The Euler characteristics of fixed point sets of finite group actions on homology 5-spheres

津山工業高等専門学校 田村 俊輔
Shunsuke Tamura
National Institute of Technology,
Tsuyama College

1 動機と歴史

本稿で扱う多様体および多様体上の群作用は全て滑らかなもののみを考える．特に，ホモロジー球面やホモトピー球面も滑らかな多様体であるものを想定している．

1946 年に，D. Montgomery–H. Samelson [12] は，コンパクト Lie 群 G が球面に不動点をもつように作用するとき他の不動点をもつだろう，言い換えると，不動点が唯一の作用は存在しないだろうと予想した．彼らの期待に反して，1977 年に E. Stein [20] は，特殊線型群 $SL(2,5)$ が 7 次元球面 S^7 にただ 1 つの不動点をもつように作用できることを示した．その後，T. Petrie [18, 19] は，同変手術理論を研究し，コンパクト Lie 群 $G = SO(3)$，$SU(2)$，$G = SL(2,F)$，$PSL(2,F)$ (F の標数は 3 を除く奇数)，少なくとも 3 つの Sylow 部分群をもつ奇数位数のアーベル群 G に対して，これらの群 G があるホモトピー球面にちょうど 1 つの不動点をもつように作用できることを示した．実際，T. Petrie は，任意の自然数 m に対して，上記の群 G がちょうど m 個の不動点をもつようにあるホモトピー球面に作用できることを示した．以下，T. Petrie に倣って，不動点集合がちょうど 1 点集合であるような作用を **one-fixed-point action** と呼ぶことにする．T. Petrie が構成した one-fixed-point action を許容する球面の次元は抽象的なものであったが，M. Morimoto [15, 16] と A. Bak–M. Morimoto [1, 2] は，6 次元以上の球面が 5 次交代群 A_5 の one-fixed-point action を許容することを示した．この結果の後，有限群の one-fixed-point action を許容する球面の最低次元に興味がもたれた．2 次元以下の球面上のコンパクト Lie 群の作用による不動点集合が空集合であるか，2 次元以下の球面であることは容易に証明されるため，3 次元から 5 次元の球面に存在するかが問題となった．R を単位元をもつ可換環とする．n 次元球面 S^n と (すべての次数で) 同じ R-係数ホモロジー群をもつ閉多様体を **R-ホモロジー n-球面**と呼ぶ．本稿では，R が整数環 $\mathbb{Z}$ の場合は，単に**ホモロジー球面**と呼ぶことにする．M. Furuta [8] は，ゲージ理論を用いて，ホモトピー 4-球面が有限群の向きを保つ one-fixed-point action を許容しないことを示した．同じ時期に，S. DeMichelis [5] は，4 次元のホモロジー球面の向きを保つ有限群作用の不動点集合が空集合あるいは 2 次元以下の球面であることを，M. Morimoto [14] は，ホモトピー 4-球面上のコンパクト Lie 群の one-fixed-point action が存在しないことを示した．その後，N. P. Buchdahl–S. Kwasik–R. Schultz [4] は，ホモトピー 3-球面とホモロジー 5-球面が有限群 one-fixed-point action を許容しないことを示し，有限群の one-fixed-point action が 5 次元以下の球面には存在せず，6 次元以上の球面には存在することを得た．次に，one-fixed-point action を許容するコンパクト Lie 群はどのようなものがあるかが問題となった．有限群の場合には，E. Laitinen–M. Morimoto [10] によって，その問題は解決され，

ある次元の球面に唯一の不動点をもつように作用できる有限群は **Oliver 群**と呼ばれている．実は，各々の Oliver 群は任意の個数の不動点をもつようにある次元の球面に作用できることが知られているが，与えられた Oliver 群が，どのような次元の球面に何個の不動点を許容し得るか否かは完全には把握されていない．最近の結果として，M. Morimoto [17] は，幾らかの非可解な Oliver 群に対して，one-fixed-point action が存在する球面の次元を，M. Piotr [11] は，$SL(2,5)$ の位数 2 の群による非自明な拡大に対して，不動点の個数が奇数個にならないようなホモロジー球面の次元を，それぞれ提示している．

