σ-作用の軌道の幾何学

-triality automorphism の場合を中心にして-

京都工芸繊維大学・基盤科学系 井川治
Osamu Ikawa
Kyoto Institute of Technology

2023 年 6 月 27 日

概 要

8 次特殊直交群の普遍被覆群 $Spin(8)$ には triality automorphism と呼ばれる位数 3 の外部自己同型写像 σ が存在する． この σ から σ 作用と呼ばれる $Spin(8)$ の $Spin(8)$ 自身への作用が定まる．この作用は余等質性 (=最大次元軌道の余次元) 2 の超極作用である．この作用の軌道空間と個々の軌道の性質について報告する．

この研究は間下克哉氏（法政大学）との共同研究に基づく．

$Spin(8)$ で $SO(8)$ の普遍被覆群を表す．$Spin(8)$ は $SO(8)$ の二重被覆で 28 次元である．$Spin(8)$ をスピノール群という．$Spin(8)$ には triality automorphism と呼ばれる位数 3 の外部自己同型写像が存在する．σ は八元数 $\mathbb{O}$ を用いて構成される．ここでは σ の具体的な構成法については省略する (たとえば，[20] を参照).

一般に compact 連結 Lie 群 G と G 上の自己同型写像 σ に対し，σ 作用と呼ばれる G の G 自身への作用が定義される（定義は次節）．σ 作用の軌道の幾何学を調べたい．たとえば，軌道空間がどのようになるか，どの軌道が極小軌道/austere 軌道/弱鏡映軌道になるかなどである．

---

e-mail: ikawa@kit.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:22K03285) の助成を受けたものである．

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

1　σ 作用

この節では G で compact 連結 Lie 群，σ で G の自己同型写像を表す．G 上に両側不変 Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を入れておく．

1.1　σ 作用と Cartan 埋め込み

G 上の自己同型写像 σ に対し，G の G 自身への作用を

$$G \curvearrowright G; \qquad g \cdot x = gx\sigma(g^{-1}) \qquad (x, g \in G)$$

と定め，σ **作用**という．

$\sigma = 1$ の場合には，σ 作用は随伴作用に他ならない．随伴作用の軌道の幾何学は極大トーラス理論を用いて多くの幾何学者により研究されている．$A \subset G$ で G の極大トーラスを表すと，

$$G = \bigcup_{g \in G} gAg^{-1} \tag{1}$$

が成り立つ．これにより随伴作用の任意の軌道は A と交わる．よって随伴作用の軌道を調べるためには軌道の始点を A の点と仮定して一般性を失わない．この場合には軌道空間の形やどの軌道が全測地的/austere/極小軌道になるかがわかっている．軌道空間の形や各軌道の性質を調べるために，G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の A の Lie 環 $\mathfrak{a}$ に関するルート系が使える．

$\sigma = 1$ とは限らない一般の場合に話を戻す．$F(\sigma, G) = G_\sigma$ で G 内での σ の固定部分群を表す：

$$F(\sigma, G) := \{x \in G \mid \sigma(x) = x\} =: G_\sigma$$

$F(\sigma, G)_0$ で $F(\sigma, G)$ の単位連結成分を表し，$F(\sigma, G)_0$ の極大トーラス A をとる．このとき，

$$G = \bigcup_{g \in G} gA\sigma(g^{-1}). \tag{2}$$

が成り立つ ([8, (1.2)])．関係式 (2) は (1) の拡張である．(2) より，σ 作用の軌道を調べるためには軌道の始点を A の点と仮定して一般性を失わない．さらに σ 作用の各軌道は A と直交して交わる．この性質を σ-作用の超極性という．

σ 作用の軌道は以下で定義する Cartan 埋め込みの像と深く関係する．

写像 $G \to G; g \mapsto g\sigma(g^{-1})$ は埋め込み $G \to G/G_\sigma; g \mapsto g\sigma(g^{-1})$ を誘導する．この埋め込みを σ の誘導する Cartan 埋め込みという．明らかに，σ 作用の単位元 e の軌道 $\{g\sigma(g^{-1}) \mid g \in G\}$ は Cartan 埋め込みの像に一致する．

