらずに定まる.

**例 2.3.**  $w = s_2 s_1 s_3 s_4 = s_2 s_3 s_1 s_4 = s_2 s_3 s_4 s_1$  と  $w' = s_3 s_4 s_2 s_1 = s_3 s_2 s_4 s_1 = s_3 s_2 s_1 s_4$  に対して

$$\mathcal{G}_w = \textcircled{1} \leftarrow \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{4} \quad \mathcal{G}_{w'} = \textcircled{1} \leftarrow \textcircled{2} \leftarrow \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{4}$$

となる.  $\mathcal{G}_w$  は連結とは限らない. 例えば  $w = s_1 s_2 s_4 s_5 = s_1 s_4 s_2 s_5 = s_1 s_4 s_5 s_2 = s_4 s_1 s_2 s_5 = s_4 s_1 s_5 s_2 = s_4 s_5 s_1 s_2$  に対して

$$\mathcal{G}_w = \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2} \quad \textcircled{4} \rightarrow \textcircled{5}$$

は非連結である.

上記の例から分かるように、一般に  $\mathcal{G}_w$  は  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  を頂点集合とした有向パスグラフの部分グラフである. 我々の主定理は次である.

**定理 2.4** ([7]). トーリック *Schubert* 多様体  $X_w$  と  $X_{w'}$  が (代数多様体として) 同型であるための必要十分条件は、 $\mathcal{G}_w$  と  $\mathcal{G}_{w'}$  が (頂点の番号付けを忘れて) 有向グラフとして同型であることである.

**注意 2.5.** Dynkin 図形に多重辺がある  $B, C, G_2, F_4$  型の場合、有向グラフ  $\mathcal{G}_w$  において、Dynkin 図形の多重辺に対応する辺に、 $B, C, F_4$  の場合は 1 または 2 の重みを、 $G_2$  型の場合は 1 または 3 の重みを考える必要がある.

## 3. COXETER 元の場合

すべての単純互換  $s_1, \dots, s_{n-1}$  の (重複のない) 積として表される  $\mathfrak{S}_n$  の元を Coxeter 元といい, Coxeter 元からなる  $\mathfrak{S}_n$  の部分集合を  $\text{Cox}_n$  と表す. 例えば

$$\text{Cox}_3 = \{s_1 s_2, s_2 s_1\}, \quad \text{Cox}_4 = \{s_1 s_2 s_3, s_2 s_1 s_3, s_3 s_1 s_2, s_3 s_2 s_1\}.$$

$\text{Cox}_n$  の元は  $\text{Cox}_{n-1}$  の各元の尻尾または頭に  $s_{n-1}$  を加えてすべて得られるので,  $|\text{Cox}_n| = 2^{n-2}$  である.

定理 3.1 ([7]).  $\text{Cox}_n$  の元  $w, w'$  に対して次の 4 つは同値.

- (1)  $X_w \cong X_{w'}$  (代数多様体として).
- (2)  $\mathcal{G}_w \cong \mathcal{G}_{w'}$  (有向グラフとして).
- (3)  $w' = w$  または  $w' = w_0 w w_0$ . ここで  $w_0$  は  $\mathfrak{S}_n$  の最長元.
- (4)  $H^*(X_w; \mathbb{Z}) \cong H^*(X_{w'}; \mathbb{Z})$  (次数付き環として).

特に (1) と (4) の同値性より,  $X_w$  と  $X_{w'}$  ( $w, w' \in \text{Cox}_n$ ) が代数多様体として同型であることと微分同相であることは同値である.