本稿では，ホモロジー 5-球面の有限群作用に限定し，不動点集合に関する次の結果を得た．

定理 1.1. G を有限群，Σ を効果的な G-作用をもつホモロジー 5-球面とする．このとき，G-不動点集合のオイラー標数 $\chi(\Sigma^G)$ は偶数である．さらに，Σ 上の G-作用が向きを保ち，G-不動点集合 Σ^G の 0 次元の連結成分の個数が 2 以下であるとき，$\chi(\Sigma^G)=0$ あるいは 2 である．

筆者は，5 次元のホモロジー球面上の向きを保つ有限群作用で，その不動点集合のオイラー標数が 0 と 2 以外の値を取るものが存在するか知らない．また，本稿では扱わないが，G がコンパクト Lie 群の場合にも，定理 1.1と同様の結果を得ることができた．

2 低次元の $\mathbb{Q}$-ホモロジー球面上の有限群作用の例

Smith の定理 [21] と呼ばれる P. A. Smith による古い結果で，$\mathbb{Z}_p$-ホモロジー球面上の p-群による作用の不動点集合は $\mathbb{Z}_p$-ホモロジー球面となるというものがある．この結果は，G が p-群でない場合は正しいとは限らず，G が p-群であっても，例えば，$\mathbb{Q}$-ホモロジー球面である場合も正しいとは限らない．以下に，不動点集合が球面にならないような 5 次元以下の $\mathbb{Q}$-ホモロジー 5-球面の有限群作用で，よく知られているものをいくつか紹介する．

ホモトピー 3-球面は有限群の one-fixed-point action を許容しない一方で，ホモロジー 3-球面は A_5 の one-fixed-point action を許容する．

命題 2.1. (E. E. Floyd–R. W. Richardson [7], cf. [9]) あるホモロジー 3-球面上の *one-fixed-point* A_5*-action* が存在する．

ホモロジー 3-球面にただ 1 つの不動点をもつように効果的に作用できる有限群が A_5 のみであることは比較的容易に証明できる．任意のホモロジー 3-球面が one-fixed-point A_5-action を許すわけではない．許容するホモロジー 3-球面の例として，[7] で発見された Poincaré ホモロジー 3-球面上の one-fixed-point A_5-action を紹介する．5 次交代群 A_5 の 3 次の既約な実表現 $\rho: A_5 \to SO(3)$ から得られる軌道空間 $SO(3)/A_5$ は Poincaré ホモロジー 3 球面となり，標準的な左 A_5-作用

$$\varphi: A_5 \times SO(3)/A_5 \to SO(3)/A_5;\ \varphi(h, gA_5) = hgA_5$$

をもつ．実は，この A_5-作用による不動点集合は $N_{SO(3)}(A_5)/A_5 = A_5/A_5$ であり，1 点集合となり，one-fixed-point action であることがわかる．$\mathbb{Q}$-ホモロジー 3-球面上の p-群の作用の例として，3

次元の射影空間 $\mathbb{R}P^3$ 上の対合を，$[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [x_0 : x_1 : -x_2 : -x_3]$ で定めると，その不動点集合は $\mathbb{R}P^1 \sqcup \mathbb{R}P^1$ となり，球面とはならない．$\mathbb{Q}$-ホモロジー 4-球面の場合には，S. Demichelis による次の結果が知られている．

命題 2.2. (S. Demichelis [6]) F を任意の個数の孤立点と任意の個数の向き付け可能曲面たちの非交和であり，$\chi(F) = 2$ を満たすものとする．このとき，任意の素数 p に対して，ある $\mathbb{Q}$-ホモロジー 4-球面上の C_p-作用であり，その不動点集合が F と微分同相であるものが存在する．

上記の結果からわかるように，低次元であっても球面が $\mathbb{Q}$-ホモロジー球面の場合は，Smith の定理の反例が存在する．5 次元球面の場合には，巡回群の作用でその不動点集合が球面とならないものが存在する．Brieskorn 球面上の巡回群の作用はそのような例をしばしば与える．

