Hessenberg twins and LLT polynomials

大阪公立大学 数学研究所　　佐藤 敬志
Osaka Metropolitan University,
Osaka Central Advanced Mathematical Institute

概要

本稿では、regular semisimple Hessenberg 多様体の twin と呼ばれる多様体のコホモロジーと unicellular LLT 多項式が同一のものであるという、枡田幹也氏との共同研究 [1] の結果を紹介する。特に regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジーを考えることで自然に twin が現れることを中心に解説する。

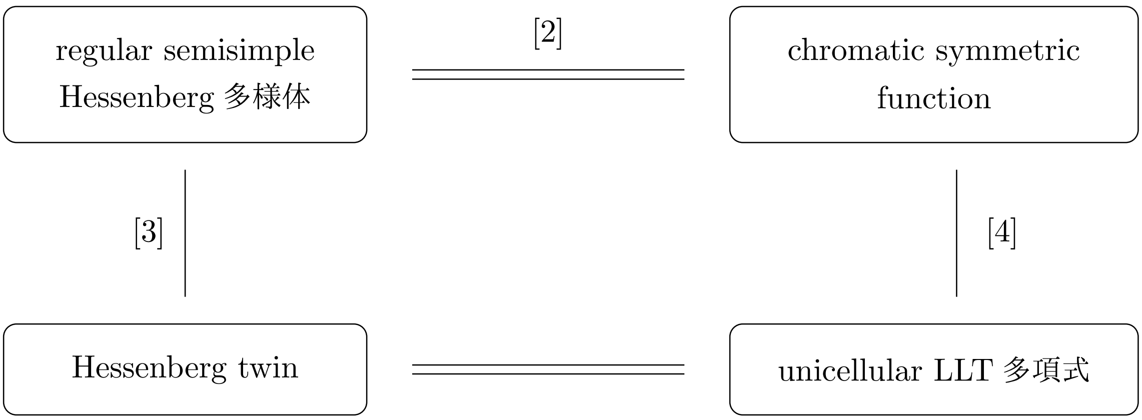
1 Introduction

本稿に現れる主要な数学的対象は次の 4 つである。

- Regular semisimple Hessenberg 多様体
- Regular semisimple Hessenberg 多様体の twin
- chromatic symmetric functions
- unicellular LLT 多項式

最初の 2 つは幾何学的対象であり、残りの 2 つは組合せ論的な側面を持つ対称関数係数の多項式である。この 4 つの対象が実は非常に密接に関係していることを本稿では紹介する。Regular semisimple Hessenberg 多様体は旗多様体の subvariety であり、直観的には旗多様体のルート系における対称性を崩すことで得られる variety である。一方、chromatic symmetric function はグラフの chromatic polynomial の一般化である。この 2 つ、Regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジーと chromatic symmetric function の involution が同一であるという Shareshian-Wachs 予想は Brosnan と Chow[2] により肯定的に解かれた。この結果は Hessenberg 多様体という幾何学的対象と chromatic symmetric function という組合せ論的対象を結

び付けた重要な結果である。一方、Ayzenberg と Buchstaber[3] は相異なる固有値が固定された tridiagonal Hermitian matrix のなす空間を一般化したものを研究するうちに、それが regular semisimple Hessenberg 多様体の twin と呼ぶべき空間であることを発見し、regular semisimple Hessenberg 多様体と twin それぞれのコホモロジーの間の関係を記述した。また、(unicellular) LLT 多項式は skew Schur 関数の積の q-類似として定義され、quantum affine algebra の Fock space 表現の記述などに用いられた、これまた重要な対称関数係数の多項式である。さらに、Carlson-Mellit[4] は unicellular LLT 多項式と chromatic symmetric function との対応関係を記述した。これらの関係を図に表すと次のようになる。



