

# 全複素部分多様体と $R$ 空間

大和大学 / 大阪公立大学数学研究所 橋本 要

Kaname Hashimoto

Yamato University / OCAMI

## 概 要

全複素部分多様体は四元数ケーラー多様体の部分多様体であり, 極小部分多様体の特殊クラスを成す. 複素射影空間の全複素部分多様体は塚田和美氏によって表現論的手法によって分類がおこなわれている. 本稿では四元数対称空間との対応を考えることによりこの幾何学的な別証明, 関連する幾何学的特徴・性質について紹介する. 内容は趙宗澤 (Jong Taek Cho) 氏 (全南大学), 大仁田義裕氏 (早稲田大学/OCAMI) との共同研究に基づく.

## 1 背景

四元数ケーラー多様体  $(M, g, Q)$  ([7]) に対してはめ込み  $\varphi: N \rightarrow M$  が, 各近傍  $U_\lambda$  上で四元数ケーラー構造  $\varphi^{-1}Q$  の  $C^\infty$  断面  $J^\lambda$  が存在して,

- (1)  $J^\lambda \circ J^\lambda = -\text{Id}_{T_p M}$ ,
- (2)  $J^\lambda((d\varphi)_p(T_p N)) = (d\varphi)_p(T_p N)$ ,
- (3)  $\tilde{\nabla}_X J^\lambda = 0$  ( $\forall X \in T_p N, \forall p \in U_\lambda$ ),

なる開被覆  $N = \bigcup_\lambda U_\lambda$  をもつとき, 全複素はめ込みとよばれる ([6], [11]). このとき,  $N$  を全複素部分多様体 という.

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}Q & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & (Q, \nabla^Q) \subset \text{End}(TM) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_\lambda \subset N & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array}$$

四元数射影空間  $\mathbb{H}P^n$  は四元数ケーラー構造をもつリーマン対称空間であり, さらに  $\mathbb{H}P^n$  のツイスター空間は複素射影空間  $\mathbb{C}P^{2n+1}$  であり, 正則接触構造をもつことが知られている.

全複素部分多様体  $N$  の四元数ケーラー構造  $\varphi^{-1}Q$  には, 各  $p \in U_\lambda \subset N$  に対して

$$I^\lambda((d\varphi)_p(T_p N)) \perp (d\varphi)_p(T_p N), \quad K^\lambda((d\varphi)_p(T_p N)) \perp (d\varphi)_p(T_p N)$$

を満たす局所標準基底  $\{I^\lambda, J^\lambda, K^\lambda\}$  が存在する. このことから,  $N$  は偶数次元であることがわかる.

$$\dim N = 2\ell \quad (1 \leq \ell \leq n).$$

特に,  $\ell = n$  のとき,  $N$  を最大次元の全複素部分多様体という.

四元数射影空間  $\mathbb{H}P^n$  の第2基本形式が平行である最大次元の全複素部分多様体は塚田和美氏 [11] によって分類されている.

**定理 1.1** (Tsukada [11], 1985). 四元数射影空間  $\mathbb{H}P^n$  の第2基本形式が平行な全複素部分多様体  $\tilde{N}$  は次のいずれかと (局所的に) 合同である:

- (0)  $\mathbb{C}P^1 \longrightarrow \mathbb{R}P^2 \subset S^4 = \mathbb{H}P^1$  Veronese min surf.
- (1)  $\mathbb{C}P^n \subset \mathbb{H}P^n$  totally geodesic
- (2)  $Sp(3)/U(3) \longrightarrow \mathbb{H}P^6$
- (3)  $SU(6)/S(U(3) \times U(3)) \longrightarrow \mathbb{H}P^9$
- (4)  $SO(12)/U(6) \longrightarrow \mathbb{H}P^{15}$
- (5)  $E_7/((U(1) \times E_6)/\mathbb{Z}_3) \longrightarrow \mathbb{H}P^{27}$
- (6)  $\mathbb{C}P^1(\tilde{c}) \times \mathbb{C}P^1(\tilde{c}/2) \longrightarrow \mathbb{H}P^2$
- (7)  $\mathbb{C}P^1(\tilde{c}) \times \mathbb{C}P^1(\tilde{c}) \times \mathbb{C}P^1(\tilde{c}) \longrightarrow \mathbb{H}P^3$
- (8)  $\mathbb{C}P^1(\tilde{c}) \times \frac{SO(n+1)}{SO(2) \times SO(n-1)} \longrightarrow \mathbb{H}P^n \quad (n \geq 4)$