1.2 σ 作用の軌道

$a \in G$ の定める内部自己同型写像を τ_a で表す：$\tau_a(x) = axa^{-1}$．G 上の自己同型写像 σ_a を $\sigma_a = \tau_a \circ \sigma$ と定義すると，$\sigma = \sigma_e$．一般に σ と σ_a は位数すら異なる．$\tilde{O}_x^a$ で σ_a 作用の点 x を通る軌道を表すと，$\tilde{O}_x^e$ は σ 作用の点 x を通る軌道になる．このとき，

$$\tilde{O}_x^a = \{gx\sigma_a(g^{-1}) \mid g \in G\} = \{g(xa)\sigma(g^{-1}) \mid g \in G\}a^{-1} = \tilde{O}_{xa}^e a^{-1}$$

G には両側不変 Riemann 計量を入れているので，$\tilde{O}_x^a$ と $\tilde{O}_{xa}^e$ は合同である．これを $\tilde{O}_{xa}^e \cong \tilde{O}_x^a$ と表す．特に，$x = e$ とおくと $\tilde{O}_a^e \cong \tilde{O}_e^a$．右辺は自己同型写像 σ_a の定める Cartan 埋め込みの像に一致する．よって，合同なものを同一視することにして，次が得られる：

$$\begin{aligned}
&\{\sigma \text{ 作用の } x \text{ を通る軌道} \mid \sigma : \text{自己同型写像}, x \in G\} \\
&= \{\sigma \text{ 作用の } x \text{ を通る軌道} \mid \sigma : \text{自己同型写像}, x \in A \subset F(\sigma, G)_0\} \\
&= \{\sigma \text{ の定める Cartan 埋め込みの像} \mid \sigma : \text{自己同型写像}\}
\end{aligned}$$

上の第二の等号は (2) から従う．これらの表示にはいくつもの重複がある．さらに，G が単連結かつ単純のときには，任意の自己同型写像 σ' に対して，$a \in G$ と G の Dynkin 図形の合同変換の誘導する自己同型写像 σ が存在して，$\sigma' = \tau_a \circ \sigma$ となるから，

$$\begin{aligned}
&\{\sigma \text{ 作用の } x \text{ を通る軌道} \mid \sigma : \text{自己同型写像}, x \in G\} \\
&= \left\{ \sigma \text{ 作用の } x \text{ を通る軌道} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma : \text{Dynkin 図形の合同変換}, \\ x \in A \subset F(\sigma, G)_0 \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{3}$$

が得られる．ただし，Dynkin 図形の合同変換 σ の誘導する自己同型写像も同じ記号 σ で表した．右辺の表示にも重複があり，x は A の元全部を動かす必要はない．

1.3 σ 作用と Hermann 作用

この節では，Hermann 作用の定義と超極性と呼ばれる性質について述べたのち，σ 作用が Hermann 作用の一種であることを示す．

一般に Hermann 作用は compact 連結 Lie 群 U 上の二つの対合 θ_1, θ_2 から次のようにして定義される．θ_i の固定部分群を $F(\theta_i, U)$ と表す．$F(\theta_2, U)$ の compact 対称空間 $U/F(\theta_1, U)$ への自然な等長作用を **Hermann 作用**という．

$\theta_1 = \theta_2$ の場合には，Hermann 作用は compact 対称空間へのイソトロピー群の作用に他ならない．compact 対称空間へのイソトロピー群の作用に関する軌道の幾何学については制限ルート系の理論を用いて，多くの幾何学者により研究されている．

Hermann[5] は，この作用が以下で述べる超極性という良い性質をもつことを示した．一般に Riemann 多様体 M への compact Lie 群 K の等長作用が超極であるとは，連結平坦閉部分多様体 A が存在して各 K 軌道が A と直交して交わる場合をいう．A は M の全測地的部分多様体になることが知られている．

σ 作用は Hermann 作用であることを説明しよう．$U = G \times G$ 上の二つの対合 θ_1, θ_2 を次で定める：

$$\theta_1(g, h) = (\sigma^{-1}(h), \sigma(g)), \quad \theta_2(g, h) = (h, g)$$

このとき，θ_1, θ_2 の固定部分群は

$$\begin{aligned} F(\theta_1, U) &= \{(g, \sigma(g)) \mid g \in G\} \cong G, \\ F(\theta_2, U) &= \Delta U = \{(g, g) \mid g \in G\} \cong G \end{aligned}$$

