4 次複素一般線型群の既約表現のテンソル積空間における グレブナー基底の特徴

Features of the Gröbner basis in a space of 2-tensors on irreducible representations of the complex general linear group of degree 4

九州大学大学院数理学府　　太田了徳 *1
RYOTOKU OTA
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

Abstract

We will give the Zariski closure of the image of polynomial mappings from the set of all complex square matrices of order n to a tensor product of irreducible representations of the complex general liner group of degree n. In this paper, we give the Zariski closure of the image of polynomial mappings from the set of all complex square matrices of order 4 to a tensor product of spaces of alternating 2-tensors on 4-dimensional complex vector spaces. We also describe features of the Gröbner basis of the ideal defining the Zariski closure.

1 序章

4 次複素正方行列全体 $M_4(\mathbb{C})$ から 4 次複素一般線型群 $GL_4(\mathbb{C})$ の既約表現 $\bigwedge^2 \mathbb{C}^4$ のテンソル積 $\bigwedge^2 \mathbb{C}^4 \otimes \bigwedge^2 \mathbb{C}^4$ への多項式写像を与え, その像のザリスキ閉包を計算する. さらに, ザリスキ閉包のイデアルのグレブナー基底に現れる特徴を述べ, 以下の式

$$I(\alpha, a, b, d) := \sum_{k=1}^{\alpha} s(k) x_{ak+b} x_{-ak+d};\ \alpha, a, b, d \in \mathbb{Z},$$

$$s(k) = \begin{cases} 1 & (k \equiv 0, 1 \mod 3) \\ -1 & (k \equiv 2 \mod 3) \end{cases}$$

を用いてグレブナー基底の 2 次斉次多項式の元を次のように書き直す:

$\frac{1}{2}I(6, 1, 6n-6, 6n+1);\ n = 1, \dots, 6,$
$I(6, 1, 0, 6n+7);\ n = 1, \dots, 4,$
$I(6, 1, 6, 3n^2-3n+19);\ n = 1, \dots, 3,$
$I(6, 1, 6m+6, 6n+25);\ m = 1, 2,\ n = 1, 2,$
$I(6, 1, 24, 37),$

$\frac{1}{2}I(6, 6, n-6, n+36);\ n = 1, \dots, 6.$
$I(6, 6, -5, n+37);\ n = 1, \dots, 4,$
$I\left(6, 6, -4, \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 39\right);\ n = 1, \dots, 3,$
$I(6, 6, m-4, n+40);\ m = 1, 2,\ n = 1, 2,$
$I(6, 6, -1, 42).$

$I(6, 1, 6, 31) + I(6, 6, -5, 42),$
$I(6, 1, 0, 37) + I(6, 6, -4, 41),$
$-I(6, 1, 0, 37) + I(6, 6, -3, 40),$
$I(6, 1, 0, 37) + I(6, 1, 6, 31),$

以下, 1.1 節で問題設定, 1.2 節で問題の背景を述べる. 第 2 章で問題に対する計算結果を示す. 第 3 章では, ザリスキ閉包のイデアルのグレブナー基底に現れる特徴と式 $I(\alpha, a, b, d)$ を用いてグレブナー基底の 2 次斉次多項式の元を書き直す方法を報告する.

*1 〒 819-0395 福岡市西区元岡 744　E-mail: ota.ryotoku.588@s.kyushu-u.ac.jp

1.1 問題

4 次複素正方行列 $A \in M_4(\mathbb{C})$ の成分を $a_{ij} \in \mathbb{C}$ とする．但し $1 \leq i, j \leq 4$ とする．このとき, 36 個の 2 次斉次多項式を以下で定義する: $1 \leq p < q \leq 4$, $1 \leq r < s \leq 4$ に対して,

$$f_{pqrs} = a_{pr}a_{qs} - a_{ps}a_{qr}.$$

そして f_{pqrs} を用いて, $\mathbb{C}^{16} \cong M_4(\mathbb{C})$ から $\mathbb{C}^{36}$ への多項式写像 f を次のように定義する:

$$f : \mathbb{C}^{16} \to \mathbb{C}^{36};\ (a_{ij}) \mapsto (f_{pqrs}).$$

このとき $f(\mathbb{C}^{16}) \subset \mathbb{C}^{36}$ のザリスキ閉包を求めよ.

