Local cohomologyに対するネター作用素とホロノミーD-加群

Noether operators for local cohomology and holonomic D-modules

新潟大学大学院自然科学研究科　　田島慎一[*1]
TAJIMA, Shinichi
Graduate School of Science and Technology,
Niigata University

Abstract

Local cohomology classes associated with a possibly positive dimensional primary ideal in polynomial rings are considered. An effective method is shown for describing such local cohomology classes. Some applications to the study of holonomic D-modules associated with roots of the b-function of a hypersurface with non-zerodimensional singularities are given.

1　序

一般にホロノミー D-加群は, その台の generic point において局所的には. local cohomology のなす層の有限個の直和と D-加群として同型となる. これだけでは分かりにくいかとも思うので, すこし説明を加える.

複素多様体 X 上, 正則函数のなす層を $\mathcal{O}_X$, 正則函数を係数に持つ線形偏微分作用素のなす環の層を $\mathcal{D}_X$ とおく. $\mathcal{M}$ は, X 上のホロノミー $\mathcal{D}_X$-加群であるとする. $\mathcal{M}$ の台を $\mathrm{supp}(\mathcal{M})$ で表す. このとき $\mathrm{supp}(\mathcal{M})$ の Whitney stratification $\cup S_\alpha$ で, $\mathcal{M}$ の derived category における解層の各 cohomology が, 各 stratum 上で, 有限次元で locally constant となるものが存在する ([5]). 特に, S_α が最大次元 (より正確には孤立成分) であるような stratum であれば, local に

$$\text{(i)}\ \ S_\alpha = \mathrm{supp}(\mathcal{M}),\ \ \text{(ii)}\ \ \mathrm{Ch}(\mathcal{M}) = T^*_{S_\alpha}(X)$$

を満たす. 点 $p \in S_\alpha$ の X における近傍 U を適当にとれば, ホロノミー $\mathcal{D}_X$-加群 $\mathcal{M}$ は近傍 U において, smooth な submanifold $S_{\alpha\cap U}$ に台をもつ local cohomology のなす層 $\mathcal{B}_{S_\alpha\cap U|X\cap U} = \mathcal{H}^{\mathrm{codim}(S_\alpha)}_{S_\alpha\cap U}(\mathcal{O}_{X\cap U})$ の有限個の直和に $\mathcal{D}_X$-加群として同型である:

$$\mathcal{M}|U \cong \mathcal{B}_{S_\alpha\cap U|X\cap U} \oplus \mathcal{B}_{S_\alpha\cap U|X\cap U} \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_{S_\alpha\cap U|X\cap U}.$$

従って. ホロノミー D-加群となることが予め分かっているような線形偏微分方程式系の構造を解析する際は, 未知函数の空間として subvariety に台を持つような local cohomology の層を想定し, その層に属すような local cohomology classes で与えられた線形偏微分方程式系を満たすものを求めることが重要になる. つなり, local cohomology を解析学の対象として扱い, 偏微分方程式系を解くことになる. 一般には, local

[*1] 〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050　E-mail: tajima@emeritus.niigata-u.ac.jp

cohomology の台となる subvariety として, 特異点を含むような一般的な suvvariety を想定しておく必要がある.

本稿では, D-加群の理論とイデアルの零次元化を組み合わせることで, 多項式環における準素イデアルが定める local cohomology に対しネター作用素の概念を導入できることを示す. ネター作用素の応用として, ホロノミー D-加群の local cohomology 解を求める計算法を紹介する.

2 ネター作用素

$\mathfrak{p}$ は有理数体 $K=\mathbb{Q}$ を係数とする多項式環 $K[x]=K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ の素イデアル, $\mathfrak{q}\subset K[x]$ は $\mathfrak{p}$-準素イデアルとする. 集合 $y=\{y_1,y_2,\ldots,y_d\}\subset x=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ は maximally independent set modulo $\mathfrak{p}$ とする. d はイデアル $\mathfrak{p}$. の次元である. $z=\{z_1,z_2,\ldots,z_{n-d}\}=x-y\subset x=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ とおく.

イデアル $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ の環 $K(y)[z]$. への拡大を $\mathfrak{p}^e=\mathfrak{p}K(y)[z]$, $\mathfrak{q}^e=\mathfrak{q}K(y)[z]$ とおく. このとき $\mathfrak{p}^e$, $\mathfrak{q}^e$ は $K(y)[z]$ において零次元である.

Local cohomology $H^{n-d}_{\mathfrak{p}^e}(K(y)[z])$ を

$$H^{n-d}_{\mathfrak{p}^e}(K(y)[z])=\lim_{k\to\infty}\mathrm{Ext}^{n-d}_{K(y)[z]}\left(K(y)[z]/(\mathfrak{p}^e)^k,K(y)[z]\right)$$

で定める.