この四角形において、我々は 2 つの縦の辺で表された関係が “並行” であることを発見し、下辺の “等号” を示した。

2 Regular semisimple Hessenberg 多様体と chromatic symmetric functions

この章では上辺の等号について説明する。

2.1 Hessenberg 多様体

定義 2.1. Hessenberg 多様体とは旗多様体

$$\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n) = \{V_\bullet = (V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n) \mid \dim V_i = i\}$$

の subvariety であり、$n \times n$ 行列 S と Hessenberg 関数と呼ばれる関数 $h\colon [n] \to [n]$ を用いて次のように定められる。

$$\mathrm{Hess}(S,h) = \left\{ V_\bullet \in \mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n) \,\middle|\, SV_i \subset V_{h(j)} \text{ for any } j \in [n] \right\}$$

ここで $[n] = \{1,2,3,\ldots,n\}$ を表し、$h\colon [n] \to [n]$ が Hessenberg 関数であるとは、単調非減少かつ任意の $i \in [n]$ で $h(i) \geq i$ が成り立つときに言う。

Hessenberg 多様体は De Mari-Procesi-Shayman[5] によって定められた variety である。それは permutohedral variety などの重要な variety を含んでおり、また旗多様体の量子コホモロジーの計算などにも用いられる。Hessenberg 多様体は B 型や C 型など一般の型の旗多様体に対して定めることができるが、[1] では A 型の Hessenberg 多様体のみを扱っており、本稿もそのようにする。行列 S が相異なる固有値を持つとき、$\mathrm{Hess}(S,h)$ は regular semisimple であると呼ばれる。

また、regular semisimple Hessenberg 多様体は、h を固定すれば全て互いに C^∞ 級同相であり、S の選択によらない。以降では、S は対角行列であって、互いに異なる固有値を持つものとする。上記の理由により S を書かなくても不都合は生じないので、$\mathrm{Hess}(S,h)$ を以降では $X(h)$ と書くことにする。また、以降ではコホモロジーは常に $\mathbb{C}$ 係数で考えることにする。

ここで $T \subset U(n)$ を対角行列のなす n 次元トーラスとする。$\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ には左からの積による T-作用があり、この作用は $X(h)$ に制限できる。これは S を対角行列として選んだため、T の元と S が可換であることによる。

命題 2.2 ([5])**.** *Regular semisimple Hessenberg* 多様体 $X(h)$ に対し次が成立する。

- $X(h)$ は滑らかな *subvariety* である。
- $\dim X(h) = 2\sum_{i=1}^{n}(h(i)-i)$
- 固定点集合は $X(h)^T = \mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)^T = \mathfrak{S}_n$
- $H^{\mathrm{odd}}(X(h)) = 0$

上で述べた T-作用に関し同変コホモロジー $H_T^*(X(h)) = H^*(ET \times_T X(h))$ を考えることにする。$H^{\mathrm{odd}}(X(h)) = 0$ であるので $X(h)$ は equivariantly formal であり、包含写像が誘導する写像

$$\iota^*\colon H_T^*(X(h)) \to H_T^*(X(h)^T) \cong \mathrm{Map}(\mathfrak{S}_n, H^*(BT))$$

は単射である。以降、この単射を用いて $H_T^*(X(h))$ の元を写像 $f\colon \mathfrak{S}_n \to H^*(BT)$ として扱う。より詳しく言えば、$\mathrm{Map}(\mathfrak{S}_n, H^*(BT))$ における上記の単射の像を局所的な条件で記述できる。これは後で命題 2.3 として紹介する。

ここで $H^*(BT)$ をより具体的に記述するために、$\pi_i\colon T \to S^1$ を (i,i) 成分を取り出す写像として、$\mathbb{C}(\pi_i)$ を π_i が定める T-加群とする。次の直線束

$$ET \times_T \mathbb{C}(\pi_i) \to ET/T = BT$$

の第 1 Chern 類を $t_i \in H^2(BT)$ と書くと、

$$H^*(BT) = \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]$$

である。また、$H^2(BT)$ には $\mathfrak{S}_n$ が作用しており、$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し $\sigma \cdot t_i = t_{\sigma(i)}$ である。また、この作用は自然に $H^*(BT)$ 上の作用に拡張される。つまり、$f, g \in H^*(BT)$ に対し $\sigma \cdot (fg) = (\sigma \cdot f)(\sigma \cdot g)$ として拡張される。

