

q ミドルコンボリューションの再定式化

お茶の水女子大学 竹村 剛一*

Kouichi TAKEMURA
Ochanomizu University

Abstract

q 差分方程式に関連する特殊関数への応用などを見込んで、坂井・山口により導入された q -middle convolution の再定式化を試みる。

1 序

Katz は著書「Rigid local systems」([10]) により middle convolution を導入した。2000 年頃に Dettweiler と Reiter はリーマン球面の基本群の表現およびフックス型微分方程式系に対して middle convolution を線形代数的に定式化し ([4, 5])、D 加群や局所系に習熟していなくても取り扱えるようになった。ここでのフックス型微分方程式系は、サイズが n の正方行列 $A_1, A_2, \dots, A_r$ を用いて

$$(1.1) \quad \frac{dY}{dx} = \left(\frac{A_1}{x-t_1} + \frac{A_2}{x-t_2} + \dots + \frac{A_r}{x-t_r} \right) Y,$$

と書かれる n 項ベクトル値関数 Y に対する線形常微分方程式系のことである。

フックス型微分方程式系に関する middle convolution の q 変形は、山口雅司およびその指導教員の坂井秀隆により 2010 年頃から考察され、 q -middle convolution と呼ばれている。当初の文献としては山口の修士論文 ([18]) が挙げられる。対象となる q 差分方程式は、 $B_1, \dots, B_N, B_\infty$ を同じサイズの正方行列の組とし、 $b_1, b_2, \dots, b_N$ を相異なる 0 でない複素数としたときの

$$(1.2) \quad Y(qx) = B(x)Y(x), \quad B(x) = B_\infty + \sum_{i=1}^N \frac{B_i}{1-x/b_i}$$

である。当時 q -middle convolution は注目を浴びていて私も複数回講演を聞いたが、あまり理解せずに聞き流していた状況であった。坂井・山口の理論は後に少し発展させた形で [12] として出版された。私自身は 2016 年頃からホインの微分方程式の q 変形に興味をもち、Ruijsenaars 系の退化や q パンルヴェ方程式との関係などから q ホイン方程式についての結果を得た ([14, 15])。2019 年頃から中央大学の大学院生であった佐々木瞳子と高木

*takemura.kouichi@ocha.ac.jp, 本研究では科研費 JP22K03368 の援助を受けています

駿とともに梶原・野海・山田による差分パルヴェ方程式のレビュー ([9]) の解説を試み、 q パルヴェ方程式の Lax 対やワイル群対称性の話に関連する形で坂井・山口の q -middle convolution を眺め直した。そして、神保・坂井により発見された q パルヴェ第六方程式 ([8]) に付随する線形 q 差分方程式系に対し、 q -middle convolution の作用によりワイル群対称性の特定の元が現れることを発見し、さらに q ホイン方程式における q 積分変換を形式的に導出した ([13])。

こうして具体例から q -middle convolution を学ぶことができたが、同時に q 超幾何関数などの特殊関数とのつながりも気になりはじめた。この観点からお茶の水女子大学の大学院生である新井由美と研究を行い ([2])、 q 超幾何関数や変異版 q 超幾何関数を q -middle convolution を用いて調べた。現れる関数を正しく扱うために、 q -convolution に付随する q 積分変換の収束性を論じる必要性が生じた。また、 q 積分変換に 1 パラメーターを追加することで q 超幾何関数などとの関係が明確になったが、この発見のきっかけは青本和彦の著書「直交多項式入門」 ([1]) の第 16 章で書かれている Askey-Wilson 多項式について解説を試みたことである。なお、変異版 q 超幾何関数については、中央大学で佐々木と高木の 1 学年先輩であった波多野修也と松縄竜弥と佐藤智輝との共同研究 ([7]) において研究した関数である。

ところで、坂井・山口は q -middle convolution における rigidity 指数の不変性やスペクトル型 (ジョルダン標準形) の変化のようす、および q -middle convolution の合成についても調べている ([18, 12])。合成について、記号の定義などを後回しにして式を書く

$$(1.3) \quad \overline{\Psi}_\mu \circ \overline{\Psi}_\lambda \simeq \overline{\Psi}_{\log(q^\lambda + q^\mu - 1)/\log q}$$

となっており、個人的には以前から不自然さを感じていた。これについて、 q -middle convolution の定義を少し変更することでより自然な形にすることができた ([3])。さらに、 q -middle convolution を繰り返し用いて特殊関数への応用を考える際にも、変更された定義が都合が良さそうだと感じている。

以上をふまえて本稿では q -middle convolution の再定式化について述べることにする。なお、[17] においても q -middle convolution の再定式化についての解説が述べられている。

2 ミドルコンボリューション

まず、Dettweiler, Reiter による行列の組に対しての convolution を述べる。

Definition 2.1 (convolution [4, 5]) $A_1, A_2, \dots, A_r$ はサイズが n の正方行列とし、 $\lambda \in \mathbb{C}$ とする。 I_n はサイズが n の単位行列とし、サイズが nr の正方行列 F_i ($i = 1, \dots, r$) を次で定める。

$$(2.1) \quad F_i = \begin{pmatrix} O & \cdots & O & \cdots & O \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_1 & \cdots & A_i + \lambda I_n & \cdots & A_r \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ O & \cdots & O & \cdots & O \end{pmatrix} (i)$$

このとき、行列の組の対応 $(A_1, \dots, A_r) \mapsto (F_1, \dots, F_r)$ を、(パラメーター λ の) *convolution* とよぶ。