定義 2.1 (Brieskorn 多様体 [3])**.** n を 2 以上の自然数とし，$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を n 個の 2 以上の自然数の組とする．このとき，

$$\Sigma(\mathbf{a}) = \left\{ (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; z_1^{a_1} + z_2^{a_2} + \cdots + z_n^{a_n} = 0,\ \sum_i |z_i|^2 = 1 \right\} \subset S(\mathbb{C}^n)$$

は **Brieskorn 多様体**と呼ばれる $(2n-3)$ 次元の滑らかな閉多様体である．特に，Brieskorn 多様体がホモトピー球面であるとき，**Brieskorn 球面**と呼ばれる．

定義 2.2 (Brieskorn グラフ [3])**.** $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ から定まる Brieskorn グラフ $G_{\mathbf{a}}$ とは，次の 2 つの条件を満たす頂点と辺からなるグラフである．

1. G_{a} の頂点は n 個であり，各頂点には $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の重み付けがされている．

2. 頂点の重み a_i と a_j $(i \neq j)$ が $\gcd(a_i, a_j) > 1$ を満たすとき，a_i と a_j の重みをもつ頂点の間に辺が存在する．

実は，Brieskorn 多様体 $\Sigma(\mathbf{a})$ がホモトピー球面であるかは，Brieskorn グラフ $G(\mathbf{a})$ を用いて次のように翻訳される．

命題 2.3 (E. Brieskorn [3])**.** 3 次元以上の *Brieskorn* 多様体 $\Sigma(\mathbf{a})$ が，ホモロジー球面であるための必要十分条件は，*Brieskorn* グラフ $G_{\mathbf{a}}$ が次の 2 つの条件のいずれかを満たすときである．

1. $G_{\mathbf{a}}$ は少なくとも 2 つの孤立な頂点をもつ．

2. $G_{\mathbf{a}}$ は 1 つの孤立頂点と，奇数個の頂点からなる連結なグラフ C で，C に含まれる任意の頂点 a_i と a_j $(i \neq j)$ に対して，$\gcd(a_i, a_j) = 2$ が成り立つものを少なくとも 1 つもつ．

$(2n-3)$ 次元の Brieskorn 多様体 $\Sigma(\mathbf{a})$ は $(n-3)$-連結であるので，5 次元以上の Brieskorn 多様体でホモロジー球面となるものは，Brieskorn 球面となる．命題 2.3を用いると，Brieskorn 多様体 $\Sigma(2,3,5,35)$ や $\Sigma(k,2,2,2)$ (k は奇数) はホモトピー 5-球面であることがわかる．さらにいうと，5 次元の Brieskorn 球面は通常の 5 次元球面と微分同相である．これらの 5 次元球面の向きを保つ巡回群の作用で不動点集合が球面とはならないような例を幾らか紹介する．

例 2.4. m を自然数とし，位数 m の巡回群を C_m で表し，$\xi_m = e^{\frac{2\pi}{m}i}$ とおく．

1. $\Sigma(2,3,5,35)$ 上の C_{35} の作用を $(z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (z_1, z_2, z_3, \xi_{35} z_4)$ と定めると，その不動点集合 $\Sigma(2,3,5)$ は，*Poincaré* ホモロジー 3-球面である．

2. $\Sigma(2,3,5,35)$ 上の C_6 の作用を $(z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (\xi_2 z_1, \xi_3 z_2, z_3, z_4)$ と定めると，その不動点集合 $\Sigma(3,35)$ は，5 つの連結成分をもつトーラスリンクである．

3. $\Sigma(k,2,2,2)$ 上の C_k の作用を $(z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (\xi_k z_1, z_2, z_3, z_4)$ と定めると，その不動点集合 $\Sigma(2,2,2)$ は，3 次元の射影空間である．

4. $\Sigma(k,2,2,2)$ 上の C_2 の作用を $(z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (z_1, z_2, z_3, -z_4)$ と定めると，その不動点集合 $\Sigma(k,2,2)$ は，3 次元のレンズ空間である．ここで，$H_1(\Sigma(k,2,2), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_k$ が成り立つ．