ここで ι^* の像を正確に記述しておく。

命題 2.3 (cf. [8])**.**

$$\mathrm{Im}\,\iota^* = \left\{ f \in \mathrm{Map}(\mathfrak{S}_n, H^*(BT)) \;\middle|\; \begin{array}{r} f(w) - f(w(i,j)) \equiv 0 \pmod{t_{w(i)} - t_{w(j)}} \\ \text{for any } w \in \mathfrak{S}_n \text{ and } i < j \leq h(i) \end{array} \right\}$$

定義 2.4 ([7])**.** $f \in H_T^*(X(h))$ とする。$H_T^*(X(h))$ 上の $\mathfrak{S}_n$-作用を

$$(\sigma \cdot f)(w) = \sigma \cdot (f(\sigma^{-1}w))$$

で定める。これを dot action と呼ぶ。

左辺は $\mathrm{Map}(\mathfrak{S}_n, H^*(BT))$ への作用、右辺は $H^*(BT)$ への作用であることに注意。また、この作用はソースとターゲットの両方に群作用があるような写像に対する標準的な群作用である。簡単な計算で $H_T^*(X(h))$ が dot action で閉じていることが分かる。

$H_T^*(X(h))$ の元と dot action の具体例を挙げる。まず

$$x_i(w) = w \cdot t_i = t_{w(i)}$$

で定めると、$x_i \in H_T^*(X(h))$ である。これは幾何学的には旗多様体のトートロジカル直線束の第 1 同変 Chern 類として得られるものを $X(h)$ に制限したものであ

る。常に t_i に値を取る定値関数 $\mathfrak{S}_n \to H^*(BT)$ も t_i で表すことにする。これは $ET \times_T X(h) \to BT$ による引き戻しである。

さて、この 2 種類の $H_T^*(X(h))$ の元が dot action でどう動くか見ると

- $(\sigma \cdot x_i)(w) = \sigma \cdot (x_i(\sigma^{-1}w)) = \sigma \cdot t_{\sigma^{-1}w(i)} = t_{w(i)} = x_i(w)$
- $(\sigma \cdot t_i)(w) = \sigma \cdot (t_i(\sigma^{-1}w)) = \sigma \cdot t_i = t_{\sigma(i)} = t_{\sigma(i)}(w)$

となる。つまり

$$\sigma \cdot x_i = x_i, \quad \sigma \cdot t_i = t_{\sigma(i)}$$

であることが分かる。

ここで次数付き加群として $H_T^*(X(h)) \cong H^*(BT) \otimes H^*(X(h))$ であり、

$$H^*(X(h)) = H_T^*(X(h))/(t_1, \ldots, t_n)$$

である。Dot action はイデアル $(t_1, \ldots, t_n)$ を変えないので、dot action は $H^*(X(h))$ 上の作用を定める。つまり $H^*(X(h))$ は $\mathfrak{S}_n$ の次数付き表現となる。

注意 2.5. 一般には、$H^*(X(h))$ の環としての生成元には 2 次以外の元も必要であり、$H^2(X(h))$ の中にすら x と t で書けない元がある。

この節の最後に Hessenberg twin と $X(h)$ の関係性について示唆的な次の現象を観察しておく。旗多様体 $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n) = U(n)/T$ の同変コホモロジー環は、上の x と t を用いて

$$H_T^*(U(n)/T) \cong \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n]/(e_i(x_1, \ldots, x_n) - e_i(t_1, \ldots, t_n) \mid 1 \le i \le n)$$