よって，(U, θ_1, θ_2) の定める Hermann 作用は

$$F(\theta_1, U) \curvearrowright U/\Delta U; (g, \sigma(g)) \cdot (a, b)\Delta U = (ga, \sigma(g)b)\Delta U$$

ここで，$U/\Delta U$ と G を $(a, b)\Delta U \leftrightarrow ab^{-1}$ により同一視し，$F(\theta_1, U)$ と G とを $(g, \sigma(g)) \leftrightarrow g$ により同一視し，G を G 自身へ作用させると $g \cdot x = gx\sigma(g^{-1})$ が得られる．これは σ-作用に他ならない．

σ-作用を Hermann 作用と見るとき，

$$\theta_1\theta_2(g, h) = (\sigma^{-1}(g), \sigma(h)), \qquad \theta_2\theta_1(g, h) = (\sigma(g), \sigma^{-1}(h))$$

だから，$\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ となるための必要十分条件は $\sigma^2 = 1$ である．今回は σ の位数が 3 の場合を扱うので，$\theta_1\theta_2 \neq \theta_2\theta_1$ である．

本研究は条件 $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ を仮定しない Hermann 作用の研究の発展に貢献できると期待される．

1.4 σ 作用と Hermann 作用に関連する先行研究

この節では関連する先行研究について述べる．Hermann 作用の軌道の軌道の幾何学の研究は [2] から始められた．

まず σ 作用以外の Hermann 作用について述べる．$\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ を満たす Hermann 作用の軌道については [7] で研究された．$\theta_1\theta_2 \neq \theta_2\theta_1$ を満たす Hermann 作用の軌道については大野晋司氏による最近の研究 [18] がある．

$\sigma^2 = 1$ を満たす σ 作用の軌道については，[8] で研究された．そこで，σ の位数が 3 以上のときの σ 作用の軌道の幾何学が知りたい．G が単連結で単純のとき，(3) より，σ は Dynkin 図形の合同変換の誘導する自己同型写像としてよい．これは，$G = Spin(8)$ で σ が triality automorphism の場合に限られる．

このようにして始めの問題に到達した．

参考までに研究対象をもう少し広げて*，compact 対称空間への超極作用の軌道の幾何学を考えてみる．Kollross[12] は compact 既約対称空間への超極作用は Hermann 作用か余等質性 1 作用に限られることを示した．

compact 既約対称空間への Hermann 作用ではない余等質性 1 作用の研究に関しては L. Verhôczi や榎吉による次の研究がある．L. Verhôczi[19] は Hermann 作用ではない余等質性 1 作用 $SU(3) \curvearrowright G_2/SO(4)$ と $SU(3) \times SU(3) \curvearrowright G_2$ の主軌道の主曲率を調べた．榎吉 [1] は次を示した．$\mathbb{O}$ で八元数体を表す．例外 Lie 群 G_2 は自然に $SO(\mathrm{Im}\mathbb{O}) = SO(7)$ の部分群になる．G_2 の $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ への作用は，$\mathrm{Im}\mathbb{O}$ の向き付けられた 3 次元部分空間全体のなす Grassman 多様体 $\tilde{G}r_3(\mathrm{Im}\mathbb{O}) = SO(7)/(SO(3) \times SO(4))$ への作用を誘導する．この作用は余等質性 1 の作用であり，軌道全体はあるパラメーター Φ $(-1 \leq \Phi \leq 1)$ を用いて，$\{M(\Phi) \mid -1 \leq \Phi \leq 1\}$ と表される．主軌道は $-1 < \Phi < 1$ に対応する．[1] では主軌道 $M(\Phi)$ の主曲率を調べた．応用として $M(0)$ が 主軌道中で唯一の austere 軌道であり，弱鏡映軌道 (定義は § 2) になることを示した．