注意 1 $\mathfrak{p}^e\subset K(y)[z]$ は零次元であるので, イデアル $\mathfrak{p}^e$ は $n-d$ 個の多項式で生成される. 従って, local cohomology $H^{n-d}_{\mathfrak{p}^e}(K(y)[z])$ の要素は complete intersection である場合と同様に Grothendiek symbol を使って表現することができる.

注意 2 Variety $V(\mathfrak{p})\subset X=\mathbb{C}^n$ に台を持つ 解析的 local cohomology の層を $\mathcal{B}_{V(\mathfrak{p})|X}$ とおく. このとき $H^{n-d}_{\mathfrak{p}^e}(K(y)[z])$ に属す local cohomology class は, $V(\mathfrak{p})$ の open dense subset で層 $\mathcal{B}_{V(\mathfrak{p})|X}$ の section を与える.

イデアル $\mathfrak{p}^e=\mathfrak{p}K(y)[z]$, $\mathfrak{q}^e=\mathfrak{q}K(y)[z]$ に対し

$$\begin{aligned} H_{\mathfrak{p}^e} &= \{\psi\in H^{n-d}_{\mathfrak{p}^e}(K(y)[z])\mid p\psi=0,\forall p\in\mathfrak{p}^e\},\\ H_{\mathfrak{q}^e} &= \{\psi\in H^{n-d}_{\mathfrak{p}^e}(K(y)[z])\mid q\psi=0,\forall q\in\mathfrak{q}^e\}\end{aligned}$$

と定める. ホモロジー代数を使うと

$$\begin{aligned} H_{\mathfrak{p}^e} &\cong Hom_{K(y)[z]}\left(K(y)[z]/\mathfrak{p}^e,H^{n-d}_{\mathfrak{p}^e}(K(y)[z])\right),\\ H_{\mathfrak{q}^e} &\cong Hom_{K(y)[z]}\left(K(y)[z]/\mathfrak{q}^e,H^{n-d}_{\mathfrak{p}^e}(K(y)[z])\right)\end{aligned}$$

と表現できる.

$K(y)[z]$ に係数を持つ偏微分作用素環 $\mathcal{D}^e=K(y)[z,\frac{\partial}{\partial z}]$ を考える. 係数環の拡大 $K(y)[z]\subset\mathcal{D}^e$ により

$$\begin{aligned} H_{\mathfrak{p}^e} &\cong Hom_{D^e}\left(D^e/D^e\mathfrak{p}^e,H^{n-d}_{\mathfrak{p}^e}(K(y)[z])\right),\\ H_{\mathfrak{q}^e} &\cong Hom_{D^e}\left(D^e/D^e\mathfrak{q}^e,H^{n-d}_{\mathfrak{p}^e}(K(y)[z])\right)\end{aligned}$$

を得る. 左 D^e-加群 $M_{\mathfrak{p}^e}$, $M_{\mathfrak{q}^e}$ を

$$M_{\mathfrak{p}^e}=D^e/D^e\mathfrak{q}^e,\ M_{\mathfrak{q}^e}=D^e/D^e\mathfrak{q}^e,$$

で定める.

左 $\mathcal{D}^e$-加群としての準同型写像全体 $Hom_{D^e}(M_{\mathfrak{q}^e}, M_{\mathfrak{p}^e})$ を, $H_{\mathfrak{q}^e}$ の極大独立集合 y に関する Noetherian space と呼ぶことにする. Noetherian space は, 右 $K(y)[z]/\mathfrak{p}^e$-加群の構造を持つ. Noetherian space の各要素は, D^e に属す線型偏微分作用素 (の同値類) により表現できる.

Noetherian space $Hom_{D^e}(M_{\mathfrak{q}^e}, M_{\mathfrak{p}^e})$ の体 $K(y)[z]/\mathfrak{p}^e$ 上のベクトル空間としての基底を表現する線形偏微分作用素の組を Noetherian basis と呼ぶことにする.

自然な写像

$$Hom_{D^e}(M_{\mathfrak{q}^e}, M_{\mathfrak{p}^e}) \times H_{\mathfrak{p}^e} \longrightarrow H_{\mathfrak{q}^e}$$

から明らかなように, $H_{\mathfrak{q}^e}$ に属す local cohomology class は, $H_{\mathfrak{p}^e}$ に属す local cohomology と Noetherian basis, 即ち線形偏微分作用素を用いて表すことができる.

注意 3 $\{R_1, R_2, \cdots, R_m\}$ は $H_{\mathfrak{q}^e}$ の極大独立集合 y に関する Noetherian basis であるとする. これらの偏微分作用素の形式随伴を $L_1, L_2, \cdots, L_m$ で表す. このとき, $\{L_1, L_2, \cdots, L_m\}$ は Ehrenprise-Palamodov の意味の Noetherian 作用素を与える. 即ち, 多項式 $h(x) \in K[x]$ に対し, h を $K(y)[z]$ の要素とみなしたとき $L_1h, L_2h, \cdots, L_mh$ が $K(y)[z]$ における素イデアル $\mathfrak{p}^e$ に属すことは h が準素イデアル $\mathfrak{q} \subset K[x]$ に属すことの必要十分条件を与える.