と書ける。ここで、e_i は i 次基本対称多項式を表す。この式を見ると x たちと t たちの間に対称性があることが分かるが、それは次の変形により説明できる。

$$H_T^*(U(n)/T) = H^*(ET \times_T U(n)/T) = H^*(ET \times_T U(n) \times_T ET)$$

特に x たちは t たちと全く同様の定め方で、右側のトーラスのコホモロジー環 $H^*(BT)$ の生成元として得ることもでき、その引き戻しとなっている。左のトーラスは $t_1, \ldots, t_n$ と対応し、右のトーラスは $x_1, \ldots, x_n$ と対応していることに留意されたい。

2.2 chromatic symmetric functions

本稿において、グラフは単純なもののみを考え、辺の向き付けは考えないものとする。

定義 2.6. Hessenberg 関数 $h\colon [n] \to [n]$ に対し、それに付随するグラフ G_h を次で定義する。G_h の頂点集合は $[n]$ であり、$i < j \le h(i)$ のとき $\{i, j\}$ は G_h の辺である。

グラフ G の coloring $\kappa\colon G \to \mathbb{N}$ とは G の頂点集合から $\mathbb{N}$ への写像のことである。頂点集合が $[n]$ であるようなグラフ G に対し、coloring $\kappa\colon G \to \mathbb{N}$ の ascent と呼ばれる数を

$$\mathrm{asc}(\kappa) = \#\{\{i, j\} \in E(G) \mid i < j,\, \kappa(i) < \kappa(j)\}$$

で定める。また、coloring $\kappa\colon G \to \mathbb{N}$ が proper であるとは、任意の G の辺 $\{i, j\}$ に対し、$\kappa(i) \neq \kappa(j)$ であるときに言う。

定義 2.7. $i \in \mathbb{N}$ に対し z_i を変数とする。頂点集合が $[n]$ であるようなグラフ G に対し、その chromatic quasisymmetric function $\mathrm{csf}_G(q)$ を以下で定義する。

$$\mathrm{csf}_G(q) = \sum_{\kappa\colon G \to \mathbb{N},\, \text{proper}} z_\kappa q^{\mathrm{asc}(\kappa)}$$

ここで $z_\kappa = \prod_{i=1}^{n} z_{\kappa(i)}$ を表す。

Hessenberg 関数 h に対し、$\mathrm{csf}_{G_h}(q)$ は z_i たちの対称関数係数の q に関する多項式であることが知られている [9]。ゆえに以降では $\mathrm{csf}_{G_h}(q)$ のことを単に G_h の chromatic symmetric function と呼ぶ。グラフ G の chromatic symmetric function は G の chromatic polynomial の一般化になっている。実際に任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し、G の proper k-coloring の数は $\mathrm{csf}_G(q)$ に $z_1 = \cdots = z_k = 1$, $z_{k+1} = z_{k+2} = \cdots = 0$, $q = 1$ を代入すれば得られる。

2.3 Shareshian-Wachs 予想

Regular semisimple Hessenberg 多様体 $X(h)$ と chromatic symmetric functions $\mathrm{csf}_{G_h}(q)$ の間の次の対応は Shareshian-Wachs 予想と呼ばれ、Brosnan-Chow により肯定的に解決された。

定理 2.8 ([2])**.** *Hessenberg* 関数 h に対し、

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{ch}(H^{2i}(X(h)))q^i = \omega(\mathrm{csf}_{G_h}(q))$$

ここで ch は *Frobenius characteristic* であり、ω は対称関数の *involution* である。

上式の左辺は $H^*(X(h))$ の Frobenius series を ch で写したものであるが、ch は 1 対 1 であることと記号や説明が煩雑になるのを避けるため、本稿では Frobenius series とそれを ch で写したものを同一視することにする。また昨年、Kiem-Lee[10] によって、この定理の簡明な別証明が与えられた。

3 Hessenberg twins

この章では Introduction の四角形の左辺について述べる。

3.1 Hessenberg twin の定義

本稿では [1] と異なり、Ayzenberg-Buchstaber[3] の定義通りに Hessenberg twin を書き表すことで、その性質を直観的に説明したいと思う。$U(n)$ には左からの T による積と右からの T による積という 2 つの T-作用があることに注意して、射影 $p_L\colon U(n) \to T\backslash U(n)$, $p_R\colon U(n) \to U(n)/T$ を考える。