---

*講演中に田丸博士氏から質問がありました．

2　部分多様体論の復習

この節では，後で用いる Riemann 部分多様体の用語について簡単に復習する．

$\tilde{M}$ を Riemann 多様体，$M \subset \tilde{M}$ を Riemann 部分多様体とし，$\tilde{M}, M$ の Riemann 計量をともに $\langle\ ,\ \rangle$ と表す．$\tilde{M}$ と M の Levi-Civita 接続をそれぞれ $\tilde{\nabla}$ と ∇ で表す．$M \subset \tilde{M}$ の第二基本形式を h は,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \qquad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

で定められる．法ベクトル ξ に対して

$$\langle A^\xi(X), Y\rangle = \langle h(X, Y), \xi\rangle \qquad (X, Y \in T_x(M))$$

で定められる対称線形写像 $A^\xi : T_xM \to T_xM$ を形作用素といい，A^ξ の固有値 $\{\lambda_1^\xi, \cdots, \lambda_n^\xi\}$ を ξ に関する M の主曲率という．

$n = \dim M$ とおく．$\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ で $T_x(M)$ の正規直交基底を表すとき

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i)$$

で定められる法ベクトル m を，M の平均曲率ベクトルという．

$h = 0$ のとき M は $\tilde{M}$ の全測地的部分多様体であり，$m = 0$ のとき M は $\tilde{M}$ の極小部分多様体である．任意の法ベクトル ξ について，主曲率 $\{\lambda_1^\xi, \cdots, \lambda_n^\xi\}$ が重複度も含めて -1 倍に関して不変になるとき，$M \subset \tilde{M}$ を austere 部分多様体という ([4, Harvey-Lawson(1982)])．定義から，全測地的部分多様体は austere 部分多様体であり，austere 部分多様体は極小部分多様体である．また，$M \subset \tilde{M}$ が弱鏡映部分多様体である ([6, I-酒井-田崎 (2001)]) とは，任意の $x \in M$ と $\xi \in T_x^\perp M$ に対し，$\tilde{M}$ の等長変換 σ_ξ が存在して，

$$\sigma_\xi(x) = x, \quad (d\sigma_\xi)_x(\xi) = -\xi, \quad \sigma_\xi(M) = M$$

となることをいう．このとき，$(d\varphi_\xi)_x^{-1} A^\xi (d\varphi_\xi)_x = -A^\xi$ が成り立つ．これより，弱鏡映部分多様体は austere 部分多様体であることがわかる．$M \subset \tilde{M}$ が外的 Riemann 等質空間の場合には，austere 条件は M の 1 点で確かめればよい．

Leug は鏡映部分多様体の概念を定義し，compact 対称空間内の鏡映部分多様体を分類した．ここで，$M \subset \tilde{M}$ が鏡映部分多様体であるとは，$\tilde{M}$

の等長変換 σ が存在して，M 上で σ は恒等写像であり，任意の $x \in M$ に対し，法空間 $N_x(M)$ 上で $(d\sigma)_x = -1$ となる場合をいう．鏡映部分多様体は全測地的部分多様体である．また，鏡映部分多様体は弱鏡映部分多様体である．

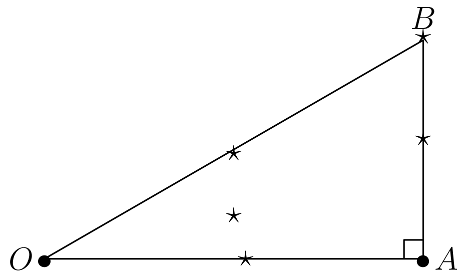
3　主結果

3.1　triality automorphism の場合の σ 作用の軌道

$G = Spin(8)$ の triality automorphism を σ とする．$F(\sigma, G) = G_2$ となるので，この σ による σ-作用は余等質性 (=最大次元軌道の余次元)2 の超極作用になる．$A \subset F(\sigma, G)$ を極大トーラスとし，A の Lie 環を $\mathfrak{a}$ で表すと，$A = \exp \mathfrak{a}$．$H \in \mathfrak{a}$ に対し，$\exp 2H \in A$ を通る σ 作用の軌道を O_H と表すと，写像 $\mathfrak{a} \to$ 軌道空間; $H \mapsto O_H$ は全射になる．よって，この写像の定義域 $\mathfrak{a}$ をある部分集合に制限すれば，上の写像は全単射になる．よって，軌道空間は Euclid 平面 $\mathfrak{a}$ のある部分集合と同一視できる．