## 2 全複素部分多様体と四元数対称空間

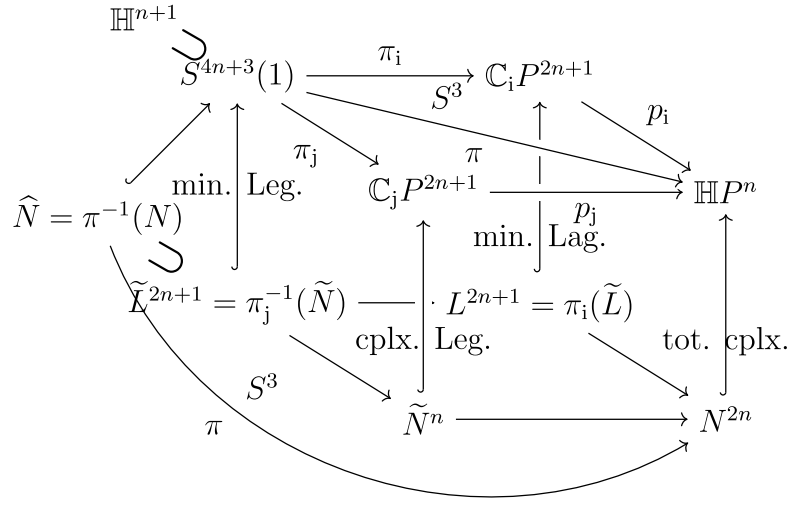
全複素部分多様体はツイスター空間 (リフト) による特徴づけが知られており ([1]), 全複素部分多様体  $N^{2n} \subset \mathbb{H}P^n$  から  $\mathbb{C}P^{2n+1}$  へのリフトは  $\mathbb{C}P^{2n+1}$  のルジャンドル部分多様体となる. 逆に  $\mathbb{C}P^{2n+1}$  のルジャンドル部分多様体の射影は  $\mathbb{H}P^n$  の全複素部分多様体である.

四元数体  $\mathbb{H} = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$  上の  $n$  次元四元数射影空間  $\mathbb{H}P^n$  は,  $\mathbb{H}^{n+1}$  から自然に誘導された四元数ケーラー幾何構造と Hopf ファイブレーション  $\pi: S^{4n+3}(1) \longrightarrow \mathbb{H}P^n$  をもつ. したがって  $i$  を虚数単位とする複素数体  $\mathbb{C}_i = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}i$  上の  $2n+1$  次元複素射影空間  $\mathbb{C}_iP^{2n+1}$ , また,  $j$  を虚数単位とする複素数体  $\mathbb{C}_j = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}j$  上の  $2n+1$  次元複素射影空間  $\mathbb{C}_jP^{2n+1}$  は, それぞれ,  $\mathbb{H}P^n$  のツイスター空間の役割をする.

$$S^{4n+3}(1) \longrightarrow \mathbb{C}_iP^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{H}P^n, \quad S^{4n+3}(1) \longrightarrow \mathbb{C}_jP^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{H}P^n.$$

この2つのファイブレーションと関連する部分多様体に関して次の図式として表

わすことができる.



複素射影空間  $\mathbb{C}_j P^{2n+1}$  は複素正則接触構造をもち,  $\tilde{N} \rightarrow \mathbb{C}_j P^{2n+1}$  を水平な正則はめ込みとすると, 複素構造  $I$  に関して  $\tilde{L} = \pi_j^{-1}(\tilde{N}) \rightarrow S^{4n+3}$  は極小ルジャンドルはめ込みとなる. 水平な正則写像  $\tilde{N} \rightarrow \mathbb{C}_j P^{2n+1}$  は最大次元の全複素はめ込み  $\tilde{N} \rightarrow \mathbb{H} P^n$  に対応している.

さらに,  $\tilde{L} \rightarrow \mathbb{C}_i P^{2n+1}$  は複素構造  $J$  に関して極小ラグランジュはめ込みである. 四元数射影空間  $\mathbb{H} P^n$  の全複素部分多様体は全て  $\mathbb{C} P^{2n+1}$  のコンパクトで等質な複素ルジャンドル部分多様体から得られる.