定義 3.1. Hessenberg 関数 h に対し、Hessenberg twin $Y(h)$ を $p_L(p_R^{-1}(X(h)))$ として定める。

この定義をもう少し説明する。対角行列 S と T の元は可換なので、$p_R\colon U(n) \to U(n)/T$ によって $X(h)$ を引き戻した空間 $p_R^{-1}(X(h))$ は左からの T の積による作用で閉じた空間になっている。$Y(h)$ の定義を図に書くと次のようになる。

$$\begin{array}{ccccc}
T\backslash U(n) & \xleftarrow{\quad p_L \quad} & U(n) & \xrightarrow{\quad p_R \quad} & U(n)/T \\
 & & & & \\
Y(h) = p_L(p_R^{-1}(X(h))) & \leftsquigarrow & Z(h) = p_R^{-1}(X(h)) & \leftsquigarrow & X(h)
\end{array}$$

つまり、$X(h)$ の親 $Z(h) = p_R^{-1}(X(h)) = p_L^{-1}(Y(h))$ が $U(n)$ の中に住んでおり、この親から生まれた双子のもう片方が $Y(h)$ というネーミングなのだと思われる。

注意 3.2. Ayzenberg-Buchstaber[3] では regular semisimple Hessenberg 多様体を Y_h と書き、その twin を X_h と書いている。本稿とは X と Y の使い方が逆であることに注意。

Twin $Y(h)$ は $X(h)$ と似た性質を多く持ち、次が成立する。

命題 3.3 ([3]). *Regular semisimple Hessenberg* 多様体の *twin* $Y(h)$ に対し次が成立する。

- $Y(h)$ は滑らかな多様体である。
- $\dim Y(h) = 2\sum_{i=1}^{n}(h(i)-i)$
- 固定点集合は $Y(h)^T = \mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)^T = \mathfrak{S}_n$
- $H^{\mathrm{odd}}(Y(h)) = 0$

しかし、一般には $Y(h)$ は $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ の subvariety でないことが知られている。

注意 3.4. 論文 [1] では、$Y(h)$ の元（の代表元）を全て逆元で考えることで、$Y(h) \subset U(n)/T$ としている。

3.2　$X(h)$ と $Y(h)$ のコホモロジーの関係

まず $Y(h)$ の同変コホモロジー環について述べる。このとき、$Y(h)$ には右からのトーラスの積による T-作用があることに注意。この同変コホモロジー環は $Z(h)$ を経由することで簡単に書くことができる。つまり、$Y(h)$ の右側のトーラス作用による "右側" 同変コホモロジー環は $Z(h)$ の "両側" 同変コホモロジー環と同型であり、それゆえ $X(h)$ の "左側" 同変コホモロジー環と同型である。

$$H^*(Y(h) \times_T ET) \cong H^*(ET \times_T Z(h) \times_T ET) \cong H^*(ET \times_T X(h))$$

命題 3.5 ([3]). 環として次の同型がある。

$$H_T^*(Y(h)) \cong H_T^*(X(h))$$

一般には $X(h)$ と $Y(h)$ の間に T-同変な同相写像があるわけではないことに注意。実際に、直前の方法により与えられる同型は $H^*(BT)$-代数としての同型ではない。左右のトーラスが別物であると考えるべきである。

さて、$Y(h)$ の通常のコホモロジーは同変コホモロジーから復元できる。その方法は $X(h)$ の場合と同様であるが、左右が異なる。つまり、イデアル $(x_1,\ldots,x_n)$ で割ることで $H^*(Y(h))$ を復元できる。このとき、dot action は $x_1,\ldots,x_n$ を全く動かさないので、dot action を $H^*(Y(h))$ 上の作用に落とすことができる。結局、

$$H^*(Y(h)) \cong H_T^*(X(h))/(x_1,\ldots,x_n)$$

であり、このようにして $H^*(Y(h))$ は次数付き $\mathfrak{S}_n$-表現となる。

命題 3.6. 次数付き $\mathfrak{S}_n$-表現として次が成立する。

$$H^*(Y(h)) \otimes \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n] \cong \mathbb{C}[t_1,\ldots,t_n] \otimes H^*(X(h))$$

