A geometric construction of arithmetic models of cohomologically induced modules*

林 拓磨 †

概要

Fabian Januszewski 氏 (Paderborn 大学) と筆者は [22] においてコホモロジー誘導加群の環上のモデルの構成に成功した. 本稿ではこの結果及びその先行研究 [21] の全体像を概観する.

1 記号一覧

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ をそれぞれ整数環, 有理数体, 実数体, 複素数体, 四元数体とする.
- 素数 p に対して p 進整数環, p 進数体をそれぞれ $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p$ と書く.
- 可換環の準同型 $k \to k'$ 及び k 上定義された概型や表現などが与えられたとき, それらの k' への底変換を $(-)_{k'}$ のように書く.
- 可換環 k 上定義されたアファイン平滑概型は原則大文字のアルファベットで書く. また, その Lie 環を対応する小文字のドイツ文字で書く. ただし定理 2.4 及びその証明の中では文脈の都合上別の記号を用いる.
- 可換環上定義された平滑概型間の閉埋め込み i に対して捻じれ D 加群の順像関手を i_+ で表す ([22, 3.8 節]).
- 概型 S 上アファインな平滑群概型 G に対してその単位成分 (ファイバーごとに代数群として単位成分をとって合併集合をとったもの) を G^0 で表す ([1, Définition 3.1]).
- 可換環の 2 次の Galois 拡大 $k \to k'$ が与えられたとき, k' 上定義された対象への Galois 群の非自明な元の作用 (またはひねり) を $\bar{\ }$ で表す.
- 概型の射 $X \to S$ と X の S 上定義された対合 θ に対してその θ 不変部分を X^θ と書く.

2 導来関手加群の局所化

初めに導来関手加群の幾何学的実現 (双対定理) について復習しよう. ここでは簡単のため閉軌道の場合のみを考える:

定理 2.1 ([23, 4.3. Theorem, Appendix B], [24, Theorem 5.4, Corollary 5.5] + [25, Corollary 3.7])**.** *G を連結実簡約代数群, θ を Cartan 対合とする. G の θ 固定部分群の開部分群を 1 つ選び, これを K とおく. T を K の極大トーラスとし, Q' を $T_{\mathbb{C}}$ を含む $\theta_{\mathbb{C}}$ 安定放物型部分群とする. $L' = Q' \cap \bar{Q}'$ とおく. これに付*

* 本研究は日本学術振興会・特別研究員奨励費 (課題番号：21J00023, 22KJ2045) の助成を受けたものである.

† 大阪大学大学院情報科学研究科 hayashi-t@ist.osaka-u.ac.jp

随して得られるコホモロジー誘導関手を $\mathcal{L}_\bullet$ で表す．また, $K_\mathbb{C} \cap Q'$ のべき単根基の次元を u と書く．

$\bar{Q}'$ に付随して得られる部分旗多様体上の閉 $K_\mathbb{C}$ 軌道の埋め込み $K_\mathbb{C}/(\bar{Q}' \cap K_\mathbb{C}) \hookrightarrow G_\mathbb{C}/\bar{Q}'$ を i' と書く．$\mathcal{A}'$ を $G_\mathbb{C}/\bar{Q}'$ 上の $G_\mathbb{C}$ 同変 *tdo*, $\mathcal{M}'$ を $(i')^{\cdot}\mathcal{A}'$ 可積分接続, M' をスタンダード[*1]な基点 $\bar{Q}' \cap K_\mathbb{C}$ におけるファイバーとする．このとき M' はある自然な $(\bar{\mathfrak{q}}', L' \cap K_\mathbb{C})$ 加群の構造を持つ．さらにある $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K_\mathbb{C})$ 加群の同型 $H^\bullet(G_\mathbb{C}/\bar{Q}', i'_+\mathcal{M}') \cong \mathcal{L}_{u-\bullet}(M')$ が存在する．

この定理により例えば K が連結かつ M' が 1 次元の場合にいわゆる $A_{\mathfrak{q}'}(\lambda)$ 加群が得られる．[23] の双対定理では言葉通り双対が主張に現れていたが [24] では双対を用いない別の形が主定理として提示された．上述の定理は Zuckerman の双対定理 ([25, Corollary 3.7]) を適用してまた別の形にしたものである．また, [24] では K に連結性を仮定しているが証明を見ると連結性が使われていないため上では連結性の仮定を外した．実際には [24] の主張の形では K は簡約部分群でさえあればよいことも証明からわかる．ただし上の形での主張となると Zuckerman の双対定理の適用に当たって Cartan 対合から来る対称部分群であるという仮定が必要になる．連結性を外す議論については [23, Appendix B] でも行われていたことも注記しておく．念のため連結性を外すことで何が起こるかについて例を以て少し説明しておく:

例 2.2. まず $G = \mathrm{SL}_2$, $K = \mathrm{SO}(2)$ で $Q' = B'$ が Borel 部分群の場合を考える．この場合, 旗多様体は複素射影直線 $\mathbb{P}^1_\mathbb{C}$ と同一視され, $\{\sqrt{-1}\}$, $\{-\sqrt{-1}\}$ の 2 つの部分集合が閉 $K_\mathbb{C}$ 軌道を与える．$\mathcal{A}'$ を捻じれのない微分作用素の層を $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_\mathbb{C}}(n)$ でひねったものにすることでそれぞれの軌道から上の操作で以て正則・反正則離散系列表現が得られる．例えば右辺で見れば $L'(\mathbb{C}) \cap \mathrm{SO}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SO}(2,\mathbb{C})$ であることからいわゆる Verma 加群が現れる．では次に $G = \mathrm{GL}_2$, $K = \mathrm{O}(2)$ としてみよう．この場合は $\mathrm{O}(2,\mathbb{C})$ の作用により 2 つの $\mathrm{SO}(2,\mathbb{C})$ 軌道は移りあい, 閉 $K_\mathbb{C}$ 軌道は 1 つしかない．この閉 $K_\mathbb{C}$ 軌道は元の 2 つの $\mathrm{SO}(2,\mathbb{C})$ 軌道の非交和になっているので対応して得られる表現もそれぞれの $\mathrm{SO}(2,\mathbb{C})$ 軌道から得られる表現の直和になるはずである．これは $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の (適切な意味での) 離散系列表現が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の正則離散系列表現と反正則離散系列表現の直和になっているというよく知られた事実と符合する．右辺の表示で見たときには $L'(\mathbb{C}) \cap \mathrm{O}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SO}(2,\mathbb{C}) \neq \mathrm{O}(2,\mathbb{C})$ となり, 代数的にはこの違いが成分を増やしていると考えられる．

例 2.3. $G = \mathrm{SL}_3$, $K = \mathrm{SO}(3)$, $Q' = B'$ (Borel 部分群) とする．$\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ の旗多様体の閉 $\mathrm{SO}(3,\mathbb{C})$ 軌道はただ 1 つである．従って $G = \mathrm{GL}_3$, $K = \mathrm{O}(3)$ に取り換えたとしても閉軌道の連結成分は上の場合と違って増えない．一方 $H(\mathbb{C}) \cap \mathrm{O}(3,\mathbb{C})$ は非連結であり, $\mathrm{O}(3)$ の非自明な連結成分はここに現れる．この非自明な連結成分はファイバーの加群の構造に複数の候補を与える．

さて, 導来関手加群の重要な特徴としてコホモロジーが消えないというものがある (Zuckerman)．実際既約ユニタリなどの仮定をすることでコホモロジーが消えないことが導来関手加群の特徴づけになる (Vogan–Zuckerman の定理)．保型表現論への応用において実簡約 Lie 群の表現のコホモロジーは保型表現の無限素点部分のコホモロジーまたは局所対称空間のコホモロジーという形で現れる．このコホモロジーは保型 L 関数の特殊値の情報を持っていることが期待され, その特殊値の数論的性質 (有理性・整性) がコホモロジーの構造と深く関係していると考えられているようである．こういった背景から導来関手加群の有理構造や整構造に着目する研究が 2010 年代にいくつか現れた．例えば [10, 11] では上述の幾何学的実現に現れる部分旗概型や軌道, tdo, 捻じれ可積分接続を代数体上定義しなおして同じ操作をすることで離散系列表現の代数体上のモデ

*1 「標準的」と書こうとしたが後々 canonical と standard の区別が出来そうになくかつ混乱を招きそうなのであえて訳さずにカタカナで書くことにした．

ルが得られるはずだというアイデアが提示された．このアイデアをもう少し推し進めると次のように考えることが出来る: 「前述の幾何学的実現に現れる各幾何学的対象がより小さい環上定義されれば, 同じ操作を行うことで導来関手加群のより小さい環上のモデルが得られる」．実際にその捻じれ D 加群に関する操作を行うためにはそもそも環上定義された捻じれ D 加群の適切な理論が必要である．[22] では適切と思われる環上定義された捻じれ D 加群の基礎理論を必要な範囲で実際に構築した．解説記事として [17, 18, 20] を挙げておく．それぞれ tdo, 捻じれ D 加群の基本操作, 底変換定理について述べている．前者 2 稿のうち本稿に直接関係する部分は [19] でも手短にまとめられている．この基礎理論により次の結論を得る:

定理 2.4. 可換環 k から $\mathbb{C}$ への平坦な環準同型が与えられたとする．また, $G_{\mathbb{C}}$ の平滑アファインな k 形式 $\mathcal{G}$ が与えられたとする．つまり, k 上の平滑アファイン群概型 $\mathcal{G}$ 及び $\mathcal{G}\otimes_k \mathbb{C} \cong G_{\mathbb{C}}$ があったとする．同様に, $\mathcal{G}$ の閉部分群概型 $\mathcal{K}$, 平滑 k 概型間の $\mathcal{K}$ 同変閉埋め込み $\iota : \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{X}$, $\mathscr{X}$ 上の $\mathcal{G}$ 同変 *tdo* $\mathscr{A}$, $\iota^{\cdot}\mathscr{A}$ 可積分接続であってそれぞれ $K_{\mathbb{C}}$, i', $\mathcal{A}'$, $\mathcal{M}'$ の k 形式になっているものが与えられたとする．このとき $H^{\bullet}(\mathcal{X}, \iota_+\mathscr{M})$ は $(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}, \mathcal{K})$ 加群の構造を持ちかつ $\mathcal{L}_{u-\bullet}(M')$ の k 形式になっている．ここで $\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}$ は $\mathcal{G}$ の *Lie* 環である．

証明. X 底変換定理から $\iota_+\mathscr{M}$ には自然な $\mathcal{K}$ 同変左 $\mathscr{A}$ 加群の構造が入る．順像関手に関する S 底変換定理からこれは $i'_+\mathcal{M}'$ の k 形式だとわかる．また, スタンダードな議論から $H^{\bullet}(\mathcal{X}, \iota_+\mathscr{M})$ は自然な $(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}, \mathcal{K})$ 加群の構造を持つ．さらに, 大域化関手の平坦 S 底変換定理から $H^{\bullet}(\mathcal{X}, \iota_+\mathscr{M})$ は $H^{\bullet}(G_{\mathbb{C}}/\bar{Q}', i'_+\mathcal{M}')$ の k 形式である． □

当面の応用上は $\mathcal{A}'$ が $G_{\mathbb{C}}/\bar{Q}'$ 上の $G_{\mathbb{C}}$ 同変線束 $\mathcal{L}'$ の微分作用素の層, $\mathcal{M}' = (i')^*\mathcal{L}'$ の場合が重要である．後々必要に応じてこの場合のみを考える．

さて, あとは仮定にある k 形式をどのように得るかが問題になる．以下の節ではそれらについて簡単に説明し, 最後にその帰結と得られた加群の構造に関する基本的な結果について述べたい．より小さい k 上のモデルを得る方法 (アイデア) を先んじて端的に述べておく: まずある程度小さい環 (例えば $\mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]$) 上定義されることを確認してあとは忠実平坦降下 (例えば Galois 降下) によってより小さい環上定義されることを確認する．なお, $(\mathcal{A}', \mathcal{M}')$ については上述の場合のみを考えることで本稿では $(\mathscr{A}, \mathscr{M})$ の忠実平坦降下に代えて同変線束の Galois 降下について述べるにとどめておくこととする．

3　簡約群概型と対称部分群概型

ここでは連結簡約代数群の概型上のモデルのクラスである簡約群概型について簡単に復習する．

定義 3.1 ([6, Définition 2.7])**.** S を概型とする．S 上アファインな平滑群概型 G であって各幾何学的ファイバーが古典的な意味で連結簡約代数群になっているものを簡約群概型と呼ぶ．

注意 3.2. 構造論との兼ね合いからファイバーに連結性を課している．

注意 3.3. 幾何学的ファイバーとはここでは S の各点の剰余体の代数閉体への底変換のことである．あるいは代数閉体のスペクトラムから S への射に関する底変換と読み替えても簡約性については得られる条件は同値である.．「幾何学的ファイバーが古典的な意味で連結簡約代数群になっている」という条件は全ての点で課していることも強調しておく．この条件は生成的ではない．平滑アファインな群概型で稠密な開集合上連結簡約であっても全体で簡約にならないこともある ([6, 5 節]).

もっとも基本的な例としては GL_n, SL_n ($S = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$) がある. 慣れている人は Sp_n ($S = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$) も基本的な例として加えても問題ないだろう. 定義から底は底変換により変えられる. 実 Lie 群の文脈からは対称部分群による構成は基本的である:

補題 3.4 ([21, Lemma 3.1.1, Example 3.1.2])**.** *k を 1/2 を含む可換環, G を k 上の簡約群概型, θ を G の対合とする. このとき G^θ は G の平滑閉部分群概型である. また $(G^\theta)^0$ は簡約群概型である. 特に $(G^\theta)^0$ は G の閉部分群概型である.*

これと Weil 制限を組み合わせることで多くの古典 Lie 群がスタンダードな定義のもと自然に $\mathbb{Z}[1/2]$ 上定義される. 筆者はこれらを (連結) 古典 Lie 群のスタンダード $\mathbb{Z}[1/2]$ 形式またはスタンダードモデルなどと呼んでいる. ここで言う古典 Lie 群の一覧と具体的な定義については [21] を見られたい.

注意 3.5. Weil 制限は例えば不定値ユニタリ群のモデルを Lie 群論におけるスタンダードな定義をまねて構成する際に使う. ところで古典 Lie 群の中には $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ のように $\mathbb{H}$ を使って書かれる群もいくつかある. $\mathbb{H}$ が非可換であるという理由によりそれらの群のモデルの構成に少なくともそのまま Weil 制限は使えない. そのため例えば $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ ならば $\mathrm{U}^*(2n)$ のように, 複素行列で表したもので代替して Weil 制限と上の補題を組み合わせてモデルを構成する.

4 部分旗概型

ここでは部分旗多様体の一般化について復習する. まず古典的な場合から始める. 複素連結簡約代数群 G の部分旗多様体とは放物型部分群 Q について G/Q と書かれるもののことであった. Q の正規化部分群が Q 自身であるということから G/Q は Q と共役な G の部分群全体と見なすことができる. より一般に G の放物型部分群全体の集合を考えればその G 軌道はそれぞれ部分旗多様体になっていてかつ部分旗多様体はそれで尽くされる. また, この G 軌道は極大トーラス及び正ルート系を決めたとき単純ルートの集合のべき集合と一対一対応する. 「G の放物型部分群全体の集合」を 「G の放物型部分群のモジュライ空間」と言い換えることで上の記述は次のように一般化される:

定義 4.1 ([7, Exemples 5.2.3])**.** G を概型 S 上の簡約群概型とする. このとき G の S 上平滑アファインな部分群概型であって各幾何学的ファイバー上古典的な意味で放物型部分群になっているものを G の放物型部分群 (概型) と呼ぶ. Borel 部分群 (概型) も同様に定義される.

定理 4.2 ([7, Corollaire 5.8.3], [8, Théorème 3.3])**.** *G を概型 S 上の簡約群概型とする.*

(1) G の Borel 部分群及び放物型部分群のモジュライ空間 $\mathcal{B}_G$, $\mathcal{P}_G$ は平滑射影概型で表現される. 本稿ではこれらをそれぞれ旗概型, 総旗概型と呼ぶ. S が体のスペクトラムである場合には旗多様体, 総旗多様体と呼ぶ.

(2) エタール商 $\mathcal{P}_G/G$ は S 上有限エタールな概型で表現される. この商を $\operatorname{type} G$ と書く. 商射 $\mathcal{P}_G \to \operatorname{type} G$ を t で表す.

(3) 商射 $t : \mathcal{P}_G \to \operatorname{type} G$ は平滑かつ射影的である.

定義 4.3 ([8, Corollaire 3.6])**.** $(\operatorname{type} G)(S)$ の元 x に対してそのファイバー $t^{-1}(x)$ を $\mathcal{P}_{G,x}$ で表し, 型 x の部分旗概型と呼ぶ. S が体のスペクトラムである場合には部分旗多様体と呼ぶ.