1.2 問題の背景

4 次複素一般線型群 $GL_4(\mathbb{C})$ の既約表現を $\bigwedge^2 \mathbb{C}^4$ とおく．このとき, $\mathbb{C}$ 線型同型 $\mathbb{C}^{16} \cong M_4(\mathbb{C}), \mathbb{C}^{36} \cong \bigwedge^2 \mathbb{C}^4 \otimes \bigwedge^2 \mathbb{C}^4 \cong M_6(\mathbb{C})$ であるから, 多項式写像 f は

$$f : M_4(\mathbb{C}) \to M_6(\mathbb{C});\ (a_{ij}) \mapsto (b_{kl})$$

とみなせる [2, 3]．ただし, $b_{kl} = f_{pqrs} = a_{pr}a_{qs} - a_{ps}a_{qr}$ である．つまり, 1.1 節で述べた多項式写像 $f : \mathbb{C}^{16} \to \mathbb{C}^{36}$ は, 4 次複素正方行列全体の集合 $M_4(\mathbb{C})$ から 6 次複素正方行列全体の集合 $M_6(\mathbb{C})$ への自然な多項式写像である.

また, n 次複素一般線型群 $GL_n(\mathbb{C})$ の既約表現は, $\mathbb{C}^n$, $\bigwedge^2 \mathbb{C}^n$, ..., $\bigwedge^{n-1} \mathbb{C}^n$ である．よって, 既約表現 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ とテンソル積 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n \otimes \bigwedge^k \mathbb{C}^n$, n 次複素正方行列全体の集合 $M_n(\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}$ 上線形空間としての次元をそれぞれ, $\dim_{\mathbb{C}} \bigwedge^k \mathbb{C}^n$, $\dim_{\mathbb{C}} \bigwedge^k \mathbb{C}^n \otimes \bigwedge^k \mathbb{C}^n$,$\dim_{\mathbb{C}} M_n(\mathbb{C})$ とし, 計算すると以下の通りである．ただし, $n = 1, \ldots, 5$ とする．また, $k = 0$ のとき $\dim_{\mathbb{C}} \bigwedge^0 \mathbb{C}^n = 1$ とする.

k	$\dim_{\mathbb{C}} \bigwedge^k \mathbb{C}^1$	$\dim_{\mathbb{C}} \bigwedge^k \mathbb{C}^1 \otimes \bigwedge^k \mathbb{C}^1$	$\dim_{\mathbb{C}} M_1(\mathbb{C})$
0	${}_1C_0 = 1$	${}_1C_0 \times {}_1C_0 = 1$	1

k	$\dim_{\mathbb{C}} \bigwedge^k \mathbb{C}^2$	$\dim_{\mathbb{C}} \bigwedge^k \mathbb{C}^2 \otimes \bigwedge^k \mathbb{C}^2$	$\dim_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C})$
0	${}_2C_0 = 1$	${}_2C_0 \times {}_2C_0 = 1$	4
1	${}_2C_1 = 2$	${}_2C_1 \times {}_2C_1 = 4$	4

k	$\dim_{\mathbb{C}} \bigwedge^k \mathbb{C}^3$	$\dim_{\mathbb{C}} \bigwedge^k \mathbb{C}^3 \otimes \bigwedge^k \mathbb{C}^3$	$\dim_{\mathbb{C}} M_3(\mathbb{C})$
0	${}_3C_0 = 1$	${}_3C_0 \times {}_3C_0 = 1$	9
1	${}_3C_1 = 3$	${}_3C_1 \times {}_3C_1 = 9$	9
2	${}_3C_2 = 3$	${}_3C_2 \times {}_3C_2 = 9$	9

k	$\dim_{\mathbb{C}} \bigwedge^k \mathbb{C}^4$	$\dim_{\mathbb{C}} \bigwedge^k \mathbb{C}^4 \otimes \bigwedge^k \mathbb{C}^4$	$\dim_{\mathbb{C}} M_4(\mathbb{C})$
0	${}_4C_0 = 1$	${}_4C_0 \times {}_4C_0 = 1$	16
1	${}_4C_1 = 4$	${}_4C_1 \times {}_4C_1 = 16$	16
2	${}_4C_2 = 6$	${}_4C_2 \times {}_4C_2 = 36$	16
3	${}_4C_3 = 4$	${}_4C_3 \times {}_4C_3 = 16$	16

k	$\dim_{\mathbb{C}} \bigwedge^k \mathbb{C}^5$	$\dim_{\mathbb{C}} \bigwedge^k \mathbb{C}^5 \otimes \bigwedge^k \mathbb{C}^5$	$\dim_{\mathbb{C}} M_5(\mathbb{C})$
0	${}_5C_0 = 1$	${}_5C_0 \times {}_5C_0 = 1$	25
1	${}_5C_1 = 5$	${}_5C_1 \times {}_5C_1 = 25$	25
2	${}_5C_2 = 10$	${}_5C_2 \times {}_5C_2 = 10$	25
3	${}_5C_3 = 10$	${}_5C_3 \times {}_5C_3 = 10$	25
4	${}_5C_4 = 5$	${}_5C_4 \times {}_5C_4 = 25$	25