ここで x_i は dot action で動かないので、$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ は自明表現からなり、それの Frobenius series は

$$\frac{1}{(1-q)^n} = (1-q)^{-n}$$

となる。

4 unicellular LLT 多項式

この章では Introduction の四角形の右辺について述べる。

4.1 unicellular LLT 多項式の定義

LLT 多項式は skew Young diagram の組に対して定められる対称関数係数の多項式で、skew Schur 関数の積の q-類似として定められた。本稿では各 skew Young diagram が単一のセルからなる場合の LLT 多項式、つまり unicellular LLT 多項式のみを扱い、一般の場合の LLT 多項式の定義は割愛する。実は Hessenberg 関数は unicellular LLT 多項式と 1 対 1 対応しており、h に対応する unicellular LLT 多項式を $\mathrm{LLT}_h(q)$ と表すことにすると、h に付随するグラフ G_h を用いて次のように書くことができる。

定義 4.1. Hessenberg 関数 h に対し、

$$\mathrm{LLT}_h(q) = \sum_{\kappa\colon G_h \to \mathbb{N}} z_\kappa q^{\mathrm{asc}(\kappa)}$$

と定める。

この定義は、chromatic symmetric function の定義（定義 2.7）の coloring の条件から proper を除いたものに一致している。

4.2 $\mathrm{csf}_{G_h}(q)$ と $\mathrm{LLT}_h(q)$ の関係

これ以降、$\mathrm{csf}_{G_h}(q)$ と $\mathrm{LLT}_h(q)$ を係数である z_i たちの対称関数の部分を操作するために、それぞれ $\mathrm{csf}_{G_h}(\mathbf{z};q)$, $\mathrm{LLT}_h(\mathbf{z};q)$ と書くことにする。

命題 4.2 ([4])**.**

$$\mathrm{LLT}_h[(q-1)Z;q] = (q-1)^{-n}\mathrm{csf}_{G_h}(\mathbf{z};q)$$

ここで $Z = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots$ であり、$\mathrm{LLT}_h[(q-1)Z;q]$ は *plethysm* を表す。

注意 4.3. ここでは plethysm について詳しく述べないが、対称関数における特殊な代入操作である。z_i たちの対称関数 $\varphi(\mathbf{z})$ に対し $\varphi[Z]$ は $\varphi(\mathbf{z})$ 自身である。詳しくは [11] の 3.3 節などを参照せよ。

命題 4.4. φ を次数 n の斉次対称関数とすると、次が成立する。

$$\omega(\varphi[Z]) = (-1)^n\varphi[-Z]$$

5 主結果

奇数次が消えているような次数付き表現 V に対し、$F_V(\mathbf{z};q)$ で V の Frobenius series を表すことにする。定理 2.8 と命題 4.2 と 4.4 より

$$\begin{aligned} F_{H^*(X(h))}(\mathbf{z};q) &= \omega(\mathrm{csf}_{G_h}(\mathbf{z};q)) = \omega((q-1)^{-n}\mathrm{LLT}_h[(q-1)Z;q]) \\ &= \mathrm{LLT}_h[(1-q)Z;q]) \cdot (1-q)^{-n} \end{aligned} \tag{5.1}$$

である。右辺の $(1-q)^{-n}$ は $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ の Frobenius series であることに注意すると、幾何的な状況との対応が理解しやすいのではないかと思われる。また、命題 3.6 における $\mathbb{C}[t_1,\ldots,t_n]$ も、式 (5.1) の右辺の plethysm を解消する形で、次の命題により現れる。

命題 5.1 ([11])**.** 次が成立する。

$$F_V\left[\frac{Z}{1-q};q\right]=F_{\mathbb{C}[t_1,\dots,t_n]\otimes V}(\mathbf{z};q)$$