サイズが n の正方行列の組 $(A_1, \dots, A_r)$ が既約であることを、 $\mathbb{C}^n$ の部分空間 W であって $A_i W \subset W$ ($i = 1, \dots, r$) を同時にみたすものは $\{0\}$ と $\mathbb{C}^n$ 自身の 2 つのみである、ということで定める。このとき、一般には convolution は既約性を保たない。実際に、以下の $\mathbb{C}^{nr}$ の部分空間 $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ は各 F_i ($i = 1, \dots, r$) の作用で保たれることが示される。

$$(2.2) \quad \mathcal{K} = \begin{pmatrix} \ker A_1 \\ \vdots \\ \ker A_r \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \ker(F_1 + F_2 + \dots + F_r).$$

これらの $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ での商空間を考えることにより、以下のように middle convolution を定める。

Definition 2.2 (middle convolution, [4, 5]) Definition 2.1 での線形変換 F_i を商空間 $\mathbb{C}^{nr}/(\mathcal{K} + \mathcal{L})$ で考え直したものを $\bar{F}_i$ ($i = 1, \dots, r$) と記すことにする。このとき、middle convolution mc_λ を行列の組の対応 $(A_1, \dots, A_r) \mapsto (\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_r)$ として定める。

行列の組 $(A_1, \dots, A_r)$ にフックス型微分方程式系

$$(2.3) \quad \frac{dY}{dx} = \left(\frac{A_1}{x - t_1} + \frac{A_2}{x - t_2} + \dots + \frac{A_r}{x - t_r} \right) Y,$$

を付随させることで、convolution や middle convolution をフックス型微分方程式系の対応とみなすことができる。

[4] により、convolution は以下のようにオイラー積分変換と関係していることが示されている。言い方を換えると、以下の定理が convolution の定義の動機となっている。

Theorem 2.3 ([4]) n 項関数 $Y(x)$ は微分方程式系 (2.3) の解とする。 nr 項関数 $W(x)$ を次で定める。

$$(2.4) \quad W_j(x) = \frac{Y(x)}{x - t_j}, \quad W(x) = \begin{pmatrix} W_1(x) \\ \vdots \\ W_r(x) \end{pmatrix}.$$

$W(x)$ の各成分にオイラー積分変換を行ったものとして、以下のように $G(x)$ を定める。

$$(2.5) \quad G(x) = \int_{\Delta} W(s)(x - s)^\lambda ds.$$

ここで Δ は変数 s の複素平面での適切な径路とする。このとき、関数 $G(x)$ は、(2.1) での $F_1, \dots, F_r$ により定められる以下のフックス型微分方程式系をみたす。

$$(2.6) \quad \frac{dY}{dx} = \left(\frac{F_1}{x - t_1} + \frac{F_2}{x - t_2} + \dots + \frac{F_r}{x - t_r} \right) Y.$$

[4, 5] において条件 (*) および (**) というものが定められ、middle convolution の理論で重要な役割を果たしている。ここでその定義を述べておく。サイズが n の正方行列の組

$(A_1, A_2, \dots, A_r)$ を、 $V = \mathbb{C}^n$, $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_r)$ ($A_j \in \text{End}(V), j = 1, \dots, r$) として $(V, \mathbf{A})$ と同一視し、 $(V, \mathbf{A})$ が条件 $(*)$ をみたすことを次で定める。

$$(2.7) \quad \forall i = 1, \dots, r, \forall \tau \in \mathbb{C}, \left(\bigcap_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^r \text{Ker}(A_{i'}) \right) \cap \text{Ker}(A_i + \tau) = \{0\}.$$

また、 $\mathbf{A}$ が条件 $(**)$ をみたすことを次で定める。

$$(2.8) \quad \forall i = 1, \dots, r, \forall \tau \in \mathbb{C}, \left(\sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^r \text{Im}(A_{i'}) \right) + \text{Im}(A_i + \tau) = V.$$

以下で V は有限次元とする。まず、 $(V, \mathbf{A})$ が条件 $(*)$, $(**)$ をみたすならばすべての $\mu \in \mathbb{C}$ で $(mc_\mu(V), mc_\mu(\mathbf{A}))$ も条件 $(*)$, $(**)$ をみたすことが [4] で示されている。さらに middle convolution の合成や既約性について、以下が成り立つ。

Theorem 2.4 ([4, Theorem 3.5]) $(V, \mathbf{A})$ が条件 $(*)$ と $(**)$ を満たすならば、すべての $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ に対して middle convolution の合成で得られる $(mc_{\mu_2} \circ mc_{\mu_1}(V), mc_{\mu_2} \circ mc_{\mu_1}(\mathbf{A}))$ は $(mc_{\mu_1+\mu_2}(V), mc_{\mu_1+\mu_2}(\mathbf{A}))$ と同型になる。そして、すべての $\mu \in \mathbb{C}$ に対して $(mc_{-\mu} \circ mc_\mu(V), mc_{-\mu} \circ mc_\mu(\mathbf{A}))$ は $(V, \mathbf{A})$ と同型になる。

Theorem 2.5 ([4, Corollary 3.6]) $\mathbf{A}$ の作用により V が既約であるならば、 $mc_\mu(V)$ は $mc_\mu(\mathbf{A})$ の作用で既約であるか $\{0\}$ となるかのいずれかである。

ところで、微分方程式系 (2.3) の解 Y と複素数の組 $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ に対して $Z = (x - t_1)^{a_1}(x - t_2)^{a_2} \dots (x - t_r)^{a_r} Y$ とおくと、 Z は以下をみたす。

$$(2.9) \quad \frac{dZ}{dx} = \left(\frac{A_1 + a_1 I_n}{x - t_1} + \frac{A_2 + a_2 I_n}{x - t_2} + \dots + \frac{A_r + a_r I_n}{x - t_r} \right) Z.$$

