A class of mappings between statistical manifolds

北海道大学・大学院理学研究院数学部門　古畑 仁
Hitoshi Furuhata
Department of Mathematics, Hokkaido University

研究会で行った表題の講演では [2] および [3] の内容から選んで解説したが，本稿では上野龍（北海道大学大学院理学院）との共同研究 [3] の一部に絞って，統計 2 重調和写像 (statistical biharmonic map) について紹介したい．

Riemann 多様体は，Levi-Civita 接続とよばれる標準的な接続をもち，これに関して測地線という概念が定義された．また，Laplace 作用素をもち，これに関して調和関数という概念が定義された．これらは Riemann 多様体を調べる際の基本的な道具と言ってよいだろう．これらはそれぞれ，標準的な 1 次元 Riemann 多様体「からの」あるいは「への」調和写像としてとらえることができる．Riemann 多様体間の写像について，エネルギーとよばれる汎関数が定義され，調和写像はその臨界点として変分法的に定式化された．その Euler-Lagrange 方程式は 2 階偏微分方程式系となり，解析学の対象としてもよく研究された．

Riemann 多様体間の 2 重調和写像は，調和写像を含む概念として提唱され，多くの研究がおこなわれてきた ([5] などを参照せよ)．本来，よい調和写像が存在しない状況でその代役になりうるものとして定義されたはずである．やはり変分問題の解として定式化され，こちらは 4 階偏微分方程式系に支配されている．定義から調和写像ならば 2 重調和写像であるが，ある種の条件の下で逆がなりたつという現象が多くとらえられている．

さて，多様体上の統計構造とは，Riemann 計量とアファイン接続の組で然るべき条件をみたしているものをさした．もちろん，Riemann 計量と Levi-Civita 接続の組は統計構造になる (Riemann 的な統計構造とよぶ，自明な統計構造とよばれることもある)．統

Email: furuhata@math.sci.hokudai.ac.jp
November 28, 2023

計構造を備えた多様体のことを統計多様体とよび，これを舞台として幾何学を展開したいと思う．ここでは対象を測る複数の基準 (「計量」と「接続＝平行性」を想定せよ) がずれているかもしれないので，Euclid 幾何学や Riemann 多様体の幾何学で体験しているような鮮やかさは期待できないだろう (しかしながら，現実問題には，ある観点だけに都合のよい基準を導入したくなることもあるのではないかしら)．基準が完全に統一が取れている場合は Riemann 幾何学を復元しなければならないことに注意しつつ，この複眼的な世界で何が新しく見えてくるのかを表現するのが，統計多様体の幾何学である．

統計多様体間の写像としてよいクラスを定式化するにはどうすればよいだろうか．とくに，前述の調和写像に対応するクラスが定式化できないだろうか．Riemann 多様体 $(M, g), (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ 間の写像 u に対するエネルギーは，

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_M |du|^2 d\mu_g$$

で与えられる．u の滑らかさや M のコンパクト性など積分の意味がつくための適切な仮定が必要だが，本稿ではその議論は省略させていただく．微分写像 du の各点での大きさを計るために Riemann 計量 g と $\widetilde{g}$ を使っていることに注意する．この基本的でかつ有用な汎関数の統計多様体版を構成することは難しい．実際，汎関数をいったん忘れて，その Euler-Lagrange 方程式の統計多様体版を構成する試みがいくつかなされている．しかしながら，調和写像を念頭においた**変分問題でとらえられる統計多様体間の写像はどんなものか**を，やはり知りたいと思うのである．前述のように，Riemann 多様体間の写像に対しては調和写像を含むクラスで変分法的に特徴づけられるものとして，2 重調和写像の概念が用意されていた．そこで，このクラスを統計多様体間の写像に対して拡張することが，統計多様体間の写像に対する変分問題の中でもっとも自然であるという発想で，本研究は行われている．

★

統計多様体の基礎概念については現在多くの文献があるので詳細はそちらに譲る (日本語で読みたければ [1] なども参照していただきたい)．ここでは，統計 2 重調和写像の定義に必要な部分だけを簡単に準備しておこう．

(M, ∇, g) を統計多様体とする．∇^g を g の Levi-Civita 接続とし，$K = K^{(\nabla, g)} = \nabla - \nabla^g \in \Gamma(TM^{(1,2)})$ とおく．$\nabla^* = \nabla^g - K$ は ∇ の g に関する双対接続である．∇ の曲率テンソル場を $R^\nabla \in \Gamma(TM^{(1,3)})$ とかくとき，$L = L^{(\nabla, g)} \in \Gamma(TM^{(1,3)})$ をつぎで