我々は，軌道空間が $90°, 30°, 60°$ の直角三角形 $\triangle OAB$ の周及び内部であることを示した：

定理 1. 右図は triality automorphism σ による σ 作用の軌道空間を表す．● は弱鏡映軌道．$\star$ は austere ではない極小軌道．極小軌道はこの 7 つに限られる．



$\triangle OAB$ の内部は正則軌道 (= 最大次元の軌道) に対応し，周は特異軌道に対応する．$\triangle OAB$ を内部，3 辺，3 頂点に層分解したとき，各層内の 2 つの軌道の軌道型は同じになる．$\triangle OAB$ の各点に対応する軌道の平均曲率，形作用素の固有値も調べられた．辺上の極小軌道に対応する点は辺の中点ではない．内点の極小軌道に対応する点は $\triangle OAB$ の重心ではない．全測地的軌道は存在しない．

$\triangle OAB$ の点 H に対し，$\mathrm{codim}(O_H)$ は次で与えられる：

H	O	A	B	OA 上	OB 上	AB 上	内点
$\mathrm{codim}(O_H)$	14	6	8	4	4	4	2

$\triangle OAB$ がどのように定まるかについて簡単に触れておく．$G = Spin(8)$, $F(\sigma, G) = G_2$ の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ と表すと，$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{k}$ は $\mathfrak{a}$ の極大可換部分環だから，$\mathfrak{k}$ の $\mathfrak{a}$ に関するルート系 Σ が定まる．Σ は G_2 型のルート系であり，ルートの長さは大小二種類になる．直線 OA, OB は Σ から定まる．直交直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ において，$[\mathfrak{a}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ だから，$\mathfrak{m}$ の $\mathfrak{a}$ に関する 0 と異なるウエイトの全体 W が定まる．W は Σ の短いルートの全体と一致する．直線 AB は W から定まる．

3.2 σ 作用の極小軌道と極小 Cartan 埋め込み

σ 作用の軌道と合同な Cartan 埋め込みを定める自己同型の位数を調べることは興味ある問題である．

有限位数の自己同型から定まる Cartan 埋め込みについては，位数が 4 以下の場合について像が極小部分多様体になるものの分類を間下 [14]~[16] により，一般の有限位数自己同型について像が austere になるものの分類が木村-間下 [11] によって行われた．

ここでは，前節で述べた triality automorphism σ に対し，σ 作用の軌道 O_H が極小のとき，O_H と合同な Cartan 埋め込みの像を定める自己同型写像の位数が有限かどうかを調べ，次の結果を得た．

定理 2. $G = Spin(8)$ の triality automorphism を σ とする．σ 作用の軌道 O_H $(H \in \triangle OAB)$ を極小であるとする．O_H と合同な Cartan 埋め込みを定める自己同型写像 σ' が有限位数になるための必要十分条件は H が $\triangle OAB$ の頂点 O, A, B になることである．

上記定理中の σ' の位数は下の表 1 のようになる．

表 1: 極小軌道と合同な Cartan 埋め込みを定める自己同型の位数

O	A	B	その他 (辺，内点)
3	6	3	∞

証明の方針について述べる．まず，$H = O, A, B$ のとき，σ' が有限位数になることの証明はやさしいので省略する．逆については対偶「$H \neq O, A, B \Rightarrow \sigma'$ は無限位数」を示す．

H が辺 OA, OB, AB 上にある場合と，$\triangle OAB$ の内点にある場合とで場合分けする．H が辺 OA, OB, AB 上の点で O_H が極小軌道のとき，σ' が無限位数であることを示すには，円分多項式を用いた．H が $\triangle OAB$ の内点で，O_H が極小軌道である場合に，σ' が無限位数であることを示すのにはフリーソフトウェア Risa/Air を用いて Gröbner 基底の計算をした．H が辺 OA, OB, AB 上の点で O_H が極小軌道のときにもう少し詳しく証明の方針を述べる．たとえば H が辺 OA 上にあるとき，$H = tA\ (0 < t < 1)$ と表示する．極小条件は $x = \cos\frac{\pi t}{6}$ に関する 6 次の奇数次の項のない代数方程式

$$96x^6 - 144x^4 + 54x^2 - 1 = 0 \tag{4}$$

と同値になる．一方，σ' が有限位数になるための必要十分条件は，t が有理数になることであることが示される．よって，主張は次の問題を解くことに帰着される：

$\boxed{\text{問題}}$ $x = \cos\frac{\pi t}{6}$ が (4) を満たすとき (⇔ 軌道が極小)，t は有理数 (⇔ σ': 有限位数) であることを示せ.