このことに付随して、addition を以下のように定める。

Definition 2.6 (addition) $(a_1, a_2, \dots, a_r) \in \mathbb{C}^r$ とする。サイズが n の正方行列の組 $(A_1, \dots, A_r)$ に対して、対応 $(A_1, A_2, \dots, A_r) \mapsto (A_1 + a_1 I_n, A_2 + a_2 I_n, \dots, A_r + a_r I_n)$ もしくは付随するフックス型微分方程式系の対応を *addition* とよぶ。

3 坂井・山口による q ミドルコンボリューション

坂井・山口 [12] により導入された q -convolution および q -middle convolution について紹介していく。

$b_1, b_2, \dots, b_N$ を相異なる 0 でない複素数とし、 $\mathbf{B} = (B_\infty; B_1, \dots, B_N)$ を同じサイズの正方行列の組とする。これらに以下の q 差分方程式を付随させる。

$$(3.1) \quad Y(qx) = B(x)Y(x), \quad B(x) = B_\infty + \sum_{i=1}^N \frac{B_i}{1 - x/b_i}.$$

Definition 3.1 (*q-convolution*, [12]) $\mathbf{B} = (B_\infty; B_1, \dots, B_N)$ はサイズが m の正方行列の組とし、 $\lambda \in \mathbb{C}$ とする。サイズが $(N+1)m$ の正方行列の組 $\mathbf{F} = (F_\infty; F_1, \dots, F_N)$ を以下のように定める。

$$(3.2) \quad \begin{aligned} B_0 &= I_m - B_\infty - B_1 - \dots - B_N, \\ F_i &= \begin{pmatrix} O & & & & \\ B_0 & B_1 & \dots & B_i - (1 - q^\lambda)I_m & \dots & B_N \\ & & & O & & \end{pmatrix}_{(i+1)}, \quad (1 \leq i \leq N), \\ \hat{F} &= \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & \dots & B_N \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ B_0 & B_1 & \dots & B_N \end{pmatrix}, \quad F_\infty = I_{(N+1)m} - \hat{F}. \end{aligned}$$

ここでの行列の組の対応 $c_\lambda : (B_\infty; B_1, \dots, B_N) \mapsto (F_\infty; F_1, \dots, F_N)$ を *q-convolution* と呼ぶ。

Definition 3.1 による *q-convolution* から、以下のように線形 *q* 差分方程式系の対応が誘導される。

$$(3.3) \quad \begin{aligned} Y(qx) &= B(x)Y(x) \mapsto \hat{Y}(qx) = F(x)\hat{Y}(x), \\ B(x) &= B_\infty + \sum_{i=1}^N \frac{B_i}{1 - x/b_i}, \quad F(x) = F_\infty + \sum_{i=1}^N \frac{F_i}{1 - x/b_i}. \end{aligned}$$

この対応は、以下の関数 $P_\lambda(x, s)$ を積分核にもつ *q* 積分変換に関係している。

$$(3.4) \quad P_\lambda(x, s) = \frac{(q^{\lambda+1}s/x; q)_\infty}{(qs/x; q)_\infty}, \quad (a; q)_\infty = (1 - a)(1 - qa)(1 - q^2a) \dots$$

より具体的に述べると、以下の定理が *q-convolution* を Definition 3.1 で定めた動機となっている。

Theorem 3.2 ([12, Theorem 2.1])

$Y(x)$ は *q* 差分方程式 (3.1) の解とする。 $b_0 = 0$ とし、定積分の *q* 変形

$$(3.5) \quad \int_0^\infty f(x) d_q x = (1 - q) \sum_{n=-\infty}^\infty q^n f(q^n)$$

を用いて $\hat{Y}(x)$ を以下のように定める。

$$(3.6) \quad \hat{Y}_i(x) = \int_0^\infty \frac{P_\lambda(x, s)}{s - b_i} Y(s) d_q s, \quad (i = 0, \dots, N), \quad \hat{Y}(x) = \begin{pmatrix} \hat{Y}_0(x) \\ \vdots \\ \hat{Y}_N(x) \end{pmatrix}.$$

このとき $\hat{Y}(x)$ は以下の *q* 差分方程式をみたす。

$$(3.7) \quad \hat{Y}(qx) = \left(F_\infty + \sum_{i=1}^N \frac{F_i}{1 - x/b_i} \right) \hat{Y}(x).$$

[12] では (3.6) での無限和が収束しているなどの前提のもとで Theorem 3.2 が示されている。[2] では収束性の議論も加味されている。

ところで、微分方程式の convolution における部分空間と同様に、次がいえる。

Proposition 3.3 ([12]) $(\mathbb{C}^m)^{N+1}$ の部分空間 $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ を以下のように定める。

$$(3.8) \quad \mathcal{K} = \begin{pmatrix} \ker B_0 \\ \vdots \\ \ker B_N \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \ker(\hat{F} - (1 - q^\lambda)I_{(N+1)m}).$$

このとき、 $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ は F -不変である。すなわち、 $k = \infty, 1, \dots, N$ に対して $F_k \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$, $F_k \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ が成り立つ。

q -middle convolution は、 q -convolution から $\mathcal{K} + \mathcal{L}$ による商空間をとることで以下のように定義される。

Definition 3.4 (q -middle convolution, [12]) 商空間 $(\mathbb{C}^m)^{N+1}/(\mathcal{K} + \mathcal{L})$ における F_k ($k = \infty, 1, \dots, N$) の作用を $\overline{F}_k$ ($k = \infty, 1, \dots, N$) と記す。このとき、 q -middle convolution mc_λ を行列の組の対応 $(B_\infty; B_1, \dots, B_N) \mapsto (\overline{F}_\infty; \overline{F}_1, \dots, \overline{F}_N)$ もしくは付随する q 差分方程式の対応として定める。