定める：

$$g(L(Z,W)X,Y) = g(R^{\nabla}(X,Y)Z,W), \quad X,Y,Z,W \in \Gamma(TM).$$

前述のように $\nabla = \nabla^g$ のとき，統計構造 (∇, g) は Riemann 的とよばれる．このとき $R^{\nabla} = L$ がなりたつことはよく知られているだろう．統計構造が Riemann 的であることと $\nabla = \nabla^*$ がなりたつことは同値である．この条件を拡張させて，$R^{\nabla} = R^{\nabla^*}$ がなりたつとき統計構造は共役対称とよばれる．このときも $R^{\nabla} = L$ がなりたつ．

$(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g})$ を同じく統計多様体とし，同様に定めたものにティルダをつけて表すことにし，いちいち断らない．また，滑らかな写像 $u: M \to \widetilde{M}$ に対して，M 上のベクトル束 $u^{-1}T\widetilde{M}$ に $\widetilde{\nabla}$ から自然に誘導された接続を (誤解の恐れのないときは) 同じ記号 $\widetilde{\nabla}$ であらわす．

定義．統計多様体 (M, ∇, g)，$(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g})$ 間の滑らかな写像 $u: M \to \widetilde{M}$ に対して，

$$\tau(u) = \mathrm{tr}_g\{(X,Y) \mapsto \widetilde{\nabla}_X u_* Y - u_* \nabla_X Y\} \in \Gamma(u^{-1}T\widetilde{M})$$

とし，

$$E_2(u) = \frac{1}{2}\int_M |\tau(u)|^2 d\mu_g$$

と定める．

$(\nabla, g), (\widetilde{\nabla}, \widetilde{g})$ が Riemann 的のとき，$\tau(u)$ は u のテンション場とよばれ，$u: (M,g) \to (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ が調和写像であることと $\tau(u) = 0$ は同値である．さらに，$E_2(u)$ は u の 2 重エネルギーとよばれ，この変分問題の臨界点が 2 重調和写像としてとらえられていた．一般に統計多様体間の写像の場合，τ の定義には $\widetilde{g}$ が用いられていない．しかし，$E_2(u)$ の定義には，$\tau(u)$ の各点の大きさを $\widetilde{g}$ で計っているので，始域と終域の統計構造をすべて使用していることに注意する．この汎関数が我々がまず考察すべき対象である．

定義．統計多様体 (M, ∇, g)，$(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g})$ 間の滑らかな写像 $u: M \to \widetilde{M}$ に対して，

$$\begin{aligned}\tau_2(u) = {} & \underline{\Delta}^* \tau(u) + \mathrm{div}^g(\mathrm{tr}_g K)\tau(u) \\ & - \sum_{i=1}^m \widetilde{L}(u_* e_i, \tau(u)) u_* e_i - \widetilde{K}(\tau(u), \tau(u)) \quad \in \Gamma(u^{-1}T\widetilde{M})\end{aligned} \tag{1}$$

と定める．ここで，

$$\underline{\Delta}^* \xi = \mathrm{tr}_g\{(X,Y) \mapsto \widetilde{\nabla}^*_X \widetilde{\nabla}^*_Y \xi - \widetilde{\nabla}^*_{\nabla^*{}_X Y}\xi\}, \quad \xi \in \Gamma(u^{-1}T\widetilde{M}),$$

であり，$\{e_1, \ldots, e_m\}$ は g に関する正規直交枠とする．

このとき，つぎがなりたつ．

定理．統計多様体 (M, ∇, g)，$(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g})$ 間の滑らかな写像 $u : M \to \widetilde{M}$ および変分ベクトル場 $V \in \Gamma(u^{-1}T\widetilde{M})$ をもつ変形 $u_t : M \to \widetilde{M}$ に対して，汎関数 E_2 の第 1 変分はつぎで与えられる：

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E_2(u_t) = \int_M \widetilde{g}(V,\, \tau_2(u)) d\mu_g.$$

定義．統計多様体 (M, ∇, g)，$(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g})$ 間の滑らかな写像 $u : M \to \widetilde{M}$ が**統計 2 重調和写像**であるとは，u が方程式

$$\tau_2(u) = 0 \tag{2}$$

をみたすことをいう．

統計多様体 (M, ∇, g)，$(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g})$ がともに Riemann 的であるとき，(2) は

$$\underline{\Delta}\tau(u) - \sum_{i=1}^{m} \widetilde{R}(u_* e_i, \tau(u)) u_* e_i = 0$$