例 4.4 ([8, Corollaire 3.6])**.** $(\mathrm{type}\, G)(S)$ は $\varnothing$ と書かれるあるカノニカルな元を持つ．この型は $\mathcal{P}_{G,\varnothing} = \mathcal{B}_G$[*2] を満たす．

エタール商 $\mathrm{type}\, G = \mathcal{P}_G/G$ は集合論的な意味での商よりも強い意味合い・情報を持っている．以下主に $S = \mathrm{Spec}\, \mathbb{R}$ の場合にいくつかの群を例にとって何が起きているか見てみよう．

例 4.5. $G = \mathrm{SL}_3$ とする．この場合 G は実数体上分裂しており, $\mathcal{P}_G$ は Dynkin 図形の頂点の集合から定まる部分旗多様体に分割される．具体的に見てみよう．分裂極大トーラスとそれに関する単純ルート系 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ を 1 つ選んでおく．$\mathbb{C}$ 上の場合に放物型部分群の共役類全体の集合が単純ルート系のべき集合と全単射の関係にあったことを踏まえて Dynkin 図形を書いておこう:

$$\overset{\alpha_1}{\bullet}\;\rule[0.5ex]{3em}{0.4pt}\;\overset{\alpha_2}{\bullet}.$$

この図形には自然に $\mathrm{Spec}\, \mathbb{R} \coprod \mathrm{Spec}\, \mathbb{R}$ という概型の構造が入る．これを $\mathrm{Dyn}\, G$ と書き, Dynkin 概型 (多様体) と呼ぶ．各 Π の部分集合 Π' に対して対応するスタンダードな放物型部分群を $P_{\Pi'}$ と書く．このとき

$$\mathcal{P}_G = G/P_\varnothing \coprod G/P_{\{\alpha_1\}} \coprod G/P_{\{\alpha_2\}} \coprod G/P_{\{\alpha_1,\alpha_2\}}$$

$$\mathcal{P}_G/G = \overset{\varnothing}{\bullet} \qquad \overset{\{\alpha_1\}}{\bullet} \qquad \overset{\{\alpha_2\}}{\bullet} \qquad \overset{\{\alpha_1,\alpha_2\}}{\bullet} = \mathrm{Spec}\, \mathbb{R} \coprod \mathrm{Spec}\, \mathbb{R} \coprod \mathrm{Spec}\, \mathbb{R} \coprod \mathrm{Spec}\, \mathbb{R}$$

のように表せる．$\mathcal{P}_G$ が 4 種類の部分旗多様体に分かれることと $\mathcal{P}_G/G$ が 4 つの $\mathrm{Spec}\, \mathbb{R}$ に分かれることが対応していることに気が付かれたい．

一般に概型 S 上の簡約群概型 G に対して $\mathrm{Dyn}\, G$ と書かれる概型 (Dynkin 概型) を定義することができる ([5, 3 節])．これは底変換と可換かつ, 分裂の場合は Dynkin 図形の頂点に対応して S のコピーの非交和を取ったものになっている．$\mathrm{Dyn}\, G$ については以下でいくつかの具体例を説明するにとどめ, 一般的な定義の説明は本稿では省略する．

注意 4.6. 上の例に見られるように, 分裂である場合は $\mathcal{P}_G$ などの記述は「基礎環に依らずに」ルートデータだけで決まる．例えば $S = \mathrm{Spec}\, k$ (k は任意の可換環), $G = \mathrm{SL}_2$ としよう．このとき

$$\mathrm{Dyn}\, G = \overset{\alpha_1}{\bullet} = \mathrm{Spec}\, k$$

$$\mathcal{P}_G = G/P_\varnothing \coprod G/P_{\{\alpha_1\}}$$

$$\mathcal{P}_G/G = \overset{\varnothing}{\bullet} \qquad \overset{\{\alpha_1\}}{\bullet} = \mathrm{Spec}\, k \coprod \mathrm{Spec}\, k$$

となる．ここで, $P_\varnothing$ は上三角行列のなす SL_2 の部分群概型, $P_{\{\alpha_1\}} = G$ である．$G/P_\varnothing$ は k 上の射影直線 $\mathbb{P}^1$ と自然に同一視できる．また, $G/P_{\{\alpha_1\}} = G/G = \mathrm{Spec}\, k$ である．射影直線の方は Borel 部分群, 要するに上三角行列のなす部分群概型とあとはそれとエタール局所的に共役なものからなる．一方 G/G の方は G のみからなる．例えば $k = \mathbb{Z}_p$ (p は素数) とすると $\mathcal{P}_G(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}_p) \coprod \{\mathrm{SL}_2\}$ となり, 上三角行列のなす部分群概型と $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$ 共役な部分群概型及び全体 SL_2 しか現れない．特に岩堀部分群は (少なくとも SL_2 の $\mathbb{Z}_p$ 上定義された放物型部分群概型としては) 現れない．というわけで多少正確性に欠ける言い方をすれば分裂の場合の放物型部分群というものは代数閉体上の場合のスタンダードな放物型部分群の該当する環上の適切なモデル及

[*2] Borel 部分群が放物型部分群であることに注意せよ．

びその (一般にはエタール局的に) 共役な部分群概型で尽くされる．環の構造に依存したような特別な部分群はここには現れない．もちろん k が変われば $G(k)$ も変わるので部分群の量自体は k によって変わるし k によっては局所的にのみ共役ということで $G(k)$ 共役なもの以外も一般には現れるのでその意味ではもちろん放物型部分群全体は環 k に依存する．ある種の構造論をやる際には G と k に依って難しくなることもある．

G が分裂でない場合には同じようにはならない．同様の計算を行うためには一度複素化することになる．以下 G ごとに実極大トーラス H と $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ の単純ルート系 Π を 1 つ選ぶ．また, $\Pi' \subset \Pi$ に対して対応する $G_{\mathbb{C}}$ の放物型部分群を $P_{\Pi'}$ で表す．

例 4.7. $G = \mathrm{SU}(2)$ とする．このとき

$$\operatorname{Dyn} G_{\mathbb{C}} = \overset{\alpha_1}{\bullet} = \operatorname{Spec}\mathbb{C}$$

$$\mathcal{P}_{G_{\mathbb{C}}} = \mathcal{B}_{G_{\mathbb{C}}} \coprod \{*\}$$

$$\mathcal{P}_{G_{\mathbb{C}}}/G_{\mathbb{C}} = \overset{\varnothing}{\bullet} \qquad \overset{\{\alpha_1\}}{\bullet} = \operatorname{Spec}\mathbb{C} \coprod \operatorname{Spec}\mathbb{C}$$

となる．この場合上の記述における $(-)_{\mathbb{C}}$ はすべて無視出来て

$$\operatorname{Dyn} G = \overset{\alpha_1}{\bullet}$$

$$\mathcal{P}_G = \mathcal{B}_G \coprod \{*\}$$

$$\mathcal{P}_G/G = \overset{\varnothing}{\bullet} \qquad \overset{\{\alpha_1\}}{\bullet} = \operatorname{Spec}\mathbb{R} \coprod \operatorname{Spec}\mathbb{R}$$

が成り立つ．最初の複素数体上の場合の記述とこれまでの文脈からこの実数体上の場合の記述がいかにも自然に見えるだろう．筆者としてはそれを意図して書いたつもりなのだがいかがだろう? しかし Lie 群論の立場に立ってよく考えなおしてみるとこの結果は一見おかしい．というのも G の Borel 部分群 B は存在せず, G/B で表されるような多様体もない．つまり旗多様体 $\mathcal{B}_G$ なるものがあると言っているがこれは $\mathcal{B}_G = G/B$ のようには書くことができないのである．この旗多様体があるないという問題は C^∞ 多様体としては「ない」が代数幾何的には「ある」ということで, 言い換えると基礎体を実数体に持つ空でない概型 $\mathcal{B}_G$ があってこの実点集合 $\mathcal{B}_G(\mathbb{R})$ が空集合になっているものがあると言っている．これが Lie 群論との差異に関するからくりである．複素数体から実数体へという立場から G が Borel 部分群を持たないことを言い換えると次のようになる: $G_{\mathbb{C}}$ は Borel 部分群 B' を持つがどの Borel 部分群も $\bar{B}' = B'$ を満たさない．しかし, $\bar{B}'$ は B' と一致せずとも Borel 部分群ではあり続けてくれている．つまり $\mathcal{P}_{G_{\mathbb{C}}} = \mathcal{B}_{G_{\mathbb{C}}} \coprod \{*\}$ という分解の $\mathcal{B}_{G_{\mathbb{C}}}$ の部分は複素共役で閉じているのである．もちろん, $\{*\} = G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{C}}$ なのでこちらは自然に実数体上定義される．正確には $G_{\mathbb{C}}$ という自明な放物型部分群を考えていて, $\bar{G}_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}$ が成り立つと思うべきだろう．いずれにせよ, 分解を与えている各複素部分旗多様体が G から定まる複素共役で閉じているのでそれぞれ実数体上定義されていることがわかる．今回各々の実形は定義から $\mathcal{B}_G$, $\{*\} = \operatorname{Spec}\mathbb{R}$ であることが容易にわかる．その結果として $\mathcal{P}_G = \mathcal{B}_G \coprod \{*\}$ を得る．3 行目の等式は同じ理由から従う．1 つ目は, もともと 1 点しかなかったので複素共役で動きようがなく自動的に $\operatorname{Spec}\mathbb{R}$ が出てくるという寸法になっている．