円分多項式を用いると次がわかる．$x = \cos(2q\pi/p)$ (p, q: 互いに素) が代数方程式

$$x^6 + Ax^4 + Bx^2 + C = 0$$

を満たせば，A, B, C はある関係式を満たさねばならない．極小条件の方程式は，この関係式を満たさない．よって σ' は無限位数．H が線分 OA 上にあるときや線分 AB 上にあるときも同様の問題に帰着される．H が $\triangle OAB$ の内点にあるときは，二変数の代数方程式が出てくるので，問題はより難しくなり，Risa/Air を用いる必要があった.

3.3 Austere Cartan 埋め込み

G を compact 連結単純 Lie 群とする．木村-間下 ([11]) は G「有限位数の」自己同型写像 σ から構成される Cartan 埋め込みで像が austere となるものを分類した．次の定理から，有限位数の仮定は不要であることがわかる.

定理 3. G を compact 連結単純 Lie 群とする．G の自己同型写像 σ の誘導する Cartan 埋め込みの像が「austere」ならば，σ は有限位数である.

上の定理中の「austere」を「極小」に置き換えた主張は成り立たない．結果的に上記の定理における σ の位数は $2,3,4$ または 6 となる．Munzner(1980) は球面内の等径超曲面の異なる主曲率の個数は $1,2,3,4,6$ であることを示した．これらは深いところで関係しているのだろうか？

定理の証明. まず，σ を外部自己同型写像と仮定し，Cartan 埋め込みの像 $F(G/G_\sigma) \subset G$ が austere であるとする．内部自己同型写像 τ_a に対して，外部自己同型写像 σ' を $\sigma' = \tau_a \circ \sigma$ と定めるとき，$F(G/G_\sigma)$ は σ' 作用の a^{-1} を通る軌道と合同になる．τ を適当にとれば，σ' は対合であるか，または，$G = Spin(8)$ 上の位数 3 の外部自己同型写像になる．後者の場合は 3.1 節で austere 軌道が分類され，σ の位数は有限であった (表 1 を参照)．よって，σ' が対合の場合が問題となる．この場合は次の補題から主張が従う．

σ が内部自己同型写像の場合には，後述の命題 1 から主張が従う． □

補題 1. G を compact 連結単純 Lie 群，G 上の対合 σ は外部型とする．σ の固定部分群を $K = F(\sigma, G)$ と表す．K の Lie 環を $\mathfrak{k}$ とする．$H \in \mathfrak{k}$ に対し，σ-作用の軌道 O_H が austere 部分多様体ならば，$\tau_x \circ \sigma$ $(x = \exp 2H)$ は有限位数になる．

証明. 自然数 n に関する数学的帰納法により

$$(\tau_x \circ \sigma)^{2n-1} = \tau_{x^{2n-1}} \circ \sigma, \quad (\tau_x \circ \sigma)^{2n} = \tau_{x^{2n}} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

となることが示される．そこで主張を証明するためには，ある自然数 n が存在して，$\tau_{x^{2n}} = 1$ となることを言えばよい．

H を含む $\mathfrak{k}$ の極大部分環 $\mathfrak{a}$ をとる．$\mathfrak{k}$ の $\mathfrak{a}$ に関するルート系を Σ とする．O_H が austere 部分多様体だから，H が austere 点である ([8, Theorem 2.8])．[7, Theorem 2.18, (2) と p. 82] より，任意の $\lambda \in \Sigma$ に対し，$\langle \lambda, 2H \rangle \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$．$\mathfrak{a}$ の格子 $\Gamma(K)$ を $\Gamma(K) = \{H \in \mathfrak{a} \mid \exp H = e\}$ と定める．Σ の基本系を $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ と表す．[3, p. 317, Lemma 7.6] より

$$\Gamma_0 := \sum_{i=1}^{r} \mathbb{Z} \frac{4\pi\alpha_i}{\|\alpha_i\|^2} \subset \Gamma(K)$$