例 2.4で与えたように，5 次元球面上の向きを保つ巡回群の作用による不動点集合は必ずしも球面となるわけではない．しかしながら，作用する群が巡回群の場合には，Lefschetz 不動点定理により，その不動点集合のオイラー標数は 0 となることがわかる．本稿の主定理は，5 次元球面上の有限群作用による不動点集合がほとんどの場合においてオイラー標数 0 か 2 をもつことを示したものである．

3 主定理の証明の概略

この節を通じて，G は非自明な有限群とし，Σ は効果的な G-作用をもつホモロジー 5-球面とする．Σ 上の G-作用が向きを保たないとき，つまり，ある $g \in G$ が誘導する微分同相 $\Phi(g) : \Sigma \to \Sigma$ が向きを保たないとき，

$$L = \{\, g \in G \mid \Phi(g) : \Sigma \to \Sigma \text{が向きを保つ} \,\}$$

は G の指数 2 の部分群をなすので，$\chi(\Sigma^G)$ と $\chi(\Sigma^L)$ の偶奇は等しくなる．したがって，$\chi(\Sigma^G)$ が偶数になることは，Σ 上の G-作用が向きを保つ場合にのみ示せば良いので，以下では Σ 上の G-作用は向きを保つと仮定する．さらに，Σ 上の G-作用が不動点 x をもつとき，接空間 $T_x(\Sigma)$ は Σ 上の G-作用から誘導される線型な G-作用をもつため，5 次元の $\mathbb{R}[G]$-加群の構造をもつ．今，Σ 上の G-作用は向きを保ち効果的であるので，$T_x(\Sigma)$ に対応する忠実な表現として，$\rho_x : G \to SO(5)$ を (共役なものを除いて一意的に) 得ることができる．このため，Σ 上の G-作用が不動点をもつとき，作用する群は $SO(5)$ のある部分群と同型であるとして良い．

有限群 G の最大の冪零正規部分群は $F(G)$ で表され，**Fitting 部分群**と呼ばれる．また，$F(G)$ の p-Sylow 部分群は一意に定まり，それを $O_p(G)$ で表す．$F(G)$ は $O_p(G)$ たちの直積である．Σ 上の G-作用の Fitting 部分群 $F(G)$ への制限作用を調べることにより，次の補題を得ることができる．

補題 3.1. $F(G)$ が非自明ならば，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数である．特に，$F(G)$ が非巡回群ならば，Σ^G は 2 次元以下の球面である．

非自明な有限群 G が $SO(5)$ の部分群であり，その Fitting 部分群 $F(G)$ が自明である場合，G は交代群 A_5 あるいは A_6 と同型な正規部分群 H をもたなければならない．そこで，A_5 あるいは A_6 が Σ に作用するときの不動点集合を調べなければならない．A_5 と A_6 の 5 次元の実加群を具体的に調べることで次の結果を得ることができる．

命題 3.2. $G = A_5$ あるいは A_6 とする．このとき，Σ^G は 2 次元以下の球面である．

上記の 2 つの結果を認めて，定理 1.1を証明しよう．

定理 1.1の証明の概略. まず，$\chi(\Sigma^G)$ が偶数になることを確認する．$F(G)$ が非自明な場合は，補題 3.1より，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数となる．非自明な有限群 G の Fitting 部分群 $F(G)$ が自明な場合，G は A_5 あるいは A_6 に同型な正規部分群 H をもつ．命題 3.2より，Σ^H は 2 次元以下の球面であり，G/H-作用をもつ．$\Sigma^G = (\Sigma^H)^{G/H}$ であるので，Σ^G も 2 次元以下の球面である．よって，$\chi(\Sigma^G)$ が偶数になることを得た．