ここで, $\dim_{\mathbb{C}} \bigwedge^k \mathbb{C}^n \otimes \bigwedge^k \mathbb{C}^n \neq 1$, $\dim_{\mathbb{C}} M_n(\mathbb{C}) \neq 1$ とするとき,

$$\dim_{\mathbb{C}} \bigwedge^k \mathbb{C}^n \otimes \bigwedge^k \mathbb{C}^n \neq \dim_{\mathbb{C}} M_n(\mathbb{C})$$

となるような次元が最小の既約表現を考えると, 4 次元複素線型空間 $\mathbb{C}^4$ の 2 次の交代テンソル空間 $\bigwedge^2 \mathbb{C}^4$ である．したがって, $n = 4$, $k = 2$ の場合の問題設定でザリスキ閉包を考える.

2 計算結果

この章では第 1 章で述べた問題に対するザリスキ閉包の計算結果を述べる.

以下, イデアル $I \coloneqq \langle x_1 - f_{1212}, x_2 - f_{1213}, \ldots, x_{36} - f_{3434} \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{36}, a_{11}, \ldots, a_{44}]$ のグレブナー基底を G とする. ただし, 単項式順序は $a_{11} > a_{12} > \cdots > a_{44} > x_1 > x_2 > \cdots > x_{36}$ に関する全次数逆辞書式順序とする. また, ブッフベルガーアルゴリズムを使用する.

計算結果 1. I のグレブナー基底 G は

$$G = \left\{ \begin{array}{l} x_{33}x_{34} - x_{32}x_{35} + x_{31}x_{36}, \\ a_{44}x_{34} - a_{43}x_{35} + a_{42}x_{36}, \ldots, \\ -x_2x_{27}x_{29}x_3x_{32}^2x_7 + \cdots - a_{12}x_1x_{26}^2x_{36}x_6x_9 \end{array} \right\}. \tag{1}$$

計算結果 2. 16 次の消去グレブナー基底 $G_{16} = G \cap \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{36}]$ を計算すると

$$\begin{aligned} G_{16} &= \left\{ \begin{array}{l} x_{33}x_{34} - x_{32}x_{35} + x_{31}x_{36}, \ldots, \\ -x_4x_8x_{10}x_{25}x_{26}x_{29}x_{32} + \cdots - x_1^2x_8^2x_{26}x_{27}x_{33}x_{36} \end{array} \right\} \\ &= \{g_1, \ldots, g_{772}\}. \end{aligned} \tag{2}$$

計算結果 3. 16 次の消去イデアル $I_{16} = \langle G_{16} \rangle$ の共通零点全体は,

$$\boldsymbol{V}(g_1, \ldots, g_{772}) = \left\{ (x_1, \ldots, x_{36}) \in \mathbb{C}^{36} \;\middle|\; \begin{array}{c} g_1(x_1, \ldots, x_{36}) = 0, \\ \vdots \\ g_{772}(x_1, \ldots, x_{36}) = 0 \end{array} \right\}. \tag{3}$$

計算結果 4. $f(\mathbb{C}^{16})$ のザリスキ閉包を $\overline{f(\mathbb{C}^{16})}$ とおく. このとき, $f(\mathbb{C}^{16})$, $\overline{f(\mathbb{C}^{16})}$, $\boldsymbol{V}(g_1, \ldots, g_{772})$ の包含関係は次の通りである:

$$f(\mathbb{C}^{16}) \subset \overline{f(\mathbb{C}^{16})} = \boldsymbol{V}(g_1, \ldots, g_{772}). \tag{4}$$

ここで, 式 (4) が成り立つ理由を述べる. まず, 次の主張が成り立つ [1].

