Key 多項式とその組み合わせ論

国際基督教大学　松村朝雄
Tomoo Matsumura
International Christian University

概 要

本研究は早稲田大学の杉本奨吾氏との共同研究である. Key 多項式は Demazure 加群の指標である. Key 多項式の組み合わせ論的表示公式は, Lascoux–Schützenberger [LS90] のヤングタブローによる公式と Kohnert [Koh91] の Kohnert 図形による公式に加えて, Assaf の半標準 key タブローによる公式が知られている. Assaf の公式の別証明を得ることができたので, それについて報告する.

1　概要

本研究は早稲田大学の杉本奨吾氏との共同研究である. Demazure は [Dem74] において "Demazure 加群" を導入し, Weyl の指標公式を一般化する形でその指標を記述した. A 型の場合にその指標は Key 多項式と呼ばれている. Lascoux–Schützenberger は [LS90] において, "standard bases" (cf. [RS95]) という名の下にそれらを調べ, 半標準 Young タブローによる公式を得た.

Key 多項式の組み合わせ論的な表示公式としては, 当初 Kohnert [Koh91] の Kohnert 図形による公式も知られていたが, 最近になって Assaf [Ass18] も, **半標準** ***Key*** **タブロー**を導入し別の組み合わせ論的公式を得た. 本稿では, この Assaf の Key タブローによる公式の別証明が得られたので, それについて報告する. 組み合わせ論的に比較的すっきりした議論なので, 別証明として興味を持っていただければ幸いである. 大筋の流れを説明することにし, 詳細は改めて執筆するのでそちらを参照されたい.

Assaf のもともとの証明は, 半標準 Young タブローの標準化と Fundamental Slide 多項式 (Assaf–Searles [AS17]) への分解に基づく. 我々の証明は, Wachs [Wac85] による旗付き Schur 多項式の Young タブロー表示 (あるいは行列式公式) の証明にヒントを得ている. 具体的には, Key 多項式が Demazure 作用素によって帰納的に定義されるので, Demazure 作用素が Key タブローにどのように作用するか調べることによって, 帰納的な証明を可能にした.

2　定義および定理

正の整数 n を決めておく．n 個の非負整数の列 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ を *(weak) composition* と呼ぶ．$i > n$ に対しては, $\alpha_i = 0$ と仮定する．これらの composition たちには, $[n] := \{1, \ldots, n\}$ の置換群 S_n が右から作用する．すなわち

$$\alpha w = (\alpha_{w(1)}, \alpha_{w(2)}, \ldots, \alpha_{w(n)}).$$

と考える．非減少な composition, すなわち $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$ であるような composition α を**分割** (*partition*) と呼ぶ．n 個の変数 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の多項式環を $\mathbb{Z}[x]$ と記す．これには置換群 S_n が変数を置換するように作用する．すなわち, 多項式 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ と置換 $w \in S_n$ に対し,

$$w(f(x_1, \ldots, x_n)) := f(x_{w(1)}, \ldots, x_{w(n)})$$

とする．$i \in [n-1]$ に対し，*Demazure* **作用素** π_i を次のように定める．

$$\pi_i(f) := \frac{x_i f - s_i(x_i f)}{x_i - x_{i+1}}. \tag{2.1}$$

ここで, $s_i \in S_n$ は i と $i+1$ だけを入れ替える互換である．古典的な差分商作用素 $\partial_i = \frac{1-s_i}{x_i - x_{i+1}}$ を使えば, $\pi_i(f) = \partial_i(x_i f)$ のように表すことができる．これより, $\pi_i f = f$ が f が x_i と x_{i+1} に関して対称であることを意味することや, 関係式

$$\begin{cases} \pi_i^2 = \pi_i \quad (i \in [n-1]), \\ \pi_i \pi_{i+1} \pi_i = \pi_{i+1} \pi_i \pi_{i+1} \quad (i \in [n-2]), \\ \pi_i \pi_j = \pi_j \pi_i \quad (|i-j| \geq 2). \end{cases} \tag{2.2}$$

を満たすことは容易に確かめることができる．これらの性質は, Key 多項式の以下の帰納的な定義を可能にする．

定義 2.1. composition $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ に付随した *Key* **多項式** $\kappa_\alpha(x)$ は, α が分割ならば $\kappa_\alpha := x^\alpha$ とする．もし分割でなければ, $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ となる添字 i が存在するので,

$$\kappa_\alpha(x) := \pi_i(\kappa_{\alpha s_i}(x)) \tag{2.3}$$

と定める．

例 2.2. $\lambda = (2,1,0)$ とすると, $\kappa_\lambda = x_1^2 x_2$ であり, 以下のように計算できる.