自然数 n が存在して，$4nH \in \Gamma_0$ となることが言えれば，証明が終わる．$H = \frac{\pi}{4} \sum m_i \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|^2}$ と表示すると，各 j に対し，

$$\frac{\pi}{4}\mathbb{Z} \ni \langle H, \alpha_j \rangle = \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^{r} m_i \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\|\alpha_i\|^2}$$

そこで，$n_j = \sum_{i=1}^r m_i \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\|\alpha_i\|^2}$ とおくと，$n_j \in \mathbb{Z}$ であり，

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle}{\|\alpha_1\|^2} & \cdots & \frac{\langle \alpha_r, \alpha_1 \rangle}{\|\alpha_r\|^2} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\langle \alpha_1, \alpha_r \rangle}{\|\alpha_r\|^2} & \cdots & \frac{\langle \alpha_r, \alpha_r \rangle}{\|\alpha_r\|^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix}$$

$\frac{\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}{\|\alpha_j\|^2} \in \mathbb{Q}$ だから，$m_j \in \mathbb{Q}$．そこで，$m_i = k_i/l$ $(l \in \mathbb{N}, k_i \in \mathbb{Z})$ と表示すると，$16lH = 4\pi \sum k_i \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|^2} \in \Gamma_0$． □

命題 1. G を compact 連結 Lie 群，σ を G の内部自己同型写像とする．G の σ による固定部分群を K とする．Cartan 埋め込み $\Psi_\sigma : G/K \to G$ が asustere ならば，σ は対合であり，Ψ_σ は全測地的である．

証明. [6, p. 459] で次を示した．$\mathfrak{t}$ を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ有限次元ベクトル空間とする．$A \subset \mathfrak{t}$ を有限部分集合とする．任意の $H \in \mathfrak{t}$ に対し集合 $\{\langle a, H \rangle \mid a \in A\}$ が -1 倍に関して不変であることと A が -1 倍に関して不変であるとことは同値である．よって，Ψ_σ が austere 部分多様体になるための必要十分条件は，集合 $\left\{-\frac{1}{2}\cot(\frac{1}{2}\langle \alpha, H_0 \rangle)\alpha \mid \alpha \in \Sigma^+, \langle \alpha, H_0 \rangle \notin 2\pi\mathbb{Z}\right\}$ が -1 倍で不変になることである．この条件は $\langle \alpha, H_0 \rangle \notin 2\pi\mathbb{Z}$ のとき，$\cot(\frac{1}{2}\langle \alpha, H_0 \rangle) = 0$ と同値である．さらにこれは任意の α について，$\langle \alpha, H_0 \rangle \in \pi\mathbb{Z}$ と言っても同じことである．ゆえに，σ は対合で，Φ_σ は全測地的である． □

以下は通常の参考文献に本文中での役割をメモ書きしたものである．

参考文献

[1] K. Enoyoshi, *Principal curvatures of homogeneous hypersurfaces $\tilde{G}r_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ in a Grassmann manifold by the G_2-action*, Tokyo J. Math., **42**, (2019) 571–584.

[2] O. Goertsches and G. Thorbergsson, *On the geometry of orbits of Hermann actions*, Geom. Dedicata, **129** (2007), 101–118.

Hermann 作用の軌道の幾何学を扱った初めての論文

[3] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, 1978.

Lie 環，Lie 群，対称空間について定評のある教科書.

[4] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., *Caribrated geometries*, Acta Math. **148** (1982), 47–157.

austere 部分多様体の概念 (calibration の概念)

[5] R. Hermann, *Totally geodesic orbits of groups of isometries*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 65 = Indag. Math. **24** (1962), 291–298.

Hermann 作用の概念．Hermann 作用は変分完備であることを示し，Morse 理論を対称空間へ応用した

[6] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Wealky reflective submanifolds and austere submanifolds*, J. Math. Soc. Japan **61** (2009), 437–481.