となり，古典的な結果 (Jiang Guoying の論文，[5] 参照) ともちろん一致する．ちなみに，$\widetilde{R}$ は $R^{\widetilde{\nabla}} = R^{\nabla^{\widetilde{g}}}$ のことである．

つぎに，$\widetilde{M}$ 内の曲線について考えてみよう．区間 $I \subset \mathbb{R}$ の Euclid 計量を g_0 とかくこととし，$(M, \nabla, g) = (I, \nabla^{g_0}, g_0)$ とする．曲線 $c : I \to \widetilde{M}$ に対して，$\dot{c}(t) = c_*(d/dt)$ とかくと，(2) は

$$\widetilde{\nabla}^*_{\dot{c}} \widetilde{\nabla}^*_{\dot{c}} \widetilde{\nabla}_{\dot{c}} \dot{c} - \widetilde{L}(\dot{c}, \widetilde{\nabla}_{\dot{c}} \dot{c}) \dot{c} - \widetilde{K}(\widetilde{\nabla}_{\dot{c}} \dot{c}, \widetilde{\nabla}_{\dot{c}} \dot{c}) = 0$$

で与えられる．とくに，$\widetilde{\nabla}$ に関する測地線はこの方程式をみたす．

また, $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g}) = (\mathbb{R}, \nabla^{g_0}, g_0)$ と考えると, 統計多様体 (M, ∇, g) 上の関数 $f : M \to \mathbb{R}$ について，(2) はつぎのようになる：

$$\Delta^* \Delta f + \mathrm{div}^g(\mathrm{tr}_g K) \Delta f = 0.$$

$\underline{\Delta}$ を通常のように Δ とかいたが,

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \mathrm{tr}_g\{(X, Y) \mapsto X(Yf) - (\nabla_X Y) f\} = \mathrm{div}^{\nabla^*}(\mathrm{grad}_g f), \\
\Delta^* f &= \mathrm{tr}_g\{(X, Y) \mapsto X(Yf) - (\nabla^*_X Y) f\} = \mathrm{div}^{\nabla}(\mathrm{grad}_g f)
\end{aligned}$$

であることに注意する．ここでは，1 次元統計多様体として Euclid 的な区間を考えたが, ほかの 1 次元統計多様体も考察する価値があると思われる．

★　★

なじみの研究対象で統計 2 重調和写像となっているものはないだろうか．本稿の後半ではそれについて解説したい．そのために等積アファイン幾何学の超曲面論を復習する．詳細は [4] などを参照してほしい．

D を $\mathbb{R}^{m+1}$ の標準的な平坦アファイン接続とし，det を $\mathbb{R}^{m+1}$ の標準的な体積要素とする．det は D について平行でその標準的なアファイン座標を用いて行列式で与えられることが記号の由来である．このとき，$(\mathbb{R}^{m+1}, D, \det)$ を標準的な等積アファイン空間とよぶ．群 $SL(m+1, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^{m+1}$ が $\mathbb{R}^{m+1}$ に等積アファイン構造 $(D, \det)$ を保存する作用をしていると考える．この変換で移るものを同一視する幾何学を等積アファイン幾何学という．この幾何学における超曲面論を展開するための Blaschke のアイディアは，$(D, \det)$ を用いて，局所強凸超曲面 $f : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ に対して局所理論的に標準的な法ベクトル場を構成することにある．すなわち，この f に対して，以下をみたす $\xi \in \Gamma(f^{-1}T\mathbb{R}^{m+1})$ が存在し，一意的に定まることが基本となる．

(A) 各点 $x \in M$ において，分解 $T_{f(x)}\mathbb{R}^{m+1} = (df)_x T_x M \oplus \mathbb{R}\xi_x$ がなりたつ．

(B) この分解に従って ∇, h, S, τ を

$$\begin{aligned} D_X f_* Y &= f_* \nabla_X Y + h(X,Y)\xi, \\ D_X \xi &= -f_* SX + \tau(X)\xi, \qquad X, Y \in \Gamma(TM), \end{aligned}$$

で定めるとき，つぎがなりたつ：

(i) $\tau = 0$ であり，h は M 上の Riemann 計量になる．

(ii) 任意の $X_1, \ldots, X_m \in \Gamma(TM)$ に対して，

$$d\mu_h(X_1, \ldots, X_m) = \det(f_* X_1, \ldots, f_* X_m, \xi)$$

がなりたつ．ここで，$d\mu_h$ は Riemann 計量 h から定まる体積要素をあらわす．

局所強凸超曲面 f に対して，ξ が定まるので，∇, h, S は f の不変量として定まる．この h は f の Blaschke 計量，S は f のアファイン型作用素などとよばれる．