[12] では addition に対応する ψ_μ ($\mu \in \mathbb{C}$) が、サイズ m' の正方行列の組 $(F_\infty; F_1, \dots, F_N)$ に対して以下のように定められた。

$$(3.9) \quad \psi_\mu : (F_\infty; F_1, \dots, F_N) \mapsto (F_\infty + (1 - q^\mu)I_{m'}; F_1, \dots, F_N).$$

q -middle convolution mc_λ と ψ_λ の合成として

$$(3.10) \quad \overline{\Psi}_\lambda = \psi_\lambda \circ mc_\lambda$$

とおく。[12, Proposition 4.12] にて、(2.7), (2.8) での (*), (**) に類似した条件のもとで以下が示された。

$$(3.11) \quad \overline{\Psi}_\mu \circ \overline{\Psi}_\lambda \simeq \overline{\Psi}_{\log(q^\lambda + q^\mu - 1)/\log q}.$$

これは (1.3) にて述べた式である。

4 q ミドルコンボリューションの再定式化および収束性

§3 では Theorem 3.2 を基にして q -convolution を Definition 3.1 により定めた。ここで、個別の q 差分方程式の解への応用などを見込んで Theorem 3.2 と q -convolution を再定式化する。

まず、Theorem 3.2 での q 積分表示にパラメーター ξ を導入する ([13, 2])。 $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とし、(3.5) を Jackson 積分と呼ばれる次の無限和に置き換える。

$$(4.1) \quad \int_0^{\xi\infty} f(x) d_q x = (1 - q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n \xi f(q^n \xi).$$

そして (3.6) における $\widehat{Y}_i(x)$ を

$$(4.2) \quad \widehat{Y}_i(x) = \int_0^{\xi\infty} \frac{P_\lambda(x, s)}{s - b_i} Y(s) d_q s, \quad (i = 0, \dots, N)$$

に置き換えても Theorem 3.2 に関する [12] での議論がそのまま成り立つことが [2, §2] で示されている。このことが、§1 で述べた q 積分変換に 1 パラメーターを追加するということである。後で述べるが、具体例において ξ を特殊化することにより個別の既知な関数が現れる。

収束性を加味すること、および (3.11) をより自然な形に書き換えることをふまえて q -convolution の再定式化を行う。ここで、取り扱う q 差分方程式系を別の表示で考えることにする。(3.1) では

$$(4.3) \quad Y(qx) = B(x)Y(x), \quad B(x) = B_\infty + \sum_{i=1}^N \frac{B_i}{1 - x/b_i}$$

を導入した。 $B_0 = I_m - B_\infty - B_1 - \dots - B_N$, $b_0 = 0$ とおくと、これは次の式に書き換えられる。

$$(4.4) \quad \frac{Y(qx) - Y(x)}{-x} = \left[\sum_{i=0}^N \frac{B_i}{x - b_i} \right] Y(x).$$

次に (3.4) での $P_\lambda(x, s)$ において $q \rightarrow 1$ の極限を考える。 $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ のとき、 $q \rightarrow 1$ で

$$(4.5) \quad P_\lambda(x, s) = \frac{(q^{\lambda+1}s/x; q)_\infty}{(qs/x; q)_\infty} = \frac{1}{(1 - qs/x)(1 - q^2s/x) \cdots (1 - q^\lambda s/x)} \rightarrow (1 - s/x)^{-\lambda}$$

となり、移行先が Theorem 2.3 での積分核 $(x - s)^{-\lambda}$ と異なる。しかし $x^{-\lambda}(1 - s/x)^{-\lambda} = (x - s)^{-\lambda}$ より、 $x^{-\lambda}$ 倍することで $(x - s)^{-\lambda}$ に移行するように修正できる。

ところで、addition に関して、関数 $Y(x) \in \mathbb{C}^m$ が $Y(qx) = B(x)Y(x)$ の解ならば、 $Z(x) = x^\mu Y(x)$ は $Z(qx) = q^\mu B(x)Z(x)$ の解となる。この q 差分方程式の対応 $B(x) \mapsto q^\mu B(x)$ において、(3.1) の形では変換

$$(4.6) \quad (B_\infty; B_1, \dots, B_N) \mapsto (q^\mu B_\infty; q^\mu B_1, \dots, q^\mu B_N)$$

が得られ、(4.4) の形では以下の変換が得られる。

$$(4.7) \quad (B_0, B_1, \dots, B_N) \mapsto ((1 - q^\mu)I_m + q^\mu B_0, q^\mu B_1, \dots, q^\mu B_N)$$

ゆえに x^μ に関する addition は (4.7) の形で与えるのが自然であろう。

ここで、Definition 3.1 での q -convolution と $x^{-\lambda}$ に関する addition を合成した形で、 q 差分方程式 (4.4) に関連する形で q -convolution を再定式化する。

Definition 4.1 (Reformulation of q -convolution, [3]) $(B_0, B_1, \dots, B_N)$ はサイズが m の正方行列の組とし、 $\lambda \in \mathbb{C}$ とする。サイズが $(N+1)m$ の正方行列の組 $(G_0, G_1, \dots, G_N)$ を以下のように定める。

$$(4.8) \quad \begin{aligned} G_0 &= \begin{pmatrix} q^{-\lambda}B_0 + (1 - q^{-\lambda})I_m & q^{-\lambda}B_1 & \cdots & \cdots & q^{-\lambda}B_N \\ O & O & \cdots & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ G_i &= \begin{pmatrix} O \\ q^{-\lambda}B_0 & \cdots & q^{-\lambda}B_i + (1 - q^{-\lambda})I_m & \cdots & q^{-\lambda}B_N \\ O \end{pmatrix}_{(i+1)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