例 4.8. $G = \mathrm{SU}(2,2)$ とする．この場合は複素共役による入れ替えが起こる:

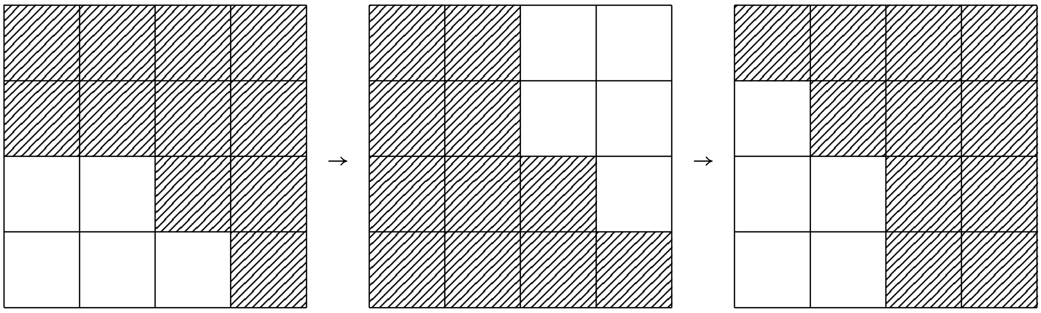
$$\operatorname{Dyn} G = \begin{tikzcd} \overset{\alpha_1}{\bullet} \arrow[r, dash] \arrow[rr, bend right, leftrightarrow] & \overset{\alpha_2}{\bullet} \arrow[r] & \overset{\alpha_3}{\bullet} \end{tikzcd} = \operatorname{Spec}\mathbb{C} \coprod \operatorname{Spec}\mathbb{R}$$

$$\mathcal{P}_G = \mathcal{B}_G \coprod \underset{=G_{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_3\}}}{\underline{G_{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_1\}}}} \coprod \mathcal{P}_{G,\{\alpha_2\}} \coprod \underset{=G_{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_2,\alpha_3\}}}{\underline{G_{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_1,\alpha_2\}}}} \coprod \mathcal{P}_{G,\{\alpha_1,\alpha_3\}} \coprod \underset{=\operatorname{Spec}\mathbb{R}}{\underline{\mathcal{P}_{G,\Pi}}}$$

$$\mathcal{P}_G/G = \begin{tikzcd} \overset{\varnothing}{\bullet} & \overset{\{\alpha_1\}}{\bullet} \arrow[rr, bend right, leftrightarrow, "\operatorname{Spec}\mathbb{C}"'] & \overset{\{\alpha_2\}}{\bullet} & \overset{\{\alpha_3\}}{\bullet} \\ \overset{\{\alpha_1,\alpha_2\}}{\bullet} \arrow[rr, bend right, leftrightarrow, "\operatorname{Spec}\mathbb{C}"'] & \overset{\{\alpha_1,\alpha_3\}}{\bullet} & \overset{\{\alpha_2,\alpha_3\}}{\bullet} & \overset{\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}}{\bullet} \end{tikzcd}$$

$$= \operatorname{Spec}\mathbb{R} \coprod \operatorname{Spec}\mathbb{C} \coprod \operatorname{Spec}\mathbb{R} \coprod \operatorname{Spec}\mathbb{C} \coprod \operatorname{Spec}\mathbb{R} \coprod \operatorname{Spec}\mathbb{R}.$$

図について説明しよう．H を対角行列のなすコンパクトトーラスとする．また, 自然な同型 $\mathrm{SU}(2,2)_{\mathbb{C}} \cong \mathrm{SL}_4$ のもと Π をスタンダードに取って各 $P_{\Pi'}$ がブロック上三角行列のなす部分群になるようにしておく．最初に 3 行目の $\overset{\{\alpha_1\}}{\bullet}$ と $\overset{\{\alpha_3\}}{\bullet}$ を結ぶ矢印, あるいは 2 行目の $\underset{=G_{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_3\}}}{\underline{G_{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_1\}}}}$ と書かれた部分について説明する．ひとまず複素数体上で $P_{\{\alpha_1\}}$ またはこれに付随する部分旗多様体, すなわち $P_{\{\alpha_1\}}$ の $G_{\mathbb{C}}$ 共役類について考える．例 4.7 のときと同じように考えるなら複素共役 $\bar{P}_{\{\alpha_1\}}$ が $P_{\{\alpha_1\}}$ の $G_{\mathbb{C}}$ 共役類になっているかが問題になる．これは $\bar{P}_{\{\alpha_1\}}$ を $G(\mathbb{C})$ の元による共役によって移してブロック上三角になるようにしたとき元に戻っているかを問うことに他ならない．実際やってみると以下のようになる:



上図は $P_{\{\alpha_1\}}$, $\bar{P}_{\{\alpha_1\}}$, 及び $\bar{P}_{\{\alpha_1\}}$ を $G_{\mathbb{C}}$ 共役でスタンダードな位置に戻したものそれぞれに対応するブロックを書いたものである．というわけで元には戻らず $P_{\{\alpha_3\}}$ が出てきてしまった．結果, $P_{\{\alpha_1\}}$ と $P_{\{\alpha_3\}}$ が定める部分旗多様体は共役で移りあい, 各々は実数体上定義されないが 2 つ合わせることで降下するとわかる．それを表したのが 3 行目の右辺の $\{\alpha_1\}$ と $\{\alpha_3\}$ を結ぶ矢印である．矢印にラベルされている $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ はこれら 2 つ合わせて降下させると $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ が得られるということを表す (cf. $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^2$)．ガロア理論的観点からはこれら 2 つには共役対称性があるため区別することができないので合わせて降下しなくてはならないと説明することもできる．部分旗多様体の方の言葉で言えば降下して得られる多様体は $G_{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_1\}}$ の構造射に自然な射 $\operatorname{Spec}\mathbb{C} \to \operatorname{Spec}\mathbb{R}$ を合成して実代数多様体と見なしたもので, α_1 と α_3 の対称性から $G_{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_3\}}$ の方で同じことをしても $\mathcal{P}_G$ の同じ部分多様体が得られる．このことを意図して $\underset{=G_{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_3\}}}{\underline{G_{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_1\}}}}$ と書いた．

上の説明で α_1 と α_3 がどういう脈絡で結びついたのかを考えなおそう．最初は $P_{\{\alpha_1\}}$ を考え, その複素共役を考えたのだった．今コンパクトトーラスを取っていたことに注意すると, $\bar{P}_{\{\alpha_1\}}$ は $\bar{\Pi} = -\Pi$ についてスタンダードな放物型部分群で $\{\bar{\alpha}_1\} = \{-\alpha_1\}$ に対応する．これを $G_{\mathbb{C}}$ 共役で移すと言ったがルートの言葉で見れば Weyl 群で移すと言い換えられる．つまり, $(G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})$ の Weyl 群の元 w であって $w\bar{\Pi} = \Pi$ になるようなものを取り, $\{\alpha_1\}$ に w を施すと, $w\bar{\Pi} = \Pi$ についてスタンダードな放物型部分群が現れる．この

放物型部分群は $\{-w\alpha_1\} = \{\alpha_3\}$ に対応する．結果重要なことは単純ルート α に対して $w\bar{\alpha}$ を計算することで, それが 1 行目の矢印である．これは Galois 作用にもなっていて先ほどと同じような理屈から例えば $\mathrm{Dyn}\,G = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \coprod \mathrm{Spec}\,\mathbb{R}$ という実概型を得る．

他の共役及び Galois 降下の計算もこのルート系を使った言い換えにより簡単に計算することができる．例えば $\{\alpha_2\}$ の場合は $w\bar{\alpha}_2 = \alpha_2$ なので $\{\alpha_2\}$ は単独で Galois 降下し, 複素部分旗多様体の方も基点を持たない $\mathcal{P}_{G,\{\alpha_2\}}$ なる実代数多様体に降下する．他の場合も同様である．ただし, 例えば $\{\alpha_1, \alpha_3\}$ は各ルートは元に戻らないがちょうどこの部分集合内で入れ替えが起こることで全体としては共役作用で閉じるというようなことが起こることに注意されたい．

注意 4.9. $\mathcal{P}_G$ の分解の様子や $\mathrm{type}\,G$ を計算するには $\mathrm{Dyn}\,G$ の計算が肝心である．そのうち特に矢印を引く部分はトーラスの取り方の違いを無視すれば佐竹図式を書く際にも出てきていたことに気が付くだろう．その意味でこの計算は実半単純 Lie 群の専門家にとっては非常になじみ深いもののはずである．一般の体上でも絶対 Galois 群による同様の作用を考えることができ, 単純代数群の分類の文脈で $*$ 作用という名前で [31] で現れている．この作用は L 群の定義にも現れるので Langlands 哲学やその周辺分野の専門家にとってもなじみ深いことだろう．一般の基礎概型上の場合には Galois 降下を忠実平坦降下と言い換えることで「同じように」計算することができる[*3].