- (1)  $\mathbb{C} P^n \subset \mathbb{C} P^{2n+1}$
- (2)  $Sp(3)/U(3) \rightarrow \mathbb{C} P^{13}$
- (3)  $SU(6)/S(U(3) \times U(3)) \rightarrow \mathbb{C} P^{19}$
- (4)  $SO(12)/U(6) \rightarrow \mathbb{C} P^{31}$
- (5)  $E_7/(U(1) \times E_6)/\mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{C} P^{55}$
- (6)  $\mathbb{C} P^1(\tilde{c}) \times \mathbb{C} P^1(\tilde{c}/2) \rightarrow \mathbb{C} P^5$
- (7)  $\mathbb{C} P^1(\tilde{c}) \times \mathbb{C} P^1(\tilde{c}) \times \mathbb{C} P^1(\tilde{c}) \rightarrow \mathbb{C} P^7$
- (8)  $\mathbb{C} P^1(\tilde{c}) \times \frac{SO(n+1)}{SO(2) \times SO(n-1)} = \mathbb{C} P^1(\tilde{c}) \times Q_{n-1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} P^{2n+1} \quad (n \geq 4)$

リッチ曲率が零でない四元数ケーラー多様体で対称空間になるものは J.A.Wolf [12] によって分類されており, コンパクト型は次のようナリストになる.

| $G$       | $K$                                    | $\dim M = G/K$ |
|-----------|----------------------------------------|----------------|
| $Sp(n+1)$ | $Sp(n) \times Sp(1)$                   | $4n$           |
| $SU(n+3)$ | $S(U((n+1) \times U(2)))$              | $4n$           |
| $SO(n+5)$ | $SO(n+1) \times SO(4)$                 | $4n$           |
| $G_2$     | $(Sp(1) \times Sp(1))/\mathbb{Z}_2$    | $8$            |
| $F_4$     | $(Sp(3) \times Sp(1))/\mathbb{Z}_2$    | $28$           |
| $E_6$     | $(SU(6) \times SU(2))/\mathbb{Z}_2$    | $40$           |
| $E_7$     | $(Spin(12) \times SU(2))/\mathbb{Z}_2$ | $64$           |
| $E_8$     | $(E_7 \times SU(2))/\mathbb{Z}_2$      | $112$          |

### 3 主結果

四元数対称空間との対応を考えることによって、四元数射影空間の全複素部分多様体の幾何学的な構成・特徴を考察した。

Hopf ファイブレーション  $\pi : S^{4n+3}(1) \subset \mathbb{H}P^n$  のもとでの全複素部分多様体  $N$  の逆像  $\hat{N}$  を

$$\hat{N}^{2\ell+3} = \pi^{-1}(N^{2\ell}) = \{(p, \mathbf{x}) \in N \times S^{4n+3}(1) \mid \varphi(p) = \pi(\mathbf{x})\}$$

とすると、 $S^{4n+3}(1)$  の  $2\ell + 3$  次元極小部分多様体である。

$$\begin{array}{ccc} \hat{N}^{2\ell+3} = \pi^{-1}(N) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \pi^{-1}(U_\lambda) & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & S^{4n+3}(1) \subset \mathbb{H}^{n+1} \\ \pi \downarrow Sp(1) & & \pi \downarrow Sp(1) \\ N^{2\ell} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{H}P^n \end{array}$$

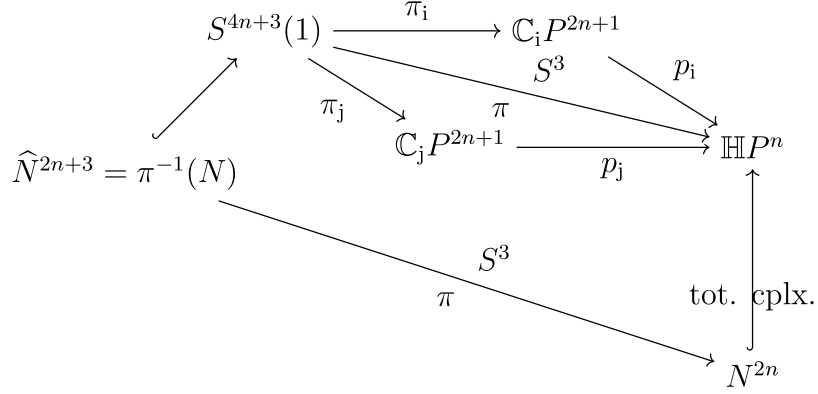
このとき、 $\mathbb{H}P^n$  の最大次元の全複素部分多様体  $N$  ( $\ell = n$ ) の逆像  $\hat{N} = \pi^{-1}(N)$  に新しい接続が考えられる。