行列の組の対応 $\tilde{c}_\lambda : (B_0, B_1, \dots, B_N) \mapsto (G_0, G_1, \dots, G_N)$ を q -convolution と呼ぶ。

Definition 3.1 での F_i と比べると $G_i = q^{-\lambda}F_i$ ($i = 1, \dots, N$) が成り立っている。

次に、収束性に注意をした上で Definition 4.1 での q -convolution と q 差分方程式の Jackson 積分解との関係を、[2] でのものを少し書き換えた形で述べる。 $Y(x)$ は q 差分方程式 (4.4) の解であって $b_0 = 0$ とおいた前提で話をすすめる。 K, L は $K \leq L$ をみたす整数とし、関数 $\tilde{Y}_i^{[K,L]}(x)$ ($i = 0, 1, \dots, N$) を

$$(4.9) \quad \tilde{Y}_i^{[K,L]}(x) = (1 - q)x^{-\lambda} \sum_{n=K}^L \frac{P_\lambda(x, s)}{s - b_i} sY(s)|_{s=q^n\xi}$$

で定める。

$$(4.10) \quad \begin{aligned} g^{[K,L]}(x) &= (q - 1)q^{-\lambda}x^{-\lambda} \{P_\lambda(x, q^{K-1}\xi)Y(q^K\xi) - P_\lambda(x, q^L\xi)Y(q^{L+1}\xi)\}, \\ \tilde{Y}^{[K,L]}(x) &= \begin{pmatrix} \tilde{Y}_0^{[K,L]}(x) \\ \vdots \\ \tilde{Y}_N^{[K,L]}(x) \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}^{[K,L]}(x) = \begin{pmatrix} (x - b_0)^{-1}g^{[K,L]}(x) \\ \vdots \\ (x - b_N)^{-1}g^{[K,L]}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおくと、次式が示される。

$$(4.11) \quad \frac{\tilde{Y}^{[K,L]}(qx) - \tilde{Y}^{[K,L]}(x)}{-x} = \left[\sum_{i=0}^N \frac{G_i}{x - b_i} \right] \tilde{Y}^{[K,L]}(x) + \tilde{g}^{[K,L]}(x).$$

$K \rightarrow -\infty, L \rightarrow +\infty$ の極限操作により、以下が成り立つ。

Theorem 4.2 (cf. [2, Corollary 2.3])

$Y(x)$ は q 差分方程式 (4.4) の解とする。各 $j = 0, 1, \dots, N$ について (4.9) での $\tilde{Y}_j^{[K,L]}(x)$ の各成分は $K \rightarrow -\infty, L \rightarrow +\infty$ で収束していると仮定し、

$$(4.12) \quad \tilde{Y}_j(x) = \lim_{\substack{K \rightarrow -\infty \\ L \rightarrow +\infty}} \tilde{Y}_j^{[K,L]}(x), \quad \tilde{Y}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{Y}_0(x) \\ \vdots \\ \tilde{Y}_N(x) \end{pmatrix}$$

とおく。さらに

$$(4.13) \quad \lim_{K \rightarrow -\infty} P_\lambda(x, q^{K-1}\xi)Y(q^K\xi) = 0, \quad \lim_{L \rightarrow +\infty} P_\lambda(x, q^L\xi)Y(q^{L+1}\xi) = 0$$

も仮定する。このとき、 $\tilde{Y}(x)$ は以下の q 差分方程式をみたす。

$$(4.14) \quad \frac{\tilde{Y}(qx) - \tilde{Y}(x)}{-x} = \left[\sum_{i=0}^N \frac{G_i}{x - b_i} \right] \tilde{Y}(x).$$

ここで、 $\tilde{Y}_j(x)$ は以下のように Jackson 積分で表示されることを注意しておく。

$$(4.15) \quad \tilde{Y}_i(x) = x^{-\lambda} \int_0^{\xi\infty} \frac{P_\lambda(x, s)}{s - b_i} Y(s) d_q s.$$

さて、Definition 4.1 での q -convolution をもとにして q -middle convolution を定める。ここで $(\mathbb{C}^m)^{N+1}$ の部分空間 $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ を

$$(4.16) \quad \mathcal{K} = \begin{pmatrix} \ker B_0 \\ \vdots \\ \ker B_N \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \ker(G_0 + G_1 + \cdots + G_N),$$

で定めると、これらは Proposition 3.3 での $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ と同一のものとなっており、 G_k ($k = 0, 1, \dots, N$) の作用で不変である。

Definition 4.3 (q -middle convolution, [3]) 商空間 $(\mathbb{C}^m)^{N+1}/(\mathcal{K} + \mathcal{L})$ における G_k ($k = 0, 1, \dots, N$) の作用を $\overline{G}_k$ ($k = 0, 1, \dots, N$) と記す。このとき、 q -middle convolution $\widetilde{mc}_\lambda$ を行列の組の対応 $(B_0, B_1, \dots, B_N) \mapsto (\overline{G}_0, \overline{G}_1, \dots, \overline{G}_N)$ もしくは付随する q 差分方程式の対応として定める。

この設定のもとでは (3.11) の書き換えとして、(2.7), (2.8) での $(*)$, $(**)$ に類似した条件のもとで以下が成り立つ ([3])。

$$(4.17) \quad \widetilde{mc}_\mu \circ \widetilde{mc}_\lambda \simeq \widetilde{mc}_{\lambda+\mu}.$$