定理 1 (多項式陰関数表示化)
k を無限体とし, $F : k^m \to k^n;\ (t_1, \ldots, t_m) \mapsto (f_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, f_n(t_1, \ldots, t_m))$ を多項式写像とする. さらに, イデアル I を $I = \langle x_1 - f_1, \ldots, x_n - f_n \rangle \subset k[t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_n]$ で定義し, $I_m = I \bigcap k[x_1, \ldots, x_n]$ を m 次の消去イデアルとする. このとき, $\boldsymbol{V}(I_m)$ は像 $F(k^m) \subset k^n$ のザリスキ閉包である.

よって, 定理 1 で $k = \mathbb{C}$, $m = 16$, $n = 36$, 16 次元アフィン空間 $\mathbb{C}^{16}$ と 36 次元アフィン空間 $\mathbb{C}^{36}$ の座標環をそれぞれ $\mathbb{C}[a_{11}, \ldots, a_{44}]$, $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{36}]$, $f_1 = f_{1212}, f_2 = f_{1213}, \ldots, f_{36} = f_{3434}$ とおくと, 式 (1), (2), (3) より, アフィン代数多様体 $\boldsymbol{V}(I_{16}) = \boldsymbol{V}(g_1, \ldots, g_{772})$ を得る. ゆえに, 定理 1 の主張より $f(\mathbb{C}^{16}) \subset \overline{f(\mathbb{C}^{16})} = \boldsymbol{V}(I_{16}) = \boldsymbol{V}(g_1, \ldots, g_{772})$, すなわち $f(\mathbb{C}^{16}) \subset \overline{f(\mathbb{C}^{16})} = \boldsymbol{V}(g_1, \ldots, g_{772})$ が従う.

3 考察

この章では, 16 次の消去グレブナー基底 G_{16} の特徴を述べた後に, それに含まれる 2 次斉次多項式の表示を考える.

3.1 16 次の消去グレブナー基底 G_{16} の特徴

はじめに, 16 次の消去グレブナー基底 G_{16} の特徴は以下の通りである.

- $\#G_{16} = 772$.
- 16 次の消去グレブナー基底 G_{16} の元は斉次多項式である.
- G_{16} の元の内訳は次の通りである.

G_{16} の元	個数
2 次斉次多項式	40
3 次斉次多項式	294
4 次斉次多項式	342
5 次斉次多項式	18
6 次斉次多項式	70
7 次斉次多項式	8

また, 不定元 x_i の重さを $\mathrm{weight}(x_i) = i\ (0 \leq i \leq n)$ で与え, 単項式 $x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}$ の重さを

$$\mathrm{weight}(x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}) = \sum_{i=1}^{n} i j_i$$

と定める. このとき, すべての項が等しい多項式を同重多項式と呼ぶ [4]. 本研究では 16 次の消去グレブナー基底 G_{16} の元は同重多項式であることも分かった. 例えば, $g = x_1x_{12} - x_2x_{11} + x_3x_{10} + x_4x_9 - x_5x_8 + x_6x_7 \in G_{16}$ をとると,

$$\mathrm{weight}(x_1x_{12}) = \mathrm{weight}(-x_2x_{11}) = \mathrm{weight}(x_3x_{10}) = \mathrm{weight}(x_4x_9) = \mathrm{weight}(-x_5x_8) = \mathrm{weight}(x_6x_7) = 13$$

である. よって, g は同重多項式である. また, $g = x_1x_{36} - x_2x_{35} + x_3x_{34} + x_4x_{33} - x_5x_{32} + x_6x_{31} + x_7x_{30} - x_8x_{29} + x_9x_{28} + x_{10}x_{27} - x_{11}x_{26} + x_{12}x_{25} \in G_{16}$ をとると,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{weight}(x_1x_{36}) = \mathrm{weight}(-x_2x_{35}) = \mathrm{weight}(x_3x_{34}) = \mathrm{weight}(x_4x_{33}) = \mathrm{weight}(-x_5x_{32}) = \mathrm{weight}(x_6x_{31}) \\
&= \mathrm{weight}(x_7x_{30}) = \mathrm{weight}(-x_8x_{29}) = \mathrm{weight}(x_9x_{28}) = \mathrm{weight}(x_{10}x_{27}) = \mathrm{weight}(-x_{11}x_{26}) = \mathrm{weight}(x_{12}x_{25}) \\
&= 37
\end{aligned}$$

である. よって, g は同重多項式である.