**主定理 1** ([5]).  $\ell = n$  とする. このとき、接束  $T\hat{N}$  に標準接続  $\nabla^c = \nabla^{\hat{N}} - D$  ( $\nabla^c D = 0$  を満たしレビ・チビタ接続  $\nabla^{\hat{N}}$  と異なる計量的接続) が存在して、

$$\begin{aligned} (\nabla_X^c \alpha^{\hat{N}})(Y, Z) &:= (\nabla_{\mathcal{H}X}^c \alpha^{\hat{N}})(\mathcal{H}Y, \mathcal{H}Z) \\ &= ((\nabla_{\pi_* X}^* \alpha^N)(\pi_* Y, \pi_* Z))^\sim \\ &\quad (\forall X, Y, Z \in T\hat{N}) \end{aligned}$$

特に、 $\nabla^c$  に関する  $\hat{N}$  の第2基本形式  $\alpha^{\hat{N}}$  の平行性と全複素部分多様体  $N$  の第2基本形式  $\alpha^N$  の (レビ・チビタ接続に関する通常の意味の) 平行性  $\nabla^* \alpha^N = 0$  が同値になる。

$$\nabla^c \alpha^{\hat{N}} = 0 \iff \nabla^* \alpha^N = 0.$$



ここで、標準接続とは次のような接続のことである。

**定義 3.1.**  $(M, g)$  をリーマン多様体とし、 $M$  のレビ・チビタ接続を  $\nabla$  で表わす。  $M$  上の線形接続  $\nabla^c$  が次の (1), (2) を満たすとき  $\nabla^c$  を標準接続 (canonical connection) とよぶ。

$$(1) \nabla^c g = 0,$$

$$(2) \nabla^c D = 0, \text{ ここで } D = \nabla - \nabla^c.$$

**注意 3.2.** リーマン多様体のレビ・チビタ接続は標準接続になる。

また、 $\hat{N}$  上の標準接続  $\nabla^c$  に関して次が分かる。

**補題 3.3** ([5]).  $\nabla^c = \nabla^{\hat{N}} - D$  は次をみたす。

$$\nabla^c g_{\hat{N}} = 0 \quad \text{and} \quad \nabla^c D = 0.$$

したがって、 $\nabla^c$  は  $T\hat{N}$  上のレビ・チビタとは異なる標準接続である。

このことから、 $\hat{N}$  はレビ・チビタ接続では第2基本形式の平行性は言えないが、標準接続に関しては平行性が成り立つ。

そこで、 $R$  空間を微分幾何学的に特徴付ける Olmos-Sánchez の定理 ([10]) を適用し、我々が構成した標準接続  $\nabla^c$  を用いて  $\hat{N}$  の  $Sp(n+1) \times Sp(1)$  対称性を考察することによって、次が得られる：

**主定理 2** ([5]). 四元数射影空間  $\mathbb{H}P^n$  内の第2基本形式が平行な  $2n$  次元全複素部分多様体を  $N$  とする。このとき、この全複素部分多様体の逆像  $\hat{N} = \pi^{-1}(N) \subset S^{4n+3}$  は四元数対称空間から得られる標準的に埋め込まれた  $R$  空間になる。

**注意 3.4.**  $\hat{N} = \pi^{-1}(N) \subset S^{4n+3}$  は四元数対称空間の特異軌道である。

四元数対称空間と全複素部分多様体の対応は次のリストになる.