5 q コンボリューションおよび q ミドルコンボリューションの適用例

5.1 q 超幾何方程式

特別な 1 階線形 q 差分方程式とその解から出発して q -convolution により q 超幾何方程式を導出していく。なお、以下に述べることは本質的に [2, §3.1] で書かれていることである。

α, β は相異なる 0 でない複素数とし、

$$(5.1) \quad y(x) = x^\mu (\alpha x; q)_\infty / (\beta x; q)_\infty$$

とおく。これのみたす q 差分方程式は、次の形に書き換えられる。

$$(5.2) \quad \frac{y(qx) - y(x)}{-x} = \left[\frac{B_0}{x} + \frac{B_1}{x - 1/\alpha} \right] y(x), \quad B_0 = 1 - q^\mu, \quad B_1 = q^\mu \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right).$$

1×1 行列の組 (B_0, B_1) に対して q -convolution $\tilde{c}_\lambda$ を施す。 $\tilde{c}_\lambda(B_0, B_1) = (G_0, G_1)$ とおくと、Definition 4.1 から具体形は以下のように記述される。

$$(5.3) \quad G_0 = \begin{pmatrix} q^{-\lambda}B_0 + 1 - q^{-\lambda} & q^{-\lambda}B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - q^{\mu-\lambda} & q^{\mu-\lambda}(1 - \beta/\alpha) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q^{-\lambda}B_0 & q^{-\lambda}B_1 + 1 - q^{-\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q^{-\lambda} - q^{\mu-\lambda} & q^{\mu-\lambda}(1 - \beta/\alpha) + 1 - q^{-\lambda} \end{pmatrix}.$$

これに付随するサイズ 2 の q 差分方程式を

$$(5.4) \quad \frac{\tilde{Y}(qx) - \tilde{Y}(x)}{-x} = \left[\frac{G_0}{x} + \frac{G_1}{x - 1/\alpha} \right] \tilde{Y}(x), \quad \tilde{Y}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{y}_0(x) \\ \tilde{y}_1(x) \end{pmatrix}$$

とおくと、 $\tilde{y}_0(x)$ は以下の単独 2 階 q 差分方程式をみたす。

$$(5.5) \quad (q^{-\lambda}\beta x - q)\tilde{y}_0(x/q) + q^{\lambda-\mu}(\alpha x - q)\tilde{y}_0(qx) - \{(q^{-\mu}\alpha + \beta)x - q - q^{\lambda-\mu+1}\}\tilde{y}_0(x) = 0.$$

上式のパラメーターの取り方を特殊化すると q 超幾何方程式の標準形

$$(5.6) \quad (x - q)g(x/q) + (abx - c)g(qx) - \{(a + b)x - q - c\}g(x) = 0$$

になっている。

ここでの q -convolution に関して Theorem 4.2 での q 積分表示をあてはめると

$$(5.7) \quad \tilde{y}_0(x) = (1 - q)x^{-\lambda} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (q^n \xi)^\mu \frac{(q^{\lambda+n+1}\xi/x, q^n \xi \alpha; q)_\infty}{(q^{n+1}\xi/x, q^n \xi \beta; q)_\infty}$$

が現れる。これは $\mu > 0$, $|q|^{\lambda-\mu}|\alpha/\beta| < 1$ という条件のもとで収束して (5.5) の解となること、Theorem 4.2 の仮定を確認することで示される。

ところで、 ξ に特定の値を代入することで両側級数を片側級数にしてみる。ここで、 $\xi = 1/\alpha$ とおく。 $n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ ならば $(q^n; q)_\infty = 0$ であることを用いると次の式が得られる。

$$(5.8) \quad \tilde{y}_0(x)|_{\xi=1/\alpha} = (1 - q)x^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} (q^n/\alpha)^\mu \frac{(q^{\lambda+n+1}/(\alpha x), q^n; q)_\infty}{(q^{n+1}/(\alpha x), q^n \beta/\alpha; q)_\infty}$$

$$= (1 - q) \frac{q^\mu}{\alpha^\mu} \frac{(q^{\lambda+2}/(\alpha x), q; q)_\infty}{(q^2/(\alpha x), q\beta/\alpha; q)_\infty} x^{-\lambda} {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} q^2/(\alpha x), q\beta/\alpha \\ q^{\lambda+2}/(\alpha x) \end{matrix}; q, q^\mu \right).$$

すなわち、 q 差分方程式 (5.5) の 1 つの解の具体形が、 q -convolution を適用することで得られた。 $\xi = q^{-\lambda}x$ のときも、同様にして $\tilde{y}_0(x)$ を ${}_2\phi_1$ で表すことができる。

5.2 一般化 q 超幾何方程式

§5.1 で得られた q 超幾何方程式に関連する (5.3) にさらに addition と q -middle convolution を施すことで別の方程式を得る。

(5.3) での (G_0, G_1) に対して $x^{\mu'}$ に関する addition を行くと、次の行列の組が得られる。

$$(5.9) \quad \begin{aligned} B'_0 &= \begin{pmatrix} 1 - q^{\mu'+\mu-\lambda} & q^{\mu'+\mu-\lambda}(1 - \beta/\alpha) \\ 0 & 1 - q^{\mu'} \end{pmatrix}, \\ B'_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q^{\mu'-\lambda}(1 - q^\mu) & q^{\mu'}(q^{\mu-\lambda}(1 - \beta/\alpha) + 1 - q^{-\lambda}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