*Proof.* (1) と (2) の同値性は定理 2.4 に他ならない.  $w, w' \in \text{Cox}_n$  のとき  $\mathcal{G}_w$  と  $\mathcal{G}_{w'}$  はともに  $1, 2, \dots, n-1$  を頂点とした有向パスグラフなので,  $\mathcal{G}_w$  と  $\mathcal{G}_{w'}$  の間の有向グラフとしての同型写像は, 頂点の番号を保つ同型写像か, 頂点の番号  $i$  を  $n-i$  に移す同型写像のどちらかである. 前者の場合は  $w' = w$  となり後者の場合は  $w' = w_0 w w_0$  となる. この考察より (2) と (3) の同値性が分かる. (1) ならば (4) は明らかであるが, 逆は難しい. 詳細は省略するが,  $H^*(X_w; \mathbb{Z})$  の環構造から有向グラフ  $\mathcal{G}_w$  が復元して逆を示す.  $\square$

注意 3.2. 一般 Lie 型の場合も Coxeter 元があるが, その場合の有向グラフが有向 Dynkin 図形となる. ただし注意 2.5 で述べたように, Dynkin 図形に多重辺がある場合は重みを考える必要がある.

## 4. BOTT 多様体

トーリック Schubert 多様体  $X_w$  の幾何学的側面を述べる. 2 節でも述べたが, トーリック Schubert 多様体  $X_w$  は Bott 多様体となる. Bott 多様体とは, Hirzebruch 曲面の高次元版で, 1 点からスタートして 2 つの複素直線束の Whitney 和の射影化を繰り返して得られる多様体である.

$B_m = P(\eta_{m-1} \oplus \xi_{m-1}) \rightarrow B_{m-1} = P(\eta_{m-2} \oplus \xi_{m-2}) \rightarrow \dots \rightarrow B_2 = P(\eta_1 \oplus \xi_1) \rightarrow B_1 = \mathbb{C}P^1 \rightarrow \text{pt}$   
ここで  $\eta_i, \xi_i$  は  $B_i$  上の複素直線束,  $P(\ )$  は複素ベクトル束の射影化を表す. 従って上記は  $\mathbb{C}P^1$  束の列となる. また,  $\eta_i, \xi_i$  のどちらか一方は自明直線束と思っても一般性は失わない. 上記の列を Bott tower といい,  $B_m$  (または各  $B_i$ ) を Bott 多様体という.  $B_2$  が Hirzebruch 曲面である. Bott 多様体は射影的トーリック多様体となる. また,  $B_m$  のモーメント写像の像は  $m$  次元立方体と組み合わせ同値なものである. Figure 1 の等脚台形が一例である.

トーリック Schubert 多様体  $X_w$  として現れる Bott 多様体は特殊なものである. 実際  $w = s_{i_1} \cdots s_{i_m}$  とすると,  $X_w$  の扇の 1 次元錐を張る素な格子ベクトル  $\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_m}, \mathbf{w}_{i_1}, \dots, \mathbf{w}_{i_m}$  で

$$(4.1) \quad \mathbf{v}_{i_k} + \mathbf{w}_{i_k} = \sum_{j>k} (-c_{i_j, i_k}) \mathbf{v}_{i_j} \quad (k = 1, \dots, m)$$

を満たすものが取れる. ここで  $c_{p,q}$  は Cartan 行列の  $(p, q)$  成分である.  $X_w$  のモーメント写像による像  $P_w$  は  $m$  次元立方体と組み合わせ同値であるが,  $\{\mathbf{v}_{i_k}, \mathbf{w}_{i_k}\} (k = 1, \dots, m)$  は,  $P_w$  の向かい合うファセットの内向き法線ベクトルに対応する. (4.1) は一般の Lie 型で成立するが, A 型の場合

$$c_{p,q} = \begin{cases} 2 & (p = q), \\ -1 & (|p - q| = 1), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

なので, (4.1) は

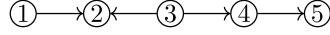
$$(4.2) \quad \mathbf{v}_{i_k} + \mathbf{w}_{i_k} = \sum_{j>k, |i_j - i_k| = 1} \mathbf{v}_{i_j} \quad (k = 1, \dots, m)$$

となる.