$$\begin{aligned}
\kappa_{(1,2,0)} &= \pi_1(\kappa_\lambda) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2, \qquad \kappa_{(2,0,1)} = \pi_2(\kappa_\lambda) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3, \\
\kappa_{(1,0,2)} &= \pi_2(\kappa_{(1,2,0)}) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_2x_3 + x_1x_3^2, \\
\kappa_{(0,2,1)} &= \pi_1(\kappa_{(2,0,1)}) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_2x_3 + x_2^2x_3, \\
\kappa_{(0,1,2)} &= \pi_1(\kappa_{(1,0,2)}) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_3 + x_1x_3^2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2.
\end{aligned}$$

2.1 半標準 Key タブロー

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ を composition とする. α の形のダイアグラムとは, 集合 $\{(i,j) \in [n] \times [n] \mid 1 \leq j \leq \alpha_i\}$ のことで, この集合のそれぞれ元 (i,j) を箱と呼ぶ. 実際には, 下から数えた i 行目に α_i 個の箱を左詰めに並べた図形を考えている. α が分割の場合は, 古典的なヤング図形を表している.

定義 2.3 ([Ass18] p.8781 (cf. [Ass17])). α の形の (**半標準**)*Key* **タブロー** T は, α のダイアグラムのそれぞれの箱に正の整数を, 下の条件を満たすように一つずつ与えたものである.

(K1) 各行は右に非増加;

(K2) i 行目に使う数字は最大 i まで;

(K3) 各列において, 各数字は最大一回まで使用可能;

(K4) ある行において数字 a が数字 b より上にあったとする. もし $a < b$ ならば, b のすぐ右に箱があって, そこに入る数字 c は $a < c$ を満たす.

α の key タブローの全体を SSKT(α) と表す. key タブロー T に対し, $T(i,j)$ を箱 (i,j) に入れた数字を表すことにする. また, key タブロー T に対して, 対応する単項式を $x^T := x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}$ で定める. ここで r_i は T に使われた数字 i の個数である.

例 2.4. $\alpha = (1,0,3,2)$ のダイアグラムと, いくつかの key タブロー T とそれに対応する単項式 x^T をここに記す.

$$\begin{array}{cccccc}
\begin{array}{lll} \square & \square & \\ \square & \square & \square \\ & & \\ \square & & \end{array}
& T &
\begin{array}{lll} 4 & 3 & \\ 2 & 2 & 1 \\ & & \\ 1 & & \end{array}
&
\begin{array}{lll} 4 & 1 & \\ 3 & 2 & 2 \\ & & \\ 1 & & \end{array}
&
\begin{array}{lll} 4 & 4 & \\ 3 & 3 & 3 \\ & & \\ 1 & & \end{array}
&
\begin{array}{lll} 2 & 1 & \\ 3 & 3 & 2 \\ & & \\ 1 & & \end{array}
\\
& x^T & x_1^2x_2^2x_3x_4 & x_1^2x_2^2x_3x_4 & x_1x_3^3x_4^2 & x_1^2x_2^2x_3^2
\end{array}$$

次の公式は Assaf によって [Ass18] で証明された．本稿では下記の命題 2.6 に基づいた別証明を解説する．

定理 2.5 ([Ass18] Proposition 2.6 (cf. [Ass17]))**.**

$$\kappa_\alpha(x) = \sum_{T \in \mathrm{SSKT}(\alpha)} x^T. \tag{2.4}$$

Proof. 式 (2.4) の右辺を $K_\alpha(x)$ とかく．α の上昇数 a を $a := \sharp\{(i, i+1) \mid \alpha_i < \alpha_{i+1}, i \in [n-1]\}$ とする．この a に関する帰納法を使う．$a = 0$ の時は α は分割なので，定義より $\kappa_\alpha = x^\alpha$ である．この時，α の key タブローは条件 (K2) より i 行目に i を入れるしかないので，$K_\alpha = x^\alpha$ がわかる．次に，$a > 0$ を仮定し，$\alpha_t < \alpha_{t+1}$ となる $t \in [n-1]$ を選ぶ．この時，式 (2.3) と命題 2.6 により，

$$\kappa_\alpha = \pi_t(\kappa_{\alpha s_t}) = \pi_t(K_{\alpha s_t}) = K_\alpha$$