次に，Σ^G の 0 次元の連結成分の個数が 2 以下であるとき，$\chi(\Sigma^G) = 0$ あるいは 2 となることを示そう．$F(G)$ が非巡回群である場合と，G が A_5 と A_6 に同型な正規部分群をもつ場合には，Σ^G は 2 次元以下の球面となるため，$\chi(\Sigma^G) = 0$ あるいは 2 である．残りの場合として，$F(G)$ が非自明な巡回群である場合を考えれば良い．今，Σ 上の G-作用は向きを保つので，$\dim T_x(\Sigma)^{F(G)} = 1$ あるいは $\dim T_x(\Sigma)^{F(G)} = 3$ のいずれかが成り立つことに注意する．次の 4 つの場合に分けて，$\chi(\Sigma^G) = 0$ あるいは 2 になることを確認する．

(A) ある $x \in \Sigma^G$ に対して，$\dim T_x(\Sigma)^G = 3$ が成り立つ．

(B) ある $x \in \Sigma^G$ に対して，$\dim T_x(\Sigma)^G = 2$ が成り立つ．

(C) 全ての $x \in \Sigma^G$ に対して，$\dim T_x(\Sigma)^G = 1$ が成り立つ．

(D) ある $x \in \Sigma^G$ に対して，$\dim T_x(\Sigma)^G = 0$ が成り立つ．

Case (A). G は巡回群であるので，$G = F(G)$ である．Smith の定理より，G の位数を割り切る素数 p に対して，$\Sigma^G = \Sigma^{F(G)} = \Sigma^{O_p(G)}$ は 3 次元の $\mathbb{Z}_p$-ホモロジー球面である．したがって，$\chi(\Sigma^G) = 0$ であることが得られる．

Case (B). G は $SO(3)$ の有限部分群と同型なので，G は C_n，D_{2n}，A_4，S_4，あるいは A_5 のいずれかに同型である．G が A_4，S_4，あるいは A_5 に同型である場合は，補題 3.1と命題 3.2より，$\Sigma^G \cong S^2$ である．G が D_{2n} と同型な場合，Case (A) で見たように，$\Sigma^{F(G)}$ はある素数 p に対して，$\mathbb{Z}_p$-ホモロジー 3-球面でなければならない．$[G : F(G)] = 2$ であるので，Lefschetz 不動点定理より，$\chi(\Sigma^G) = 2$ となることがわかる．G が巡回群だとすると，$G = F(G)$ となるが，$\dim T_x(\Sigma)^G = 2$ であることに反する．よって，G は巡回群にはなり得ない．

Case (C). Σ^G の各々の連結成分は 1 次元の閉多様体であるので，

$$\Sigma^G \cong \coprod S^1$$

が成り立つ．したがって，$\chi(\Sigma^G) = 0$ である．

Case (D). 点 $x \in \Sigma^G$ での接空間表現 $T_x(\Sigma)$ を V とおく．まず，$\dim V^{F(G)} = 3$ の場合を考える．$F(G)$ は G の正規部分群であるので，$V = V^{F(G)} \oplus V_{F(G)}$ と，2 つの $\mathbb{R}[G]$-加群に分解できる．ここで，$\dim V^{F(G)} = 3$ かつ $\dim V_{F(G)} = 2$ である．$V_{F(G)}$ に対応する表現 $\rho : G \to O(2)$ の核を K とする．このとき，K は $SO(3)$ の部分群と同型であり，$F(K)$ は自明でなければならない．したがって，$K \cong A_5$ であるか，G は $O(2)$ の有限部分群でなければならない．$K \cong A_5$ の場合は，命題3.2より，$\Sigma^G \cong S^0$ であることが従う．G が $O(2)$ の部分群である場合は，$G \neq F(G)$ でなければならないので，G は二面体群 D_{2n} に同型である．この場合，Case (A) 見たように，$\Sigma^{F(G)}$ は $\mathbb{Z}_p$-ホモロジー 3-球面となる．よって，Lefschetz 不動点定理より，$\chi(\Sigma^G) = 2$ である．次に，$\dim V^{F(G)} = 1$ の場合を考える．このとき，$F(G)$ の位数を割り切る任意の素数 p に対して，$\Sigma^{O_p(G)}$ は 1 次元以上の $\mathbb{Z}_p$-ホモロジー球面であるため連結である．これにより，$\Sigma^{F(G)}$ の各連結成分は 1 次元の閉多様体であることがわかるので，

$$\Sigma^{F(G)} \cong \coprod S^1$$

であることがわかる．S^1 上の作用の不動点集合は S^1 あるいは S^0 のいずれかである．ここで，Σ^G の 0 次元の連結成分の個数が 2 以下であるという仮定を用いると，

$$\Sigma^G = (\Sigma^{F(G)})^{G/F(G)} \cong S^0 \coprod \left(\coprod S^1 \right)$$