|                    | totally cplx. imm. $\tilde{N}$                                                             | q. symm. sp. $G/K$                                      | $\Pi(G, K)$ |
|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-------------|
| $\mathbb{H}P^1$    | $\mathbb{C}P^1$                                                                            | $\frac{G_2}{(Sp(1) \times Sp(1))/\mathbb{Z}_2}$         | $G_2$       |
| $\mathbb{H}P^n$    | $\mathbb{C}P^n$ (totally geodesic)                                                         | $\frac{SU(n+3)}{S(U(2) \times U(n+1))}$                 | $B_2$       |
| $\mathbb{H}P^6$    | $\frac{Sp(3)}{U(3)}$                                                                       | $\frac{F_4}{(Sp(3) \times Sp(1))/\mathbb{Z}_2}$         | $F_4$       |
| $\mathbb{H}P^9$    | $\frac{SU(6)}{S(U(3) \times U(3))}$                                                        | $\frac{E_6}{(SU(6) \times Sp(1))/\mathbb{Z}_2}$         | $F_4$       |
| $\mathbb{H}P^{15}$ | $\frac{SO(12)}{U(6)}$                                                                      | $\frac{E_7}{(Spin(12) \times SU(2))/\mathbb{Z}_2}$      | $F_4$       |
| $\mathbb{H}P^{27}$ | $\frac{E_7}{(U(1) \times E_6)/\mathbb{Z}_3}$                                               | $\frac{E_8}{(E_7 \times SU(2))/\mathbb{Z}_2}$           | $F_4$       |
| $\mathbb{H}P^2$    | $\mathbb{C}P^1(\tilde{c}) \times \mathbb{C}P^1(\tilde{c}/2)$                               | $\frac{SO(7)}{SO(4) \times SO(3)} \quad (n=2)$          | $B_3$       |
| $\mathbb{H}P^3$    | $\mathbb{C}P^1(\tilde{c}) \times \mathbb{C}P^1(\tilde{c}) \times \mathbb{C}P^1(\tilde{c})$ | $\frac{SO(8)}{SO(4) \times SO(4)} \quad (n=3)$          | $D_4$       |
| $\mathbb{H}P^n$    | $\mathbb{C}P^1(\tilde{c}) \times \frac{SO(n+1)}{SO(2) \times SO(n-1)}$                     | $\frac{SO(n+5)}{SO(4) \times SO(n+1)} \quad (n \geq 4)$ | $B_4$       |

$\Pi(G, K)$  denotes the Dynkin diagram of the restricted root systems of symmetric pair  $(G, K)$ .

また, Olmos-Sánchez の定理は次であり,

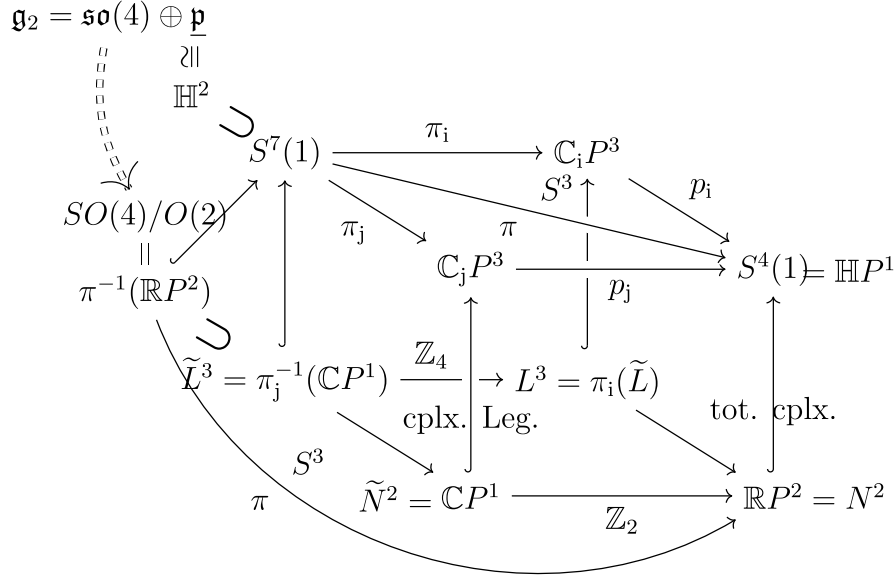
**定理 3.5** (Olmos-Sánchez [10]).  $X$  を  $\mathbb{R}^k$  の連結コンパクトなリーマン部分多様体とし,  $X$  上の第 2 基本形式を  $\alpha$  とする. このとき次は同値になる:

- (1)  $X$  は  $\nabla^c \alpha^X = 0$  をみたす  $TX$  上の標準接続  $\nabla^c$  を持つ.
- (2)  $X$  は主曲率一定な等質部分多様体.
- (3)  $X$  は  $R$  空間の標準埋め込みである.