$S = 0$ となる f は非固有アファイン超球面とよばれる．Euclid 微分幾何学の発想では，超平面の対応物と理解できるので豊かなクラスであることを想像しにくいが，Monge-Ampere 方程式と直結していて重要な研究対象となっている．楕円型放物面はその例である．また，$h = \operatorname{Im} F_{zz} dz d\bar{z}$ が Riemann 計量を定めるような $\mathbb{C}$ の領域 M 上の

正則関数 $F: M \to \mathbb{C}$ が与えられたとき，

$$f: M \ni z \mapsto \begin{bmatrix} \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Re} F_z(z) \\ \operatorname{Im} F(z) - \operatorname{Im} z \operatorname{Re} F_z(z) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

は非固有アファイン球面である．

また，より広く $\operatorname{tr} S = 0$ となる f はアファイン極小超曲面とよばれる．(蛇足ながら，[4] では，f から ξ を定めず，f と ξ の組を考え，それをアファインはめ込みとよんでいる場面があるので，若干注意が必要である．)

Codazzi 方程式から (∇, h) が M の統計構造になることが分かるので，これを f から等積アファイン的に誘導される統計構造とよぶ．このとき，$\operatorname{tr}_h K = 0$ がなりたつ ($K = \nabla - \nabla^h$)．等積アファイン幾何学では，この性質を無極性 (apolarity) とよび，重要視してきた．

つぎの定理は，この非固有アファイン超球面が統計 2 重調和写像の例とみなせることを主張している．

定理．$f: M \to \mathbb{R}^{m+1}$ を局所強凸超曲面とする．標準的な等積アファイン空間 $(\mathbb{R}^{m+1}, D, \det)$ へのはめ込みと考え，M に等積アファイン的に誘導される統計構造を (∇, h)，アファイン型作用素を S とする．g_0 を D を Levi-Civita 接続とする $\mathbb{R}^{m+1}$ の Euclid 計量とし，あらためて f を統計多様体 (M, ∇, h) から統計多様体 $(\mathbb{R}^{m+1}, D, g_0)$ への写像と考える．このとき，f が統計 2 重調和写像であることの必要十分条件は，$\operatorname{tr} S = 0$ かつ $\operatorname{tr}_h \nabla S = 0$ がなりたつことである．とくに，非固有アファイン超球面を与える写像は統計 2 重調和写像である．また，このようにして構成される統計 2 重調和写像は，τ が消えないで τ_2 が消えることがわかる．

★ ★ ★

統計多様体間の写像の変分問題由来のクラスとして，統計 2 重調和写像の概念が定まった．一つの方向として，通常の Riemann 多様体間の 2 重調和写像あるいは調和写像の諸結果をこのクラスに拡張，移植するという研究が可能であろう．前にも述べたが，統計多様体間の写像を扱うときには，一見自明に見える，1 次元統計多様体，統計多様体の積やねじれ積，恒等写像についても慎重な考察が必要と思われる．

∇ が平坦な統計多様体 (M, ∇, g) は Hesse 多様体あるいは双対平坦空間とよばれ，研究の歴史がある．一方，∇ が平坦ではない統計多様体についてはまだよくわかっておらず，これらを考察することが統計多様体の幾何学の大きな課題であるといってよい．まず

は，Riemann 幾何学における非平坦な定曲率空間にあたるよいクラスを定め，そのモデルを確立したいものである (素朴な言い方をすれば，統計多様体の幾何学で球面の役割を果たすものは何かということになる)．統計 2 重調和写像の概念がそのような課題に役に立てば非常にうれしい．

参考文献

[1] 古畑仁，統計多様体の部分多様体論，日本数学会 2021 年度秋季総合分科会幾何学分科会講演アブストラクト，`https://eprints.lib.hokudai.ac.jp/dspace/handle/2115/82863`

[2] Furuhata H., *Toward differential geometry of statistical submanifolds*, to appear in Inf. Geom. (doi: 10.1007/s41884-022-00075-9)

[3] Furuhata H. and Ueno R., *A variation problem for mappings between statistical manifolds*, Preprint

[4] 野水克己・佐々木武，アファイン微分幾何学，裳華房 (1994)

[5] Urakawa H., Geometry of biharmonic mappings, World Sci. Publ. (2019)

Acknowledgments. This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University, and by JSPS KAKENHI Grant Number JP22K03279.