であることがわかるので，$\chi(\Sigma^G) = 2$ が得られる． $\square$

References

[1] A. Bak and M. Morimoto: *Equivariant surgery and applications*, in: Proc. of Conf. on Topology in Hawaii 1990, K.H. Dovermann (ed.), World Scientific Ubl., Singapore, 13–25, 1992.

[2] A. Bak and M. Morimoto: *The dimension of spheres with smooth one fixed point actions*, Forum Math. **17** (2005), 199–216.

[3] E. Brieskorn: *Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten*, Inventiones mathematicae vol. **2**, (1966), 1–14.

[4] N. P. Buchdahl, S. Kwasik and R. Schultz: *One fixed point action on low-dimensional spheres*, Invent. Math. **102** (1990), 633–662.

[5] S. DeMichelis: *The fixed point set of a finite group action on a homology four sphere*, L ’ Enseign. Math. **35** (1989), 107–116.

[6] S. DeMichelis: *Group actions on rational homology spheres*, Rend. Ace. Lincei (8), 12 (1991), 73–81.

[7] E. E. Floyd and R. W. Richardson: *An action of a finite group on an n-cell without stationary points*, Bull. Amer. Math. Soc. **65** (2), (1959), 73–76.

[8] M. Furuta: *A remark on a fixed point of finite group action on S^4*, Topology **28** (1989), 35–38.

[9] S. Kwasik and R. Schultz: *One fixed point actions and homology 3- spheres*, Amer. J. Math. **117** (1995), 807–827.

[10] E. Laitinen and M. Morimoto: *Finite groups with smooth one fixed point actions on spheres*, Forum Math. **10** (1998), 479–520.

[11] P. Mizerka: *Exclusions of smooth actions on spheres of the non-split extension of C_2 by $SL(2,5)$*, Osaka J. Math. **60** (1), (2023), 1–14.

[12] D. Montgomery and H. Samelson: *Fiberings with singularities*, Duke Math. J. **13**, (1946), 51–56.

[13] M Morimoto: *On one fixed point actions on spheres*, Proc. Japan Acad. **63** Ser.A (1987), 95–97.

[14] M. Morimoto: *S^4 does not have one fixed point actions*, Osaka J. Math. **25** (1988), 575–580.

[15] M. Morimoto: *Most of the standard spheres have one fixed point actions of A_5*, in: Proc. Conf. Transformation Groups, Osaka 1987, ed. K. Kawakubo, Lect. Notes in Math. **1375**, 240–258, Springer Verlag, Heidelberg, 1989.

[16] M. Morimoto: *Most standard spheres have one fixed point actions of A_5 .II*, K-Theory **4** (1991), 289–302.

[17] M. Morimoto: *Construction of one-fixed-point actions on spheres of nonsolvable groups I*, Osaka J. Math. **60** (3), 493–525.

[18] T. Petrie: *One fixed point actions on spheres I*, Adv. Math. **46** (1982), 3–14.

[19] T. Petrie: *One fixed point actions on spheres II*, Adv. Math. **46** (1982) 15–70.

[20] E. Stein: *Surgery on products with finite fundamental group*, Topology **16** (1977), 473–493.

[21] P. A. Smith: *Transformations of finite period*, Ann. of Math. **39** (1938), 127–164.

National Institute of Technology,
Tsuyama College
624-1 Numa, Tsuyama,
Okayama 708-0824,
Japan
E-mail adress: tamura_s@tsuyama.kosen-ac.jp