というわけで, $S = \mathrm{Spec}\,\mathbb{R}$ の場合は共役類自体は $\mathbb{R}$ 上ではなく $\mathbb{C}$ 上で考え, 各共役類が複素共役で閉じるかという降下の情報を持つ．つまり, $\mathrm{type}\,G$ は $\mathbb{C}$ 上の共役類の情報と各共役類の定義体の情報からなる．また, 上述の例に見られるように $\mathrm{type}\,G$ の記述が $\mathcal{P}_G$ の実代数多様体としての分解の様子を決定することにも留意しておくとよいだろう．

5 部分旗概型上の同変線束

複素数体上の場合, 部分旗多様体 G/Q 上の G 同変線束は $G \times^Q \lambda$ (λ は Q の指標) により尽くされる．では簡約群概型の場合にはどうなるだろうか? 前節で見たように商概型 G/Q の形で書くことができない部分旗概型が存在する．一方それらは商概型の忠実平坦降下または忠実エタール降下, あるいは前節の例に限定すれば商多様体の Galois 降下によって得られる．裏を返せば, 部分旗概型は少なくとも局所的には商の形で書けるので, 局所的に $G \times^Q \lambda$ の形で書いてあとは降下が出来るかどうか判定すれば原理的にはすべての G 同変線束が構成できるはずだと言える．実際基礎環が体の場合にはいわゆる Borel–Tits 余輪体により降下出来るかどうかが判定できる:

定理 5.1 ([27, 2 節] + [2, §12])**.** *G を体 F 上の連結簡約代数群, T を G の極大トーラスとする．$x \in (\mathrm{type}\,G)(F)$ が与えられたとする．以下 F の分離閉体を F^{sep} と書く．$Q' \in \mathcal{P}_G(F^{\mathrm{sep}})$ であって $T_{F^{\mathrm{sep}}}$ を含み, かつ $t(Q') = x|_{\mathrm{Spec}\,F^{\mathrm{sep}}}$ を満たすものを 1 つ選んでおく．λ を Q' の指標とし, $\mathcal{L}_\lambda \coloneqq G_{F^{\mathrm{sep}}} \times^{Q'} \lambda$ とおく．F の絶対 Galois 群を Γ と書く．各 $\sigma \in \Gamma$ に対して $G_{F^{\mathrm{sep}}}$ 同変な同型 ${}^\sigma\mathcal{L}_\lambda \cong \mathcal{L}_\lambda$ が存在したとする (${}^\sigma\mathcal{L}_\lambda$ は $\mathcal{L}_\lambda$ を σ でひねって得られる $\mathcal{P}_{G_{F^{\mathrm{sep}}}, x|_{\mathrm{Spec}\,F^{\mathrm{sep}}}}$ 上の同変線束)．このとき $\mathcal{L}_\lambda$ が Galois 降下することと Borel–Tits 余輪体 β_λ が Galois コホモロジー $H^2(\Gamma, F^{\mathrm{sep}} \setminus \{0\})$ の元として自明であることは同値である．*

注意 5.2 ([21, Examples 2.2.9, 2.2.13, 2.3 節])**.** F が大域体の場合の Borel–Tits 余輪体の計算は Hasse 原

*3 というよりそれが $\mathrm{Dyn}\,G$ の定義である．

理により局所体の場合に帰着できる．また, F が局所体の場合の Borel–Tits 余輪体の計算には局所類体論を援用することができる．他にも Borel–Tits 余輪体の消滅性について言えることはいくらかあるものの, 一般的に言えることには限界があり, 最終的には個別に計算するしかない．

注意 5.3. $G_{F^{\mathrm{sep}}}/Q'$ 上の同変線束はすべて $\mathcal{L}_\lambda$ の形で書けたことを思い出してみよう．定理中の ${}^\sigma\mathcal{L}_\lambda \cong \mathcal{L}_\lambda$ という条件は $\mathcal{L}_\lambda$ を Galois 降下するためには必要な条件であるが, これはルート系の言葉で記述することができる．また, Hilbert の定理 90 により F 形式は存在すれば同型を除いて一意である．以上から, この定理は実質的に $\mathcal{P}_{G,x}$ 上の G 同変線束の分類を与えていると言える．

注意 5.4. 大域切断を取ることでこの定理から非分裂連結簡約代数群の絶対既約表現に対する Borel–Weil の定理が導かれる．

[21] では可換環の Galois 拡大の場合に Borel–Tits 余輪体を具体的に計算しやすい形で書き下したうえで降下可能性に関して同様の結果を証明した．また, 連結古典 Lie 群の $\mathbb{Z}[1/2]$ 上のスタンダードモデルの場合に Borel–Tits 余輪体を計算した．特に Borel–Tits 余輪体の自明性がこの場合には実数体上の場合と等価であることを確認した．以下その Borel–Tits 余輪体の自明性の結果を述べる．そのために連結古典 Lie 群のスタンダードな $\mathbb{Z}[1/2]$ 形式に関する基本的な事実についてまとめておく．詳しくは [21] を参照されたい．

G を古典連結 Lie 群のスタンダードな $\mathbb{Z}[1/2]$ 形式とする．このとき $G_\mathbb{R}$ のスタンダードな Cartan 対合は $\mathbb{Z}[1/2]$ 上定義される．すなわち, G の対合であってその $\mathbb{R}$ への底変換がスタンダードな Cartan 対合になっているものがある．これを θ と書く．同様に, $G(\mathbb{R})$ の極大コンパクトトーラスでスタンダードなものがあるが, これも $\mathbb{Z}[1/2]$ 上定義され, G の部分群概型を定める．これを T と書く．$H \subset G$ を T の中心化群とする．$(G_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]}, H_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]})$ は分裂群概型を与える．分裂というのはここでは分裂 (極大) トーラスがあってそのトーラスを使ってルートデータやその他複素連結簡約代数群の構造論のようなことがいくらか出来るという意味だと認識してもらえれば良いだろう．正確な定義については [7, Définition 1.13] を参照されたい．なお,「$(G_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]}, H_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]})$ が分裂群概型である」という言明は一般的な定義からすると不正確なようだが $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}\left[1/2,\sqrt{-1}\right]$ は連結なので問題はない．分裂性により特に, 組み合わせ論的なデータから放物型部分群を得ることができる．すなわち, ルート全体の集合の放物型部分集合 Φ に対して $H_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]}$ を含む放物型部分群でそのルート集合がちょうど Φ になっているものが存在する ([7, Proposition 1.4])．また, [21] では前述のルートデータの $\theta_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]}$ 安定な正ルート系を具体的に作った[*4]．スタンダードな $\mathbb{Z}[1/2]$ 形式を考える際には常にこの正ルート系を考えることとする．ところで, ルートデータから Weyl 群が定義できるわけだが, 正ルート系を決めたので Weyl 群の最長元を定義することができる．[21] では, この最長元を与える $H_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]}$ の正規化群のある具体的な元 $w_G \in G(\mathbb{Z}\left[1/2,\sqrt{-1}\right])$ を各 G に対して構成した．この元は $(\bar{w}_G w_G)^2 = e$ (e は $G(\mathbb{Z}\left[1/2,\sqrt{-1}\right])$ の単元) を満たすことが直接計算により確認することができる．

定理 5.5 ([21, Theorem F])**.** *Φ を前述の正ルート系を含む放物型部分集合であって $\bar{\Phi} = w_G\Phi$ を満たすものとする．Q' を Φ に対応する $G_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]}$ の放物型部分群とする．このとき $\bar{Q}' = w_G Q' w_G^{-1}$ を満たすことから $t(Q')$ は $\mathbb{Z}[1/2]$ 上定義される．つまり, $(\operatorname{type} G)(\mathbb{Z}[1/2])$ の元であって $\mathbb{Z}\left[1/2,\sqrt{-1}\right]$ への底変換が $t(Q')$ になっているものが一意的に存在する (Galois 降下, 前節の計算例を参照せよ)．以下これを x と書く．*

λ を Q' の指標とする．また, $\mathcal{L}_\lambda \coloneqq G_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]} \times^{Q'} \lambda$ とする．このとき次は同値である:

[*4] 構成はスタンダードだと思うが G や T と比べるとそれほど一般に浸透しているとは思えなかったのでこの正ルート系をスタンダードと呼ぶことは避けた．

(a) $\mathcal{L}_\lambda$ が $\mathcal{P}_{G,x}$ 上の同変線束に降下する.

(b) $\bar{\lambda} = w_G\lambda$ かつ $\lambda(\bar{w}_G w_G) = 1$.