そして、 (B'_0, B'_1) に対して q -middle convolution $\widetilde{m}c_{\lambda'}$ を行う。 $\widetilde{c}_{\lambda'}$ によりサイズ 4 の行列の組が得られるが、 $\dim \ker B'_1 = 1$ のために $\dim \mathcal{K} = 1$ となっており、商空間での適切な基底をとることで $\widetilde{m}c_{\lambda'}$ によりサイズ 3 の行列の組が得られる。これに付随する q 差分方程式は、 ${}_3\phi_2$ に関する一般化 q 超幾何方程式となっている ([3])。

5.3 次数 2 の変異版 q 超幾何方程式

§5.1 でのものとは別の 1 階線形 q 差分方程式とその解から q -middle convolution を適用する。以下に述べることは本質的に [2, §4.1] で書かれていることであるが、見かけが異なっている箇所もある。 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ は相異なる 0 でない複素数とし、

$$(5.10) \quad y(x) = x^\mu \frac{(\alpha_1 x, \alpha_2 x; q)_\infty}{(\beta_1 x, \beta_2 x; q)_\infty}.$$

とおく。このとき、 $y(x)$ は次の線形 q 差分方程式をみたす。

$$(5.11) \quad \frac{y(qx) - y(x)}{-x} = \left[\frac{B_0}{x} + \frac{B_1}{x - 1/\alpha_1} + \frac{B_2}{x - 1/\alpha_2} \right] y(x),$$

$$B_0 = 1 - q^\mu, \quad B_1 = q^\mu \frac{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)}{\alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad B_2 = q^\mu \frac{(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)}{\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1)}.$$

(B_0, B_1, B_2) に対して q -convolution $\widetilde{c}_\lambda$ を施す。 $\widetilde{c}_\lambda(B_0, B_1, B_2) = (G_0, G_1, G_2)$ とおくと、Definition 4.1 から具体形は以下のように記述される。

$$(5.12) \quad \begin{aligned} G_0 &= \begin{pmatrix} 1 - q^{\mu-\lambda} & q^{-\lambda}B_1 & q^{-\lambda}B_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q^{-\lambda}B_0 & q^{-\lambda}B_1 + 1 - q^{-\lambda} & q^{-\lambda}B_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ G_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ q^{-\lambda}B_0 & q^{-\lambda}B_1 & q^{-\lambda}B_2 + 1 - q^{-\lambda} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

これに付随する q 差分方程式は

$$(5.13) \quad \frac{\widetilde{Y}(qx) - \widetilde{Y}(x)}{-x} = \left[\frac{G_0}{x} + \frac{G_1}{x - 1/\alpha_1} + \frac{G_2}{x - 1/\alpha_2} \right] \widetilde{Y}(x), \quad \widetilde{Y}(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{y}_0(x) \\ \widetilde{y}_1(x) \\ \widetilde{y}_2(x) \end{pmatrix}$$

というサイズ3の方程式である。Theorem 4.2 により (5.13) に対して Jackson 積分解が得られるが、収束の条件は $\mu > 0$ かつ $|q^{\lambda-\mu}\alpha_1\alpha_2/(\beta_1\beta_2)| < 1$ である。

ところで、 q -middle convolution を定める際にベクトル空間 $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ が用いられた。ここで扱っている場合では $\mu = 0$ ならば $\dim \mathcal{K} = 1$ であり $\mathcal{K}$ はベクトル ${}^t(1, 0, 0)$ で生成されている。

以下では $\mu = 0$ の場合を考察していく。このとき、(5.11) での B_0 は $B_0 = 0$ をみたし $B_1 = (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)/\{\alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2)\}$, $B_2 = (\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)/\{\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1)\}$ である。(5.13) において $\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_2(x)$ で閉じた式として

$$(5.14) \quad \frac{1}{-x} \begin{pmatrix} \tilde{y}_1(qx) - \tilde{y}_1(x) \\ \tilde{y}_2(qx) - \tilde{y}_2(x) \end{pmatrix} = \left[\frac{\overline{G}_1}{x - 1/\alpha_1} + \frac{\overline{G}_2}{x - 1/\alpha_2} \right] \begin{pmatrix} \tilde{y}_1(x) \\ \tilde{y}_2(x) \end{pmatrix},$$

$$\overline{G}_1 = \begin{pmatrix} q^{-\lambda}B_1 + 1 - q^{-\lambda} & q^{-\lambda}B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q^{-\lambda}B_1 & q^{-\lambda}B_2 + 1 - q^{-\lambda} \end{pmatrix},$$

が得られる。行列の組の対応としては、 $\overline{G}_0$ を零行列とおくことにより $\widetilde{mc}_\lambda(B_0, B_1, B_2) = (\overline{G}_0, \overline{G}_1, \overline{G}_2)$ としてサイズ2の行列の組が得られた。また、(5.14) から $\tilde{y}_2(x)$ などを消去することにより、以下が得られる。

$$(5.15) \quad q^{-\lambda} \left(x - \frac{q^{\lambda+1}}{\beta_1} \right) \left(x - \frac{q^{\lambda+1}}{\beta_2} \right) \tilde{y}_1(x/q) + q^\lambda \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2} \left(x - \frac{1}{\alpha_1} \right) \left(x - \frac{q}{\alpha_2} \right) \tilde{y}_1(qx) \\ - \left[\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2} + 1 \right) x^2 - \left\{ q \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right) + q^\lambda \frac{q\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1\beta_2} \right\} x + \frac{q^{\lambda+1}(1+q)}{\beta_1\beta_2} \right] \tilde{y}_1(x) = 0.$$