3.2 16 次の消去グレブナー基底 G_{16} の 2 次斉次多項式

16 次の消去グレブナー基底 G_{16} の 2 次斉次多項式は以下の式を用いて書き直すことができる:

$$I(\alpha, a, b, d) := \sum_{k=1}^{\alpha} s(k) x_{ak+b} x_{-ak+d};\ \alpha, a, b, d \in \mathbb{Z}.$$

ただし,

$$s(k) = \begin{cases} 1 & (k \equiv 0, 1 \mod 3) \\ -1 & (k \equiv 2 \mod 3) \end{cases}$$

とする. 以下, $I(\alpha, a, b, d)$ を用いて 16 次の消去グレブナー基底 G_{16} の 2 次斉次多項式を書き直す.

3.2.1 $\alpha = 3$ の 2 次斉次多項式

40 個の 2 次斉次多項式のうち, $\alpha = 3$ の 2 次斉次多項式は全部で 12 個ある. これらのうち, 次の 6 個

$$x_1x_6 - x_2x_5 + x_3x_4, x_7x_{12} - x_8x_{11} + x_6x_{10}, x_{13}x_{18} - x_{14}x_{17} + x_{15}x_{16},$$
$$x_{19}x_{24} - x_{20}x_{23} + x_{21}x_{22}, x_{25}x_{30} - x_{26}x_{29} + x_{27}x_{28}, x_{31}x_{36} - x_{32}x_{35} + x_{33}x_{34}$$

は以下の式を使って書き直せる:

$$x_{6n-5}x_{6n} - x_{6n-4}x_{6n-1} + x_{6n-3}x_{6n-2};\ n = 1, \ldots, 6.$$

さらに, この式は $I(\alpha, a, b, d)$ を用いて次のように書き直せる:

$$\begin{aligned} x_{6n-5}x_{6n} - x_{6n-4}x_{6n-1} + x_{6n-3}x_{6n-2} &= \sum_{k=1}^{3} s(k) x_{1k+6n-6} x_{-k+6n+1} \\ &= \frac{1}{2} I(6, 1, 6n-6, 6n+1);\ n = 1, \ldots, 6. \end{aligned}$$

また, 残りの 6 個

$$x_1x_{31} - x_7x_{25} + x_{13}x_{19}, x_2x_{32} - x_8x_{36} + x_{14}x_{30}, x_3x_{33} - x_9x_{27} + x_{15}x_{31},$$
$$x_4x_{34} - x_{10}x_{28} + x_{16}x_{22}, x_5x_{35} - x_{11}x_{29} + x_{17}x_{23}, x_6x_{36} - x_{12}x_{30} + x_{28}x_{24}$$

も次の式を使って書き直せる:

$$x_nx_{n+30} - x_{n+6}x_{n+24} + x_{n+12}x_{n+18};\ n = 1, \ldots, 6.$$

さらに, この式は $I(\alpha, a, b, d)$ を用いて書き直せる:

$$\begin{aligned} x_nx_{n+30} - x_{n+6}x_{n+24} + x_{n+12}x_{n+18} &= \sum_{k=1}^{3} s(k) x_{6k+n-6} x_{-6k+n+36} \\ &= \frac{1}{2} I(6, 6, n-6, n+36);\ n = 1, \ldots, 6. \end{aligned}$$

まとめると, 12 個の $\alpha = 3$ の 2 次斉次多項式は 2 個の式で書き直せる:

$$\frac{1}{2} I(6, 1, 6n-6, 6n+1),\ \ \frac{1}{2} I(6, 6, n-6, n+36);\ \ n = 1, \ldots, 6.$$

3.2.2 $\alpha = 6$ の 2 次斉次多項式

$\alpha = 6$ の多項式は全部で 24 個ある. 初めに, 次の 4 個の 2 次斉次多項式

$$x_1x_{12} - x_2x_{11} + x_3x_{10} + x_4x_9 - x_5x_8 + x_6x_7, x_1x_{18} - x_2x_{17} + x_3x_{16} + x_4x_{15} - x_5x_{14} + x_6x_{13},$$
$$x_1x_{24} - x_2x_{23} + x_3x_{22} + x_4x_{21} - x_5x_{20} + x_6x_{19}, x_1x_{30} - x_2x_{29} + x_3x_{28} + x_4x_{27} - x_5x_{26} + x_6x_{25}$$