例 4.1.  $w = s_3 s_1 s_4 s_5 s_2$  のとき,  $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) = (3, 1, 4, 5, 2)$  なので,

$$\mathbf{v}_3 + \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_4 + \mathbf{w}_4 = \mathbf{v}_5, \quad \mathbf{v}_5 + \mathbf{w}_5 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}.$$

一方, 有向グラフ  $\mathcal{G}_w$  は



である.

上記の例から分かるように, 有向グラフ  $\mathcal{G}_w$  と (4.2) が持っている情報は同じである. 一方,  $X_w$  の幾何的性質はすべて (4.2) に集約されている. 定理 2.4 が得られる理由がここにある.

## 5. FANO または WEAK FANO

集合  $\{\mathbf{v}_{i_k}, \mathbf{w}_{i_k}\}$  は  $X_w$  の扇の原始コレクション (primitive collection) である. 従って Batyrev ([2]) の判定条件より,  $X_w$  が Fano であるための必要十分条件は, (4.2) の右辺の和が高々 1 個の元の和ということである. 有向グラフ  $\mathcal{G}_w$  の言葉では,  $\mathcal{G}_w$  のどの頂点においても出て行く向きをもつ辺が高々 1 つであることである. また,  $X_w$  が weak Fano であるための必要十分条件は, (4.2) の右辺が高々 2 個の元の和であることだが, これは常に成立している. 従って次を得る.

系 5.1. トーリック Schubert 多様体  $X_w$  は weak Fano である. さらに,  $X_w$  が Fano であるための必要十分条件は, 有向グラフ  $\mathcal{G}_w$  のどの頂点においても出て行く向きをもつ辺が高々 1 つであること, 言い換えれば矢印に沿って沈み込む頂点 (sink) が唯一つであることである.

定理 2.4 または定理 3.1 より,  $\{X_w \mid w \in \text{Cox}_n\}$  の (代数多様体としての) 同型類の個数は

$$\begin{cases} 1 & (n = 2), \\ 2^{n-3} & (n: 3 \text{ 以上の奇数}), \\ 2^{n-3} + 2^{\frac{n-4}{2}} & (n: 4 \text{ 以上の偶数}). \end{cases}$$

その内 Fano であるものの個数は

$$\begin{cases} 1 & (n = 2), \\ \frac{n-1}{2} & (n: 3 \text{ 以上の奇数}), \\ \frac{n}{2} & (n: 4 \text{ 以上の偶数}) \end{cases}$$

となる.

## REFERENCES

- [1] Michael F. Atiyah, *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc., 14(1):1–15, 1982.
- [2] Victor V. Batyrev, *On the classification of toric Fano 4-folds*, vol. 94, 1021–1050. 1999. Algebraic geometry, 9.
- [3] Izrail Moiseevich Gel'fand and Vera V. Serganova, *Combinatorial geometries and the strata of a torus on homogeneous compact manifolds*, Uspekhi Mat. Nauk, 42(2(254)):107–134, 287, 1987.
- [4] Paramasamy Karuppuchamy, *On Schubert varieties*, Comm. Algebra, 41(4): 1365–1368, 2013.
- [5] Eunjeong Lee, Mikiya Masuda, and Seonjeong Park, *Torus orbit closures in the flag variety*, arXiv:2203.16750.
- [6] Eunjeong Lee, Mikiya Masuda, and Seonjeong Park, *Toric Richardson varieties of Catalan type and Wedderburn–Etherington numbers*, European J. Combin., 108: Paper No. 103617, 25, 2023.
- [7] Eunjeong Lee, Mikiya Masuda, and Seonjeong Park, *Toric Schubert varieties and directed Dynkin diagrams*, in preparation.

OSAKA CENTRAL ADVANCED MATHEMATICAL INSTITUTE, OSAKA METROPOLITAN UNIVERSITY, SUMIYOSHI-KU, OSAKA 558-8585, JAPAN.

Email address: mikiyamsd@gmail.com