この式は、[7] により導入された次数2の変異版 q 超幾何方程式となっている。

Theorem 4.2 が適用できれば Jackson 積分解が得られるが、 $\mu = 0$ であることから収束の条件が成り立っておらず、そのままでは適用できない。ここで扱っている場合では部分和 (4.9) の対応物自体は $K \rightarrow -\infty, L \rightarrow +\infty$ において収束しているが非斉次項は0に収束していない。別途議論を行うことで Jackson 積分解にあたるものが (5.15) 自体ではなく、(5.15) に非斉次項を加えた q 差分方程式をみたすこと、すなわち次が成り立つことが示される。

Proposition 5.1 (cf. [2, Proposition 4.2]) $|q^\lambda\alpha_1\alpha_2/(\beta_1\beta_2)| < 1$ ならば、関数

$$(5.16) \quad \tilde{y}_1(x) = (q-1)\alpha_1 x^{-\lambda} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^n \xi \frac{(q^{\lambda+n+1}\xi/x, q^{n+1}\xi\alpha_1, q^n\xi\alpha_2; q)_\infty}{(q^{n+1}\xi/x, q^n\xi\beta_1, q^n\xi\beta_2; q)_\infty}$$

は収束しており、次の非斉次な q 差分方程式をみたす。

$$(5.17) \quad q^{-\lambda} \left(x - \frac{q^{\lambda+1}}{\beta_1} \right) \left(x - \frac{q^{\lambda+1}}{\beta_2} \right) \tilde{y}_1(x/q) + q^\lambda \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2} \left(x - \frac{1}{\alpha_1} \right) \left(x - \frac{q}{\alpha_2} \right) \tilde{y}_1(qx) \\ - \left[\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2} + 1 \right) x^2 - \left\{ q \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right) + q^\lambda \frac{q\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1\beta_2} \right\} x + \frac{q^{\lambda+1}(1+q)}{\beta_1\beta_2} \right] \tilde{y}_1(x) \\ - q(1-q)(1-q^\lambda) \frac{\alpha_1}{\beta_1\beta_2} x^{1-\lambda} = 0.$$

§5.1 の議論と同様に、(5.16) において $\xi = 1/\alpha_1$, $\xi = 1/\alpha_2$ または $\xi = q^{-\lambda}x$ を代入すると両側級数は片側級数となり、 ${}_3\phi_2$ を用いた級数が現れる。そして、これら3つのうち2つの差をとることにより斉次の次数2の変異版 q 超幾何方程式の解が導出される。詳しくは、類似の場合として [2, §4.1.1] を参照のこと。

6 単独高階線形 q 差分方程式のミドルコンボリューションなどに向けて

単独高階のフックス型微分方程式については、大島 [11] により非整数階微分の考え方を基にして middle convolution に対応する理論が定式化され、さまざまな計算がなされている。ここで、単独高階線形 q 差分方程式の理論の構築が望まれる。[16] では kernel function identity を使うアプローチが提示され、 q ホイン方程式や変異版 q ホイン方程式の q 積分変換への応用がなされた。しかし、このアプローチだけでは q -middle convolution に対応する一般論を構築することは難しいであろう。

また、middle convolution の多変数化が原岡を中心として開発されてきているが ([6])、これの q 変形についても考察されるべきであろう。

References

- [1] 青本 和彦, 直交多項式入門, 数学書房, 2013.
- [2] Arai, Y. and Takemura, K., On q -middle convolution and q -hypergeometric equations, *SIGMA* **19** (2023), paper 037.
- [3] Arai, Y. and Takemura, K., *in preparation*.
- [4] Dettweiler, M. and Reiter, S., An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem. Algorithmic methods in Galois theory, *J. Symbolic Comput.* **30** (2000), 761–798.
- [5] Dettweiler, M. and Reiter, S., Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems, *J. Algebra* **318** (2007), 1–24.
- [6] Haraoka, Y., Middle convolution for completely integrable systems with logarithmic singularities along hyperplane arrangements, *Adv. Studies in Pure Math.* **62** (2012), 109–136.
- [7] Hatano, N., Matsunawa, R., Sato, T. and Takemura, K., Variants of q -hypergeometric equation, *Funkcial. Ekvac.* **65** (2022), 159–190.
- [8] Jimbo, M. and Sakai, H., A q -Analog of the Sixth Painlevé Equation. *Lett. Math. Phys.* **38** (1996), 145–154
- [9] Kajiwara, K., Noumi, M. and Yamada, Y., Geometric aspects of Painlevé equations. *J. Phys. A* **50** (2017), 073001.
- [10] Katz, N. M. *Rigid local systems*, Princeton University Press, 1996.
- [11] Oshima. T., Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations, *MSJ Memoirs* vol. 28, Mathematical Society of Japan, 2012

- [12] Sakai, H. and Yamaguchi, M., Spectral types of linear q -difference equations and q -analog of middle convolution, *Int. Math. Res. Not.* **2017** (2017), 1975–2013.
- [13] Sasaki, S., Takagi, S. and Takemura, K., q -middle convolution and q -Painlevé equation, *SIGMA* **18** (2022), paper 056.
- [14] Takemura, K., Degenerations of Ruijsenaars-van Diejen operator and q -Painleve equations, *J. Integrable Systems* **2** (2017), xyx008.
- [15] Takemura, K., On q -deformations of the Heun equation, *SIGMA* **14** (2018), paper 061.
- [16] Takemura, K., Kernel function, q -integral transformation and q -Heun equations, [arXiv:2309.09341](https://arxiv.org/abs/2309.09341).
- [17] 竹村 剛一, q -middle convolution について, 2023 年度表現論シンポジウム講演集.
- [18] 山口 雅司, 線型 q 差分方程式の rigidity index と q middle convolution, 東京大学修士論文, 2011.