注意 5.6. $(\bar{w}_G w_G)^2 = e$ から $\lambda(\bar{w}_G w_G) \in \{\pm 1\}$ が一般に成り立つことがわかる. また, 前述のとおりこの値は対応する実数体上の場合と一致する. この値は (微妙な設定の差異を除いて) [4] において明示的に与えられている. この値の式による表示については [4] の後でいくらか研究が行われた ([30, 9, 28] など).

注意 5.7. w_G については実際には $wQ'w^{-1} = \bar{Q}'$ と $(\bar{w}w)^2 = e$ を満たす好きな元 $w \in G(\mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right])$ で置き換えられる. 本稿の最後では上述の定理そのものというよりは w_G をある別の元に置き換えたものを使う.

6 ある閉軌道の分類と定義環

導来関手加群の構成には $\theta_{\mathbb{C}}$ 安定放物型部分群に付随する部分旗多様体の閉 $K_{\mathbb{C}}$ 軌道を考えていた. 部分旗多様体が放物型部分群のモジュライ空間の閉部分多様体と解釈されることを踏まえれば, これは $\mathcal{P}_{G_{\mathbb{C}}}$ において $\theta_{\mathbb{C}}$ 安定放物型部分群[*5]からなる $K_{\mathbb{C}}$ 軌道を考えることに他ならない. あるいはこれら全体を考えるならば $\theta_{\mathbb{C}}$ 安定放物型部分群からなる閉部分多様体を考えると言っても良い. 後の都合からはこの閉部分多様体は $\mathcal{P}_{G_{\mathbb{C}}}$ の $\theta_{\mathbb{C}}$ 固定部分多様体と解釈しておくと良い. ここで, $\theta_{\mathbb{C}}$ は $G_{\mathbb{C}}$ の対合が誘導する $\mathcal{P}_{G_{\mathbb{C}}}$ の対合のことである. 本節の目標はこの閉部分多様体内の $K_{\mathbb{C}}$ 軌道を定義環込みで理解することである. 具体的には定理 4.2 の相対版を実現したい.

[22] では θ 安定放物型部分群の一般化として, 対称とは限らない平滑閉部分群に対して安定放物型部分群なる概念を導入し, ある条件を満たす場合に定理 4.2 の相対版の結果を証明した. しかし安定放物型部分群の定義はいくらか準備が必要なのでここでは対称部分群の場合に限定して説明することにする. 興味がある読者には原論文の他に (簡約部分群の場合の) 手短な解説として [15] を挙げておく. では早速主結果を述べてしまおう:

定理 6.1 ([22, Corollary 5.2.19, Proposition 5.3.1])**.** *k を $1/2$ を含む可換環, G を k 上の簡約群概型, θ を G の対合とする. θ から自然に定まる $\mathcal{P}_G$ の対合を同じく θ と書くことにする. 次に, K を G^θ の開かつ閉な部分群概型とする. ただし, エタール商 K/K^0 が有限エタール k 概型になっていると仮定する. このとき次が成り立つ:*

(1) $\mathcal{P}_G^\theta$ は $\mathcal{P}_G$ の閉平滑部分概型で表現される.

(2) エタール商 $\mathrm{rtype}(G, K) \coloneqq \mathcal{P}_G^\theta/K$ は有限エタール k 概型で表現される. また, 商射 $\mathcal{P}_G^\theta \to \mathrm{rtype}(G, K)$ を rt と書くとき, rt は平滑かつ射影的である.

(1) は対合に関する簡単な一般論から従う ([21, Lemma 3.1.1]). (2) の証明の基本戦略はエタール局所的に定数, つまり底概型の非交和になっていることを証明することである. そのため G や K^0 は分裂であるなどの仮定をしてよい (正確には K^0 の分裂極大トーラスから定まる基本 Cartan 部分群について G が分裂になるなどの条件が必要). すると, 例えば $K = K^0$ の場合には [3] と同様の議論から θ 安定放物型部分群の (エタール局所的な) K 共役類の組み合わせ論的な記述を得られ, これにより商が定数になっていることがわかる. 一

[*5] 実簡約 Lie 群の表現論では $\theta_{\mathbb{C}}$ 安定放物型部分群 (代数) と言われたら実数体上定義された基本 Cartan 部分群 (代数) を含むことを仮定に含めるのが通例だがここでは軌道の問題を考えているのでその仮定は含めないものとする.

般の場合には K の連結成分により一部の K^0 軌道がくっつくことがあり, それに併せて [3] の組み合わせ論的な記述の商を取ることになる. これを実行するためには連結成分は定数であってほしい. 問題はエタール局所的だったから実際には定数と言わずともエタール局所的に定数でさえあれば良く, そのようなわけで K/K^0 が有限エタールであると仮定されている次第である.

$\mathrm{rtype}(G,K)$ の具体的な計算という観点からは, K の連結成分が複数あることにより K^0 軌道としては降下できなかった定義環が降下するという現象が起こることにも注意したい. 以下 $S = \operatorname{Spec}\mathbb{R}$ の場合に例を見てみることにしよう. なお, Borel 部分群のモジュライ空間 $\mathcal{B}_G$ に対しても同様の結果が成り立つ (この場合の組み合わせ論的な記述は [26, 32, 29] などによる) ので, 以下では $\mathcal{P}_G$ の代わりに $\mathcal{B}_G$ を考えることにする. $\mathrm{rtype}_\varnothing(G,K) \coloneqq \mathcal{B}_G^\theta/K$ とおく.

例 6.2. $G = \mathrm{GL}_3$ とする. このとき $\mathrm{rtype}_\varnothing(G,\mathrm{O}(3)) = \mathrm{rtype}_\varnothing(G,\mathrm{SO}(3)) = \operatorname{Spec}\mathbb{R}$ である. というのも, まず複素数体上で考える. GL_3 の複素旗多様体の閉 $\mathrm{SO}(3,\mathbb{C})$ 軌道は 1 つだった. となれば閉 $\mathrm{O}(3,\mathbb{C})$ 軌道も 1 つしかないとわかる. 従って $\mathrm{rtype}_\varnothing(G_\mathbb{C},\mathrm{O}(3,\mathbb{C})) = \mathrm{rtype}_\varnothing(G_\mathbb{C},\mathrm{SO}(3,\mathbb{C})) = \operatorname{Spec}\mathbb{C}$ となり, これが実数体上定義されるとなれば降下した結果は必然的に $\operatorname{Spec}\mathbb{R}$ であることはすぐにわかる. 軌道の観点からは次のように説明できる: 一般に閉軌道の複素共役は閉軌道だが今閉軌道は 1 つしかないのだからその閉軌道は必然的に複素共役で閉じるとわかり, 結果この閉軌道は実数体上定義されると言える. 商が $\operatorname{Spec}\mathbb{R}$ 1 つであるということは 1 つだけ実数体上定義された閉軌道*6があるということを意味している.

例 6.3. $G = \mathrm{GL}_2$ とする. このとき $\mathrm{rtype}_\varnothing(G,\mathrm{SO}(2)) \cong \operatorname{Spec}\mathbb{C}$, $\mathrm{rtype}_\varnothing(G,\mathrm{O}(2)) \cong \operatorname{Spec}\mathbb{R}$ が成り立つ. まず $\mathrm{SO}(2)$ の方から説明しよう. まず $\mathbb{P}^1_\mathbb{C}$ の $\mathrm{SO}(2,\mathbb{C})$ 軌道は 2 つあったから $\mathrm{rtype}_\varnothing(G_\mathbb{C},\mathrm{SO}(2,\mathbb{C})) \cong \operatorname{Spec}\mathbb{C}^2$ である. 2 つの軌道は $\{\sqrt{-1}\}, \{-\sqrt{-1}\}$ で与えられることから 2 つは共役でお互い移りあう. 特に各々は実数体上定義されないので $\operatorname{Spec}\mathbb{R}^2$ ではなく $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ に降下するとわかる. 一方, 閉 $\mathrm{O}(2,\mathbb{C})$ 軌道は 1 つしかないので前述の GL_3 の場合と同様の議論から $\mathrm{rtype}_\varnothing(G_\mathbb{C},\mathrm{O}(2,\mathbb{C})) \cong \operatorname{Spec}\mathbb{R}$ となる. $\mathrm{rtype}_\varnothing(G,\mathrm{SO}(2))$ は実点を持たないが $\mathrm{rtype}_\varnothing(G,\mathrm{O}(2))$ は実点を持つというのはもしかしたら少し奇妙に思えるかもしれない. $\mathcal{B}_G^\theta$ の方は同じなのに一方の商は降下出来て $\operatorname{Spec}\mathbb{R}$ が現れ全体を実点のファイバーと解釈できるのに, 他方は降下できずに $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ が出てきて実点のファイバーとして解釈できない. しかしそれは, 件のエタール商あるいはその記述が $K = \mathrm{SO}(2), \mathrm{O}(2)$ それぞれの場合に 1 つ 1 つの閉 $K_\mathbb{C}$ 軌道の定義体が降下するかどうかの情報を与えているのだ, と思えば自然なことだと納得してもらえるだろう.