は以下の式を使って書き直せる:

$$\sum_{k=1}^{6} s(k) x_k x_{-k+6n+7};\ n = 1, \ldots, 4.$$

さらに, このは $I(\alpha, a, b, d)$ を用いて書き直せる:

$$\sum_{k=1}^{6} s(k) x_k x_{-k+6n+7} = I(6, 1, 0, 6n+7);\ n = 1, \dots, 4.$$

次の 3 個の 2 次斉次多項式

$$x_7x_{18} - x_8x_{17} + x_9x_{16} + x_{10}x_{15} - x_{11}x_{14} + x_{12}x_{13}, x_7x_{24} - x_8x_{23} + x_9x_{22} + x_{10}x_{21} - x_{11}x_{20} + x_{12}x_{19},$$
$$x_7x_{36} - x_8x_{35} + x_9x_{33} + x_{10}x_{32} - x_{11}x_{31} + x_{12}x_{30}$$

は以下の式を使って書き直せる:

$$\sum_{k=1}^{6} s(k) x_{k+6} x_{-k+3n^2-3n+19};\ n = 1, \dots, 3.$$

を使って書き直せる. さらに, この式は $I(\alpha, a, b, d)$ を用いて書き直せる:

$$\sum_{k=1}^{6} s(k) x_{k+6} x_{-k+3n^2-3n+19} = I(6, 1, 6, 3n^2 - 3n + 19);\ n = 1, \dots, 3.$$

次の 4 個の 2 次斉次多項式

$$x_{13}x_{30} - x_{14}x_{29} + x_{15}x_{28} + x_{16}x_{27} - x_{17}x_{26} + x_{18}x_{15}, x_{13}x_{36} - x_{14}x_{35} + x_{15}x_{34} + x_{16}x_{33} - x_{17}x_{32} + x_{18}x_{31},$$
$$x_{19}x_{30} - x_{20}x_{29} + x_{21}x_{28} + x_{22}x_{27} - x_{23}x_{26} + x_{24}x_{15}, x_{19}x_{36} - x_{20}x_{35} + x_{21}x_{34} + x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32} + x_{24}x_{31}$$

は以下の式を使って書き直せる:

$$\sum_{k=1}^{6} s(k) x_{k+6m+6} x_{-k+6n+25};\ m = 1, 2,\ n = 1, 2.$$

さらに, この式は $I(\alpha, a, b, d)$ を用いて書き直せる:

$$\sum_{k=1}^{6} s(k) x_{k+6m+6} x_{-k+6n+25} = I(6, 1, 6m+6, 6n+25);\ m = 1, 2,\ n = 1, 2.$$

次の 1 個の 2 次斉次多項式

$$x_{25}x_{36} - x_{26}x_{35} + x_{27}x_{34} + x_{28}x_{33} - x_{29}x_{32} + x_{30}x_{31}$$

は以下の式を使って書き直せる:

$$\sum_{k=1}^{6} s(k) x_{k+24} x_{-k+37}.$$

さらに, この式は $I(\alpha, a, b, d)$ を用いて書き直せる:

$$\sum_{k=1}^{6} s(k) x_{k+24} x_{-k+37} = I(6, 1, 24, 37).$$

次の 4 個の 2 次斉次多項式

$$x_1x_{32} - x_7x_{26} + x_{13}x_{20} + x_{19}x_{14} - x_{25}x_8 + x_{31}x_2, x_1x_{33} - x_7x_{27} + x_{13}x_{21} + x_{19}x_{15} - x_{25}x_9 + x_{31}x_3,$$
$$x_1x_{34} - x_7x_{28} + x_{13}x_{22} + x_{19}x_{16} - x_{25}x_{10} + x_{31}x_4, x_1x_{35} - x_7x_{29} + x_{13}x_{23} + x_{19}x_{17} - x_{25}x_{11} + x_{31}x_5$$

は以下の式を使って書き直せる:

$$\sum_{k=1}^{6} s(k)x_{6k-5}x_{-6k+n+37};\ n=1,\ldots,4.$$

さらに, この式は $I(\alpha,a,b,d)$ を用いて書き直せる:

$$\sum_{k=1}^{6} s(k)x_{6k-5}x_{-6k+n+37} = I(6,6,-5,n+37);\ n=1,\ldots,4.$$

次の 3 個の 2 次斉次多項式

$$x_2x_{33} - x_8x_{27} + x_{14}x_{21} + x_{20}x_{15} - x_{26}x_9 + x_{32}x_3, x_2x_{34} - x_8x_{28} + x_{14}x_{22} + x_{20}x_{16} - x_{26}x_{10} + x_{32}x_4,$$
$$x_2x_{36} - x_8x_{30} + x_{14}x_{24} + x_{20}x_{18} - x_{26}x_{12} + x_{32}x_6$$