このことから,  $X = \hat{N}$  とすると,  $\hat{N}$  が  $R$  空間であることがわかる. さらに, 四元数対称空間それぞれに関するルート系の計算によって対応する  $R$  空間を完全に決定することができる.

## 4 R. Chiang ラグランジュ部分多様体

特に  $n = 1$  の場合, すなわち, 四元数対称空間  $G_2/((Sp(1) \times Sp(1))/\mathbb{Z}_2)$  に対応する場合を考える.



これは,  $\pi : S^7(1) \rightarrow \mathbb{H}P^1 \cong S^4(1)$  を考え,  $\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^2 \subset S^4 = \mathbb{H}P^1$  に対応しており, Veronese 極小曲面が現れる. この場合,  $\tilde{N} = \pi^{-1}(\mathbb{R}P^2) \cong SO(4)/O(2)$  である. また,  $\tilde{L}^3$  は  $S^7(1)$  の極小ルジャンドル部分多様体となり,  $\tilde{L}^3 \cong SU(2)/\mathbb{Z}_3 \cong S^3/\mathbb{Z}_3$  となるレンズ空間である. このとき, 対応する  $L^3 = \pi_i(\pi_j^{-1}(\tilde{N}))$  は  $\mathbb{C}P^3$  のラグランジュ部分多様体 ([4], [3]) である. R. Chiang [3] は複素射影空間上のハミルトン作用の軌道として  $\mathbb{C}P^3$  内のラグランジュ部分多様体を再発見した. R. Chiang ラグランジュ部分多様体  $L^3 \subset \mathbb{C}P^3$  は次で定義される.

$$L^3 := \left\{ [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{C}P^3 \mid \begin{aligned} &3|z_0|^2 + |z_1|^2 - |z_2|^2 - 3|z_3|^2 = 0 \\ &z_0\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 = 0 \end{aligned} \right\}$$

この Chiang ラグランジュ部分多様体は  $SU(2)$  軌道として得られる第 2 基本形式が平行でない強ハミルトン安定な閉極小ラグランジュ部分多様体であり ([2], [8]), 等質空間であるが対称空間ではない, などという興味深い特徴を数多くもっている. この Chiang ラグランジュ部分多様体の高次元版と全複素部分多様体の対応を考察していると捉えることもできる.

## 参考文献

- [1] D. V. Alekseevsky, and S. Marchiafava, *A twistor construction of Kähler submanifolds of a quaternionic Kähler manifold*. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 184 (2005), no. 1, 53 – 74.

- [2] L. Bedulli and A. Gori, *A Hamiltonian stable minimal Lagrangian submanifold of projective space with nonparallel second fundamental form*. Transform. Groups 12 (2007), no. 4, 611–617.
- [3] R. Chiang, *New Lagrangian submanifolds of  $\mathbb{C}P^n$* . Int. Math. Res. Not. **45** (2004), 2437–2441.
- [4] B. Y. Chen, F. Dillen, L. Verstraelen, and L. Vrancken, *An exotic totally real minimal immersions of  $S^3$  in  $\mathbb{C}P^3$  and its characterization*, Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A, Math. **126** (1996), 153–165.
- [5] J.-T. Cho, K. Hashimoto and Y. Ohnita, *Totally complex submanifolds and R-spaces*. in preparation.
- [6] S. Funabashi, *Totally complex submanifolds of a quaternionic Kaehlerian manifold*, Kodai Math. J. **2** (1979), 314–336.
- [7] S. Ishihara, *Quaternion Kählerian manifolds*, J. Differential Geom. **9** (1974), 483–500.
- [8] Y. Ohnita, *Stability and rigidity of special Lagrangian cones over certain minimal Legendrian orbits*, Osaka J. Math. **44** no. 2 (2007), 305–334.
- [9] Y. Ohnita, *Parallel Kähler submanifolds and R-spaces*, to appear in Contemporary Mathematics, Differential Geometry and Global Analysis. In Honor of Tadashi Nagano.
- [10] C. Olmos and C. Sánchez, *A geometric characterization of the orbits of s-representations*. J. reine angew. Math. **420** (1991), 195–202.
- [11] K. Tsukada, *Parallel submanifolds in a quaternion projective space*. Osaka J. Math. **22** (1985), 187–241.
- [12] J. A. Wolf *Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces*. J. Math. Mech. **14** (1965) 1033–1047.