弱鏡映部分多様体の概念

[7] O. Ikawa, *The geometry of symmetric triads and orbit spaces of Hermann actions*, J. Math. Soc. Japan **63** (2011), 79–136.

対称三対の概念を定義し，分類．これを用いて可換な Hermann 作用の軌道空間と個々の軌道の性質を調べた

[8] O. Ikawa, *σ-actions and symmetric triads*, Tohoku Math. J. (2018), 547–565.

σ が対合の場合の σ 作用の軌道の幾何学．この場合にも対称三対が使える

[9] O. Ikawa, *σ-actions associated woth triality automorphism on $Spin(8)$*, Proceedings of the 24th international workshop on differerntial geometry of Hermitian symmetric spaces & Ricci flow, **24** pp. 81–89.

[10] 井川治，triality automorphism の場合の σ-作用の軌道の幾何学，部分多様体幾何とリー群作用 2022, 組織委員：小池直之，田中真紀子，馬場蔵人

[11] T. Kimura and K. Mashimo, *Classification of Cartan embeddings which are austere submanifolds*, Hokkaido Math. J. (2022), 1–23.

有限位数の自己同型から誘導される Cartan 埋め込みのうちで austere になるものの分類．勝手な自己同型は Dynkin 図形の合同変換から誘導される自己同型と内部自己同型の合成であることを用いる．実は有限位数の仮定は不要

[12] A. Kollross, *A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 571–612.

compact 既約対称空間への超極作用は，Hermann 作用か余等質性 1 作用に限ることを示した．また，compact 既約対称空間への余等質性 1 作用の分類も行った．

[13] D. S. P. Leung, *On the classification of reflective submanifolds of Riemannian symmetric spaces.* Indiana Univ. Math. J. 24 (1974/75), 327–339; *Errata: "On the classification of reflective submanifolds of Riemannian symmetric spaces"* (Indiana Univ. Math. J. 24 (1974/75), 327–339). Indiana Univ. Math. J. 24 (1975), no. 12, 1199; *Reflective submanifolds. III. Congruency of isometric reflective submanifolds and corrigenda to the classification of reflective submanifolds.* J. Differential Geometry 14 (1979), no. 2, 167–177; *Reflective submanifolds. IV. Classification of real forms of Hermitian symmetric spaces.* J. Differential Geometry 14 (1979), no. 2, 179–185.

鏡映部分多様体の定義と性質，分類

[14] K. Mashimo, *On the stability of Cartan embeddings of compact symmetric spaces*, Arch. Math. (Basel) 58 (1992), no. 5, 500–508.

[15] K. Mashimo, *Cartan embeddings of compact Riemannian* 3-*symmetric spaces*, Tokyo J. Math. **19** (1996), 353–364.

[16] 間下克哉, カルタン埋め込みの安定性について, 数理解析研究所講究録 No. 1069 (1998), 53–62.

[14]∼[16] Cartan 埋め込みに関する一連の研究．Cartan 埋め込みという言葉はもともとは対合 σ から埋め込みが構成される場合に限られていた．一般の自己同型写像から構成される埋め込みも Cartan 埋

め込みという言葉を使うようになったのはこれらの一連の論文からだと思われる.

[17] S. Ohno, T. Sakai and H. Urakawa, *Biharmonic homogeneous submanifolds in compact symmetric spaces and compact Lie groups*, Hiroshima Math. J. **49** (2019), 47–115.

可換な Hermann 作用の軌道の特別なものうち bi-harmonic 部分多様体となるための条件を重複度付き対称三対の言葉で書いた.

[18] S. Ohno, *Geometric properties of orbits of Hermann actions*, Tokyo J. Math. 46(1): 63-91 (June 2023). DOI: 10.3836/tjm/1502179367

非可換 Hermann 作用の軌道空間と個々の軌道の性質

[19] L. Verhôczi, *Special cohomogeneity one isometric actions on irreducible symmetric spaces of type I and II*, Beit. Alg. Geom. **44** (2003), 57–74.

[20] I. Yokota, *Exceptional Lie groups*, [Math.DG]