より一般的な結果として次が知られている:

例 6.4. $S = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/2]$ とする. このとき正整数 n に対して $\mathrm{rtype}(\mathrm{GL}_n,\mathrm{O}(n)) \cong \mathrm{SPS}^\theta_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/2]}$ が成り立つ. ここで SPS^θ は GL_n の $\mathbb{Z}\left[1/2,\sqrt{-1}\right]$ 上のスタンダードな基本 Cartan 部分群及びその $\theta_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]}$ 安定正ルート系を含む $\theta_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]}$ 安定放物型部分集合全体の集合であり, $\mathrm{SPS}^\theta_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/2]}$ は $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/2]$ のコピーを SPS^θ の分だけ非交和を取ったものである.

注意 6.5. この結果に至るまで紆余曲折があり, 今となっては途中経過と言える段階でありがたいことにたくさん講演の機会をいただいた. そのうちプロシーディングス (講究録) になっているものについて少し触れておく. [12, 13, 14] で触れられているように, 大元になったのは $G = \mathrm{SL}_2$, $K = \mathrm{SO}(2)$ の場合に関する Januszewski 氏の考察である. それを受けて $G = \mathrm{SL}_3$, $K = \mathrm{SO}(3)$ の場合を調べ始めた ([12, 13]). 研究を始

*6 実数体上閉軌道であるとは言っていない. 実際, 基点 (対応する実代数多様体の実点) がないので実数体上では軌道にはなっていない.

めた当初は軌道の定義環をいかに降下するかという方針で研究を進めていた. 特に最初期の [12] では固定部分群の平滑性は具体的な計算に依拠していた. 少し後に力学系の方法を知り, 固定部分群が放物型部分群になっていることを計算に頼らなくてもわかるようになった ([13]). 残りの降下の計算部分をよく観察して一般化することでかなり系統的に軌道の定義環を降下することが出来るようになった ([14]). その後しばらくしてから, 降下すべき軌道を分類できないだろうかと考えたことから (θ) 安定放物型部分群のモジュライ空間とその商を考えるようになった ([15]). これにより定理は抽象的になってしまったものの, 商の計算にこれまでの降下の計算が含まれているという意味でそれまでの結果の一般化を与えたことにもなっていた (cf. [15, 系 2.2]). 技術的には, 軌道射を降下する際に必要になっていたよいエタール局所化の存在も議論に直接現れなくなった. 実は [15] を書いたとき, ファイバーが非連結の場合についていくつかの具体的な場合に場当たり的に上述に相当するような結果も [22] に書かれていた[*7]. これは保型表現論への応用上非連結 Lie 群をどうしても考えたいという要請によるものだった. 2023 年になって応用上やはり非連結の場合にも一般論があった方がよさそうだということになった. そこで前述の場当たり的結果の証明に用いた議論 (構造) をもとに一般化を試みた結果上述の定理に至った.

定義 6.6 ([22, Definition 5.2.6])**.** k, G などを前定理の通りとする.

(1) 閉埋め込み $\mathcal{P}^{\theta}_{G} \hookrightarrow \mathcal{P}_{G}$ は $\operatorname{rtype}(G,K) \to \operatorname{type} G$ を誘導する. これを gt と書く.
(2) $x \in \operatorname{rtype}(G,K)(k)$ とする. $\mathcal{P}^{\theta}_{G,x} \coloneqq rt^{-1}(x)$ とおく. 定義から, $\mathcal{P}^{\theta}_{G} \hookrightarrow \mathcal{P}_{G}$ を制限して閉埋め込み $\mathcal{P}^{\theta}_{G,x} \hookrightarrow \mathcal{P}_{G,gt(x)}$ を得る. これを i_x と書く.

$\operatorname{rtype}(G,K)$ は (定義環のデータを込めて) K 軌道の分類を与えていたわけだが, 各 K 軌道は G の (対応する定義環上の) 部分旗概型の中にいるはずである. その G の部分旗概型の型を出力するということが gt の意味である. この組み合わせ論的なデータの対応を G の部分旗概型への埋め込みに持ち上げて実際に閉埋め込みを与えているのが (2) である. これにて閉 $K_{\mathbb{C}}$ 軌道の埋め込みの環上のモデルを与えるための一般的な手続きが得られた.

7 結論

以上の部分旗概型の幾何に関する結果を定理 2.4 に適用することで得られる帰結について述べる.

定理 7.1 ([22, Corollary 6.2.17])**.** *k を $1/2$ を含む $\mathbb{R}$ の部分環, G を k 上の簡約群概型, θ を G の対合, K を G の θ 固定部分群概型の開かつ閉な部分群であって K/K^0 が有限エタールであるもの, $x \in \operatorname{rtype}(G,K)(k)$, $\mathcal{A}$ を $\mathcal{P}_{G,gt(x)}$ 上の G 同変 tdo, $\mathcal{M}$ を可積分 $i_x^{\cdot}\mathcal{A}$ 接続とする.*

$\theta_{\mathbb{R}}$ が $G_{\mathbb{R}}$ の Cartan 対合になっていると仮定する. Q' を $G_{\mathbb{C}}$ の $\theta_{\mathbb{C}}$ 安定放物型部分群で $K_{\mathbb{R}}$ の極大トーラスの複素化を含むものであって, $rt(Q') = x|_{\operatorname{Spec}\mathbb{C}}$ を満たすとする. $L' = Q' \cap \bar{Q}'$ とおく. また, M' を $\mathcal{M}$ の $\bar{Q}' \in \mathcal{P}_G(\mathbb{C})$ における幾何学的ファイバーとする. u を $Q' \cap K^0_{\mathbb{C}}$ のべき単根基の次元とする. このとき $H^{\bullet}(\mathcal{P}_{G,gt(x)}, (i_x)_{+}\mathcal{M})$ は $\mathcal{L}_{u-\bullet}(M')$ の k 形式を与える.

環上で議論する場合, この主張は微妙に弱い. 例えば $k = \mathbb{Z}[1/2]$ の場合と $k = \mathbb{Q}$ の場合で得られる表現が同一になる可能性をこれでは排除できない. この問題は次の結果を以て (少なくとも 0 次部分については) 解決された:

[*7] 降下が出来てなかったので正確には少し弱かった.

定理 7.2 ([16, Corollary 1.3, 1 節末文, Lemma 5.4], [22, Theorem 6.1.1])**.** *k が Dedekind 整域であるとき, $\Gamma(\mathcal{P}_{G,gt(x)}, (i_x)_+\mathcal{M})$ は k 加群として射影的である.*

この結果は捻じれ D 加群の閉埋め込みによる順像の大域切断加群に関する一般的な結果の帰結である. 証明は初歩的な代数による (解説記事: [19]). 応用上は射影的であるという事実よりも証明に現れる大域切断加群のあるフィルターの有限性が重要であるがここでは深入りしないことにする.

定理 7.1 をより具体的に運用するために $\mathcal{A}$ と $\mathcal{M}$ の例について考えよう. 前に述べたように $\mathcal{A}$ が捻じれのない微分作用素の層を同変線束 $\mathcal{L}$ によって捩じった tdo, $\mathcal{M} = i_x^*\mathcal{L}$ の場合を考える. 以下 $k = \mathbb{Z}[1/2]$ としよう. 例えば $G = \mathrm{GL}_n$, $K = \mathrm{O}(n)$ の場合は前述のように $\mathrm{rtype}(G, K)$ は簡単に書くことができる. GL_n は分裂だったから, 各 x に対応する G の部分旗概型上には降下を経ずに同変線束を作ることができる[*8].

連結実古典 Lie 群のスタンダードモデルの場合にも x 及び $\mathcal{L}$ は具体的に構成・分類が出来る. その結果, 組み合わせ論的な条件の下 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 加群の $\mathbb{Z}[1/2]$ 形式が得られる. これを説明するためにスタンダードモデルの構造について少し追加で述べたい. 以下 G を古典 Lie 群のスタンダードな $\mathbb{Z}[1/2]$ 形式とし, θ, T, H を前に述べた通りとする. $K = (G^\theta)^0$ とする. このとき $(K_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]}, T_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]})$ は分裂で, 前述の正ルート系を制限して正ルート系を得る. 対応する単純ルート系を以下 Π_K と書くことにする. 構成から Π_K は [21] で具体的に与えたコンパクトな連結古典 Lie 群 (のモデル) の単純ルート系の非交和である. 従って, コンパクトな連結古典 Lie 群のスタンダードモデル K' に対して定義した $w_{K'}$ を並べることで, $(K_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]}, T_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]})$ の Weyl 群の最長元の代表元 w_K を得る. なお, 一般に $(\bar{w}_{K'} w_{K'})^2 = e$ であったことと w_K の構成から $(\bar{w}_K w_K)^2 = e$ が従う.