は以下の式を使って書き直せる:

$$\sum_{k=1}^{6} s(k)x_{6k-4}x_{-6k+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+39};\ n=1,\ldots,3.$$

さらに, この式は $I(\alpha,a,b,d)$ を用いて書き直せる:

$$\sum_{k=1}^{6} s(k)x_{6k-4}x_{-6k+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+39} = I\left(6,6,-4,\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+39\right);\ n=1,\ldots,3.$$

次の 4 個の 2 次斉次多項式

$$x_3x_{35} - x_9x_{29} + x_{15}x_{23} + x_{21}x_{17} - x_{27}x_{11} + x_{33}x_5, x_3x_{36} - x_9x_{30} + x_{15}x_{24} + x_{21}x_{18} - x_{27}x_{12} + x_{33}x_6,$$
$$x_4x_{35} - x_{10}x_{29} + x_{16}x_{23} + x_{22}x_{17} - x_{28}x_{11} + x_{34}x_5, x_4x_{36} - x_{10}x_{30} + x_{16}x_{24} + x_{22}x_{18} - x_{28}x_{12} + x_{34}x_6$$

は以下の式を使って書き直せる:

$$\sum_{k=1}^{6} s(k)x_{6k+m-4}x_{-6k+n+40};\ m=1,2,\ n=1,2$$

さらに, この式は $I(\alpha,a,b,d)$ を用いて書き直せる:

$$\sum_{k=1}^{6} s(k)x_{6k+m-4}x_{-6k+n+40} = I(6,6,m-4,n+40);\ m=1,2,\ n=1,2.$$

最後に, 次の 1 個の 2 次斉次多項式

$$x_5x_{36} - x_{11}x_{30} + x_{17}x_{24} + x_{23}x_{18} - x_{29}x_{12} + x_{35}x_6$$

は以下の式を使って書き直せる:

$$\sum_{k=1}^{6} s(k)x_{6k-1}x_{-6k+42}.$$

さらに, この式は $I(\alpha,a,b,d)$ を用いて書き直せる:

$$\sum_{k=1}^{6} s(k)x_{6k-1}x_{-6k+42} = I(6,6,-1,42).$$

まとめると, 24 個の $\alpha = 6$ の 2 次斉次多項式は 8 個の式で書き直せる:

$$
\begin{aligned}
&I(6,1,0,6n+7);\ n=1,\dots,4, && (5)\\
&I(6,1,6,3n^2-3n+19);\ n=1,\dots,3, && (6)\\
&I(6,1,6m+6,6n+25);\ m=1,2,\ n=1,2, && (7)\\
&I(6,1,24,37),\\
&I(6,6,-5,n+37);\ n=1,\dots,4,\\
&I\left(6,6,-4,\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+39\right);\ n=1,\dots,3,\\
&I(6,6,m-4,n+40);\ m=1,2,\ n=1,2, && (8)\\
&I(6,6,-1,42).
\end{aligned}
$$

3.2.3 $\alpha = 8$ の 2 次斉次多項式

$\alpha = 8$ の 2 次斉次多項式は以下の 3 個である:

$$x_1x_{36}+x_6x_{31}-x_8x_{29}+x_9x_{28}+x_{10}x_{27}-x_{11}x_{26}+x_{13}x_{24}+x_{18}x_{19}, \tag{9}$$

$$x_1x_{36}+x_3x_{34}+x_4x_{33}+x_6x_{31}-x_8x_{29}-x_{11}x_{26}+x_{14}x_{23}+x_{17}x_{20}, \tag{10}$$

$$-x_1x_{36}+x_2x_{35}+x_5x_{32}-x_6x_{31}-x_9x_{28}-x_{10}x_{27}+x_{15}x_{22}+x_{16}x_{21}. \tag{11}$$

これらを式 (5), (6), (8) を使って書き直す.
はじめに, 式 (5) に $m = 0, n = 1$, 式 (6) に $n = 5$ を用いると,

$$I(6,1,6,31), I(6,6,-5,42)$$

である. これらの和を計算すると

$$
\begin{aligned}
I(6,1,6,31)+I(6,6,-5,42) &= \sum_{k=1}^{6} s(k)x_{k+6}x_{-k+31} + \sum_{k=1}^{6} s(k)x_{6k-5}x_{-6k+42}\\
&= x_1x_{36}+x_6x_{31}-x_8x_{29}+x_9x_{28}+x_{10}x_{27}-x_{11}x_{26}+x_{13}x_{24}+x_{18}x_{19}
\end{aligned}
$$