となる．ただし，真ん中の等式は帰納法の仮定に基づく． □

命題 2.6. *$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ を composition とし，ある $t \in [n-1]$ に対し $\alpha_t < \alpha_{t+1}$ を仮定する．この時，*

$$K_\alpha = \pi_t K_{\alpha s_t}$$

が成り立つ．

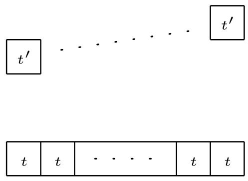
3 key タブローにおける t と $t+1$ の配置

命題 2.6 の証明の要は，key タブロー T において t と $t+1$ がどのように配置されうるかを分類したところにある．以下，$t' := t+1$ とおく．α あるいは α' の key タブロー T を考え，t と t' が入っている箱を**活箱**と呼ぶことにする．活箱の配置を調べる上で，鍵となる補題が以下である．

補題 3.1. *T を key タブローとする．$i' > i$ とする．$T(i', j)$ と $T(i, j+1)$ が活箱で，$T(i, j)$ が活箱でないとする．この時，$T(i', j) = t$ かつ $T(i, j+1) = t'$ である (下の図を参照).*

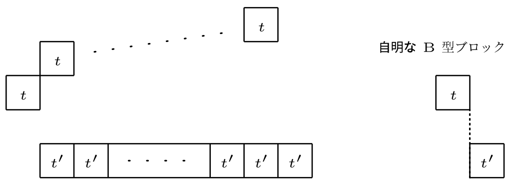
$$\begin{array}{cccc} i' & \boxed{t} & \\ & & \\ i & \times & \boxed{t'} \\ & j & \end{array}$$

以下 SSKT(α) あるいは SSKT(α') の同値類に対して, その活箱の配置を考える. 活箱の配置のされ方として, 次の A,B,C 型ブロックを考える. A 型ブロックは, 各行に二つの活箱があり, 下の箱には全て t が入って一行に並んでいて, 上の箱には t' が入っていて行番号は左から右に非減少というものである.



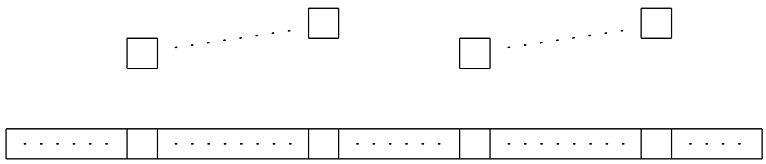
A 型ブロック

B 型ブロックは, A 型ブロックの t と t' を入れ替えたものに, 下の図のように前後に活箱が一つずつ配置される. 特に一列目の活箱は, 2 列目の下の活箱より上にあり, 高々上の活箱の位置までのところに配置されている. そして, 最後の列の活箱は前の列の下の活箱の位置にあるとする. 活箱が 2 段になっているところがないものは, 自明な B 型ブロックとよぶ.



B 型ブロック

最後に, C 型ブロックは下の図のように, 活箱が一つしかない列たちと二つある列たちが交互に続き, 入る数字は他の箱の数字を変えずに t と t' のどちらに変更可能な箱である (条件 (K1) から (K4) を保つながら). ただし, 最後の列は一つの活箱の列でなければならず, 最初の列は二つ活箱の列でもよい. 二つ活箱の列がないようなものを自明な C 型ブロックと呼ぶ.



C 型ブロック

次の命題が本稿の証明の要である.

命題 3.2. *α の key タブローの活箱の配置は A,B,C 型ブロックたちの非交和となる.*

SSKT(α) あるいは SSKT(α') の部分集合 $\mathscr{C}$ に対して,

$$R(\mathscr{C}) := \sum_{T \in \mathscr{C}} x^T$$

と定める.

同じ形のタブロー T_1 と T_2 は, 活箱の配置が同じ場合に, 同値であるとする. $\mathscr{A}$ を SSKT(α) あるいは SSKT(α') の同値類とすると,

$$R(\mathscr{A}) = f(x_t, x_{t'})g(x_i; i \in [n]\backslash\{t, t'\})$$

のように, 活箱から寄与する多項式とそれ以外の部分の積に分解できる. そこで, 命題 3.2 より, 次の系が導かれる.

系 3.3. $\mathscr{A}$ を SSKT(α) の同値類とすると $R(\mathscr{A})$ は x_t と $x_{t'}$ に関して対称である.

Proof. A,B 型ブロックからの寄与は x_t と $x_{t'}$ に関して対照であることは明らか. C 型ブロックからの寄与は,

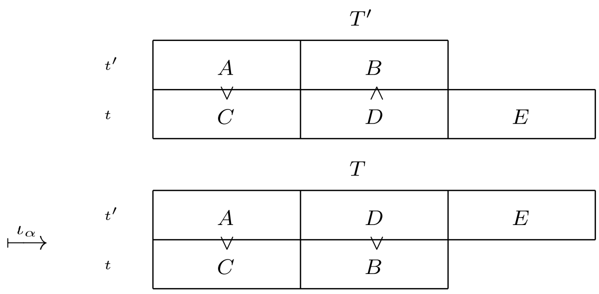
$$\left(\sum_{i=0}^{a} x_t^i x_{t'}^{a-i}\right)(x_t x_{t'})^b$$

である. ただし a は一つ活箱の列の数で, b は二つ活箱の列の数である. □

4 命題 2.6 の証明について

次の定義および命題によって SSKT(α') を SSKT(α) に埋め込んで比較する.