ゆえに、この命題と命題 3.6 および式 (5.1) を用いて次のように計算できる。

$$\begin{aligned}F_{H^*(Y(h))}(\mathbf{z};q)\cdot(1-q)^{-n}&=F_{H^*(Y(h))\otimes\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]}(\mathbf{z};q)=F_{\mathbb{C}[t_1,\dots,t_n]\otimes H^*(X(h))}(\mathbf{z};q)\\&=F_{H^*(X(h))}\left[\frac{Z}{1-q};q\right]=\mathrm{LLT}_h(\mathbf{z};q)\cdot(1-q)^{-n}\end{aligned}$$

この両辺に $(1-q)^n$ を掛けることで次が得られ、これが Introduction の四角形の底辺の等号であり、[1] の主結果である。正確性のために、ここでは Frobenius characteristic ch を明示して記述しておく。

定理 5.2 ([1, Proposition 4.1.3])**.** *Hessenberg* 関数 h に対し、次が成り立つ。

$$\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{ch}(H^{2i}(Y(h)))q^i=\mathrm{LLT}_h(q)$$

注意 5.3. [1] の発表後、Precup-Sommers[12] もこの定理を証明していることを宇部高等専門学校の堀口達也氏から指摘頂いた。また、Kiem-Lee[13] による別証明もごく最近与えられた。

現在研究中であるが、[13] に触発されて、定理 5.2 の直接的な証明を与えることができた。これは [13] と比べてもより初等的な証明であり、さらに命題 3.5 の同型を通じて定理 2.8 の直接的な証明も与えることができ、両者を統一的に証明することができた。この結果は枡田幹也氏、堀口達也氏との共同研究である。

参考文献

[1] M. Masuda and T. Sato, *Unicellular LLT polynomials and twins of regular semisimple Hessenberg varieties*, Int. Math. Res. Not. IMRN, rnac359 (2023).

[2] P. Brosnan and T. Chow, *Unit interval orders and the dot action on the cohomology of regular semisimple Hessenberg varieties*, Adv. Math. 329 (2018), 955–1001.

[3] A. Ayzenberg and V. Buchstaber, *Manifolds of isospectral matrices and Hessenberg varieties*, Int. Math. Res. Not. 2021, no. 21, 16671–16692.

[4] E. Carlsson and A. Mellit, *A proof of the shuffle conjecture*, J. of Amer. Math. Soc. 31 (2017):661–697.

[5] F. De Mari, C. Procesi, and M. A. Shayman, *Hessenberg varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. 332 (1992), no. 2, 529–534.

[6] T. Abe, T. Horiguchi, M. Masuda, S. Murai, and T. Sato, *Hessenberg varieties and hyperplane arrangements*, J. Reine Angew. Math. 764, 241–286 (2020).

[7] J. Tymoczko, *Permutation actions on equivariant cohomology of flag varieties*, Contemp. Math. 460 (2008), 365–384.

[8] V. Guillemin and C. Zara, 1-*skeleta, Betti numbers, and equivariant cohomology*, Duke Math. J. 107 (2001), no. 2, 283–349.

[9] J. Shareshian and M. L. Wachs, *Chromatic quasisymmetric functions*, Adv. Math. 295 (2016), 497–551.

[10] Y.H. Kiem and D. Lee, *Birational geometry of generalized Hessenberg varieties and the generalized Shareshian-Wachs conjecture* arXiv:2208.12282.

[11] M. Haiman, *Combinatorics, symmetric functions, and Hilbert schemes*, Current developments in mathematics, 2002, 39–111, Int. Press, Somerville, MA, 2003.

[12] M. Precup and E. Sommers, *Perverse sheaves, nilpotent Hessenberg varieties, and the modular law*, arXiv:2201.13346.

[13] Y.H. Kiem and D. Lee, *Geometry of the twin manifolds of regular semisimple Hessenberg varieties and unicellular LLT polynomials*, arXiv:2307.01130.