となり, 式 (9) を得る. よって, 式 (9) は

$$x_1x_{36}+x_6x_{31}-x_8x_{29}+x_9x_{28}+x_{10}x_{27}-x_{11}x_{26}+x_{13}x_{24}+x_{18}x_{19} = I(6,1,6,31)+I(6,6,-5,42)$$

と書き直せる.
次に, 式 (5) に $n = 5$, 式 (8) に $m = 0, n = 1$ を用いると

$$I(6,1,0,37), I(6,6,-4,41)$$

である. これらの和を計算すると

$$
\begin{aligned}
I(6,1,0,37)+I(6,6,-4,41) &= \sum_{k=1}^{6} s(k)x_k x_{6l+7-k} + \sum_{k=1}^{6} s(k)x_{m-4+6k}x_{n+40-6k}\\
&= x_1x_{36}+x_3x_{34}+x_4x_{33}+x_6x_{31}-x_8x_{29}-x_{11}x_{26}+x_{14}x_{23}+x_{17}x_{20}
\end{aligned}
$$

となり, 式 (10). したがって, 式 (10) は

$$= x_1x_{36} + x_3x_{34} + x_4x_{33} + x_6x_{31} - x_8x_{29} - x_{11}x_{26} + x_{14}x_{23} + x_{17}x_{20} = I(6,1,0,37) + I(6,6,-4,41)$$

と書き直せる.

最後に, 式 (8) に $m = 1, n = 0$, 式 (5) に $n = 5$ を用いると

$$I(6,6,-3,40), I(6,1,0,37)$$

である. これらの差を計算すると

$$I(6,6,-3,40) - I(6,1,0,37) = \sum_{k=1}^{6} s(k)x_{6k-3}x_{-6k+40} - \sum_{k=1}^{6} s(k)x_kx_{-k+37}$$
$$- x_1x_{36} + x_2x_{35} + x_5x_{32} - x_6x_{31} - x_9x_{28} - x_{10}x_{27} + x_{15}x_{22} + x_{16}x_{21}$$

となり, 式 (11) を得る. したがって, 式 (11) は

$$-x_1x_{36} + x_2x_{35} + x_5x_{32} - x_6x_{31} - x_9x_{28} - x_{10}x_{27} + x_{15}x_{22} + x_{16}x_{21} = I(6,6,-3,40) - I(6,1,0,37)$$

と書き直せる. まとめると, 3 個の $\alpha = 8$ の 2 次斉次多項式は式 (5), (6), (8) を用いて書き直せる:

$$I(6,1,6,31) + I(6,6,-5,42),\ I(6,1,0,37) + I(6,6,-4,41),\ -I(6,1,0,37) + I(6,6,-3,40).$$

3.2.4 $\alpha = 12$ の 2 次斉次多項式

$\alpha = 12$ の 2 次斉次多項式は 1 個である:

$$g = x_1x_{36} - x_2x_{35} + x_3x_{34} + x_4x_{33} - x_5x_{32} + x_6x_{31} + x_7x_{30} - x_8x_{29} + x_9x_{28} + x_{10}x_{27} - x_{11}x_{26} + x_{12}x_{25}. \quad (12)$$

これを式 (5), (7) を使って書き直す. 式 (5) に $n = 5$, 式 (7) に $m = 0, n = 1$ を用いると

$$I(6,1,0,37), I(6,1,6,31)$$

である. これらの和を計算すると

$$I(6,1,0,37) + I(6,1,6,31) = \sum_{k=1}^{12} s(k)x_kx_{-k+37} = g$$

となり, 式 (12) を得る. まとめると, $\alpha = 12$ の 2 次斉次多項式は式 (5), (7) を用いて書き直せる:

$$I(6,1,0,37) + I(6,1,6,31).$$

参 考 文 献

[1] D. Cox, J. Little and D. O'Shea. *Ideals, Varietices, and Algorithms*, 4th edition, Springer-Verlag, New York, 2015.

[2] J.P.S. Kung, G.-C. Rota and C.H. Yan. *COMBINATORICS: The Rota Way*, Cambridge University Press, 2009.

[3] 山本哲朗. 『行列解析の基礎』, サイエンス社, SGC ライブラリ 79, 2010.

[4] 森川寿. 『不変式論』, 紀伊國屋書店, 紀伊國屋数学叢書 11, 1977.