定義 4.1. 写像 ι_α : SSKT(α') $\to$ SSKT(α), $T' \mapsto T$ を以下のように定める. 条件 (K4) より, T' の t,t' 行目の各列の大小関係が下の図のようになっている. B,D の部分は空集合の可能性もある. T' に対して, A, C の右側の部分を入れ替えることで T を定義する.

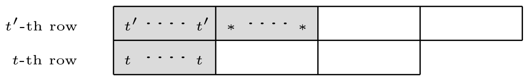


命題 4.2. 写像 ι_α は矛盾なく定義されていて, かつ, 単射である.

これにより, 命題 2.6 を示すには, $\mathrm{SSKT}(\alpha)$ の同値類 $\mathscr{A}$ に対し,

$$R(\mathscr{A}) = \pi_t(R(\iota_\alpha^{-1}(\mathscr{A}))) \tag{4.1}$$

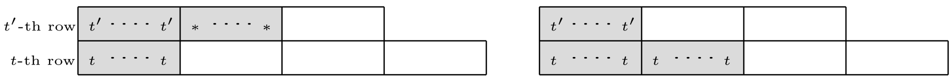
を示せばよい. 同値類 $\mathscr{A}$ の活箱の配置は, t, t' 行目に関して以下のようになっている.



$R(\mathscr{A}')$ において, 図の $*$ の部分の寄与は

$$\left(\sum_{i=0}^{a} x_t^i x_{t'}^{a-i}\right)(x_t x_{t'})^b$$

である. ただし a は一つ活箱の列の数で, b は二つ活箱の列の数である. 一方, ι_α による $\mathscr{A}$ の逆像の活箱の配置は, 以下の 2 種類のパターンがありうる.



前者の同値類を $\mathscr{A}_0'$, 後者の同値類を $\mathscr{A}_1'$ とする. $\mathscr{A}_1'$ の t' 行目に活箱がない列からの寄与は

$$x_t^a (x_t x_{t'})^b$$

である. したがって, $\mathscr{A}_0 := \iota_\alpha \mathscr{A}_0'$ とし, $\mathscr{A}_1 := \mathscr{A} \setminus \mathscr{A}_0$ とすれば,

$$R(\mathscr{A}_0) = \pi_t(R(\mathscr{A}_0')), \qquad R(\mathscr{A}_1) = \pi_t(R(\mathscr{A}_1'))$$

がわかる. $\iota_\alpha^{-1} = \mathscr{A}_0' \sqcup \mathscr{A}_1'$ なので, 式 (4.1) が示せた. $\square$

参考文献

[AS17] Sami Assaf and Dominic Searles. Schubert polynomials, slide polynomials, Stanley symmetric functions and quasi-Yamanouchi pipe dreams. *Adv. Math.*, 306:89–122, 2017.

[Ass17] Sami Assaf. Weak dual equivalence for polynomials. *arXiv e-prints*, page arXiv:1702.04051, February 2017.

[Ass18] Sami Assaf. Nonsymmetric Macdonald polynomials and a refinement of Kostka-Foulkes polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 370(12):8777–8796, 2018.

[Dem74] Michel Demazure. Une nouvelle formule des caractères. *Bull. Sci. Math. (2)*, 98(3):163–172, 1974.

[Koh91] Axel Kohnert. Weintrauben, Polynome, Tableaux. *Bayreuth. Math. Schr.*, (38):1–97, 1991. Dissertation, Universität Bayreuth, Bayreuth, 1990.

[LS90] Alain Lascoux and Marcel-Paul Schützenberger. Keys & standard bases. In *Invariant theory and tableaux (Minneapolis, MN, 1988)*, volume 19 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 125–144. Springer, New York, 1990.

[RS95] Victor Reiner and Mark Shimozono. Key polynomials and a flagged Littlewood-Richardson rule. *J. Combin. Theory Ser. A*, 70(1):107–143, 1995.

[Wac85] Michelle L. Wachs. Flagged Schur functions, Schubert polynomials, and symmetrizing operators. *J. Combin. Theory Ser. A*, 40(2):276–289, 1985.

International Christian University
Tokyo 181-8585
JAPAN
matsumura.tomoo@icu.ac.jp