系 7.3 ([22, Corollary 6.2.18])**.** *Φ を $(G_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]}, H_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]})$ の $\theta_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]}$ 安定な放物型部分集合とする. Φ に対応する $G_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]}$ の放物型部分群を Q' と書く. また, λ を $H_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]}$ の指標とする. これらが以下の条件を満たすと仮定する:*

- *(i)* 任意の $\beta \in \Pi_K$ に対して $\alpha \in \Phi$ であって $\beta = \alpha|_{T_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]}}$ を満たすものが存在する.
- *(ii)* $w_K\Phi = -\Phi$.
- *(iii)* $\bar{\lambda} = w_K^{-1}\lambda$.
- *(iv)* $\alpha \in \Phi \cap (-\Phi)$ に対して $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle = 0$ が成り立つ. ここで $\alpha^\vee$ は α の余ルート, $\langle -, - \rangle$ は $H_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]}$ の余指標と指標のカノニカルなペアリングである.
- *(v)* $\lambda(w_K \bar{w}_K) = 1$.

このとき次が成り立つ.

- *(1)* $rt(Q') = rt(\bar{Q}')$ である. これにより $x \in \mathrm{rtype}(G, K)(\mathbb{Z}[1/2])$ を得る.
- *(2)* λ は $\bar{Q}'$ の指標に一意的に延長できる.
- *(3)* 同変線束 $G_{\mathbb{Z}[1/2,\sqrt{-1}]} \times^{\bar{Q}'} \lambda$ は $\mathcal{P}_{G,gt(x)}$ 上の G 同変線束 $\mathcal{L}$ に降下する.
- *(4)* $\Gamma(\mathcal{P}_{G,gt(x)}, (i_x)_+ i_x^*\mathcal{L})$ は $A_{\mathfrak{q}'_{\mathbb{C}}}(\lambda)$ の $\mathbb{Z}[1/2]$ 形式を与える.

系の証明について簡単に述べておく. (1) は (ii) と rt の定義から直ちに従う. (2) は (iv) から従う. なお, 一意性には $\mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]$ が被約であることを使う (詳しくは [21, Proposition 2.3.7] を見よ). (3) を証明す

[*8] そのためには分裂トーラスに関する放物型部分集合と対応をつけておく必要がある. 実際には基本 Cartan 部分群の方で同変線束はパラメーター付けしておいてそれらの同変線束が降下することが分裂性から抽象的に従うと考えたほうが見やすいだろう.

るためには定理 5.5 の条件を確認すればよく, それを満たすというのがちょうど (iii), (v) である. なお, 条件の見た目が定理 5.5 と微妙にずれているのは注意 5.7 に加えて今回 $\bar{Q}'$ を考えているからである. 以上, 表現のモデルを構成するための幾何的なデータが得られたのでそれらを定理 7.1 に適用することで (4) が従う.

Φ については [3] に立ち返った組み合わせ論的な記述を使ってもよかったが, かえって条件の記述が複雑になるので上述の形で定式化することにした. 他の部分については条件を満たすデータを手元で用意しようと思ったときに簡単でわかりやすい記述を意識した.

参考文献

[1] J. E. Bertin. Généralités sur les préschémas en groupes. In *Schémas en Groupes (Sém. Géométrie Algébrique, Inst. Hautes Études Sci., 1963/64), Fasc. 2a, Exposé 6b*, page 112. Inst. Hautes Études Sci., Paris, 1965.

[2] A. Borel and J. Tits. Groupes réductifs. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (27):55–150, 1965.

[3] M. Brion and A. G. Helminck. On orbit closures of symmetric subgroups in flag varieties. *Canad. J. Math.*, 52(2):265–292, 2000.

[4] E. Cartan. Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 10:149–186, 1914.

[5] M. Demazure. Automorphismes des groupes réductifs. In *Schémas en Groupes (Sém. Géométrie Algébrique, Inst. Hautes Études Sci., 1963/64), Fasc. 7, Exposé 24*, page 87. Inst. Hautes Études Sci., Paris, 1965.

[6] M. Demazure. Groupes réductifs—généralités. In *Schémas en Groupes (Sém. Géométrie Algébrique, Inst. Hautes études Sci., 1964), Fasc. 6, Exposé 19*, page 34. Inst. Hautes Études Sci., Paris, 1965.

[7] M. Demazure. Groupes réductifs: Déploiements, sous-groupes, groupes-quotients. In *Schémas en Groupes (Sém. Géométrie Algébrique, Inst. Hautes Études Sci., 1964), Fasc. 6, Exposé 22*, page 106. Inst. Hautes Études Sci., Paris, 1965.

[8] M. Demazure. Sous-groupes paraboliques des groupes réductifs. In *Schémas en Groupes (Sém. Géométrie Algébrique, Inst. Hautes Études Sci., 1963/64), Fasc. 7, Exposé 26*, page 91. Inst. Hautes Études Sci., Paris, 1966.

[9] J. M. G. Fell. Conjugating representations and related results on semi-simple Lie groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 127:405–426, 1967.

[10] M. Harris. Beilinson-Bernstein localization over $\mathbb{Q}$ and periods of automorphic forms. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (9):2000–2053, 2013.

[11] M. Harris. Beilinson-Bernstein localization over $\mathbb{Q}$ and periods of automorphic forms: Erratum. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 03 2018.

[12] T. Hayashi. Half-integrality of the closed SO(3)-orbit on the flag variety of SL_3. 数理解析研究所講究録 2139, 165-176, 2019-12.

[13] T. Hayashi. Half-integrality of the closed SO(3)-orbit on the flag variety of SL(3) 第 5 回 Algebraic Lie Theory and Representation Theory 報告集 (2019).

[14] T. Hayashi. A descent theorem of closed orbits in some partial flag schemes. 2020 年度表現論シンポジウム講演集, 1-8.

[15] T. Hayashi. The moduli space of stable parabolic subgroups. 2021 年度表現論シンポジウム講演集, 69-75.

[16] T. Hayashi. Filtrations on the globalization of twisted D-modules over Dedekind schemes. arXiv:2205.07539.

[17] T. Hayashi. Sheaves of twisted differential operators over schemes. 第 7 回 Algebraic Lie Theory and Representation Theory 報告集 (2022).

[18] T. Hayashi. Operations on twisted D-modules over schemes. 数理解析研究所講究録 2234, 1-11.

[19] T. Hayashi. Twisted D-modules over Dedekind schemes. Proceedings of 61st joint symposium of real functions and functional analysis, 1-11 (2022).

[20] T. Hayashi. Base change theorems in the theory of twisted D-modules over schemes. 2022 年度表現論シンポジウム講演集, 146–154.

[21] T. Hayashi. Half-integrality of line bundles on partial flag schemes of classical Lie groups. *Bull. Sci. Math.*, 188:Paper No. 103317, 2023.

[22] T. Hayashi and F. Januszewski. Families of twisted $\mathcal{D}$-modules and arithmetic models of Harish-Chandra modules, 2018. arXiv:1808.10709.

[23] H. Hecht, D. Miličić, W. Schmid, and J. A. Wolf. Localization and standard modules for real semisimple Lie groups. I. The duality theorem. *Invent. Math.*, 90(2):297–332, 1987.

[24] S. N. Kitchen. Cohomology of standard modules on partial flag varieties. *Represent. Theory*, 16:317–344, 2012.

[25] A. W. Knapp and D. A. Vogan, Jr. *Cohomological induction and unitary representations*, volume 45 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[26] T. Matsuki. The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups. *J. Math. Soc. Japan*, 31(2):331–357, 1979.

[27] A. S. Merkurjev and J.-P. Tignol. The multipliers of similitudes and the Brauer group of homogeneous varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 461:13–47, 1995.

[28] A. L. Onishchik. *Lectures on real semisimple Lie algebras and their representations.* ESI Lectures in Mathematics and Physics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2004.

[29] R. W. Richardson and T. A. Springer. The Bruhat order on symmetric varieties. *Geom. Dedicata*, 35(1-3):389–436, 1990.

[30] J. Tits. Sous-algèbres des algèbres de Lie semi-simples (d'après V. Morozov, A. Malčev, E. Dynkin et F. Karpelevitch). In *Séminaire Bourbaki, Vol. 3*, pages Exp. No. 119, 197–214. Soc. Math. France, Paris, 1956.

[31] J. Tits. Classification of algebraic semisimple groups. In *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)*, pages 33–62. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966.

[32] J. A. Wolf. The action of a real semisimple group on a complex flag manifold. I. Orbit structure and holomorphic arc components. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75:1121–1237, 1969.