論文 [15, 17, 18, 19, 20, 21] では, 零次元準素イデアルが定める local cohomology に対するネター作用素とその応用を扱っている. 論文 [10, 11, 12, 13] では計算代数の観点から多項式環におけるネター作用素の計算法, 応用等について論じている.

3 ホロノミー D-加群への応用

$\tilde{b}_f(s)$ は, 多項式 $f(x) \in K[x] = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ の reduced b-function であるとする. D は Weyl 代数 $K[x, \frac{\partial}{\partial x}]$, $Ann_{D[s]}(f^s)$ は f の $D[s] = K[x, \frac{\partial}{\partial x}][s]$ における s-parametric annjhilator を表すとする.

複素数 β に対しイデアル

$$I_\beta = Ann_{D[s]}(f^s) + D[s](f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) + D[s](s - \beta)$$

を用いて, D-加群 M_β を $M_\beta = D[s]/I_\beta$ で定める.

超曲面 $S = \{x \in \mathbb{C}^n \mid f(x) = 0\}$ の特異点集合を $\mathrm{Sing}(S)$ で表す. 複素数 β が $\tilde{b}_f$ の根でない場合, $I_\beta = \langle 1 \rangle$ であり, M_β は $M_\beta = 0$ 即ち trivial である. 複素数 β が $\tilde{b}_f$ の根の場合, M_β は $\mathrm{supp}(M) \subset \mathrm{Sing}(S)$ を満たすホロノミー D-加群となる.

この節では, ネター作用素を用いて reduced b-function に付随するホロノミー D-加群の local cohomology 解を求める計算法を紹介する.

例 $f(x, y, z) = xy^3 + z^2$ とする. イデアル $\langle f, J_f \rangle$ はヤコビイデアル $J_f = \langle xy^2, y^3, z \rangle \subset K[x, y, z]$ と等しい. 超曲面 $S = \{(x, y, z) \in X \mid f(x, y, z) = 0\}$ の特異点は

$$\mathrm{Sing}(S) = \{(x, y, z) \in X \mid y = z = 0, x \in \mathbb{C}\}$$

である. ただし $X = \mathbb{C}^3$ とおいた. 故, $\{x\} \subset \{x, y, z\}$ はイデアル $\langle f, J_f \rangle$ の極大独立集合である.

$\langle f, J_f \rangle$ の拡大は $\langle f, J_f \rangle^e = \langle y^2, z \rangle \subset K(x)[y, z]$ である. $\mathfrak{q} = \langle y^2, z \rangle \subset K[x, y, z]$ とおく, その associated prime は明らかに $\sqrt{\mathfrak{q}} = \langle y, z \rangle \subset K[x, y, z]$ であり, $H_{\mathfrak{q}^e}$ の Noetherian basis は $\{1, (-\frac{\partial}{\partial y})\}$ で与えられる.

$R_0 = 1,\ R_1 = (-\frac{\partial}{\partial y})$ とおき $H_{\mathfrak{p}}(K[x, y, z])$ に属す local cohomology class ϱ_0, ϱ_1 を

$$\varrho_0 = R_0 \left[\begin{array}{c} 1 \\ yz \end{array} \right], \ \varrho_1 = R_1 \left[\begin{array}{c} 1 \\ yz \end{array} \right]$$

で定める．このとき $\Sigma^1 = V(y,z) \subset X$ に台を持つ local cohomology の層 $\mathcal{B}_{\Sigma^1|X}$ の section τ であり $f\tau = J\tau = 0$ をみたすものは, 正則函数 $h_0(x), h_1(x)$ を用いて

$$\tau = \varrho_0 h_0(x) + \varrho_1 h_1(x)$$

と表される

多項式 f の s-parametric annihilator $Ann_{D[s]}(f^s)$ のグレブナ基底は $\{E, B, A_1, A_2\}$ で与えられる．ただし

$$\begin{aligned} E \ &= 6s - 2y\tfrac{\partial}{\partial y} - 3z\tfrac{\partial}{\partial z}, \ B = 3x\tfrac{\partial}{\partial x} - y\tfrac{\partial}{\partial y,}, \\ A_1 &= 2z\tfrac{\partial}{\partial x} - y^3\tfrac{\partial}{\partial z}, \qquad A_2 = 2z\tfrac{\partial}{\partial y} - 3xy^2\tfrac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

とおいた．偏微分作用素 A_1, A_2 は $D[s]\langle f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\rangle$ に属すことが容易に判る．偏微分方程式系 $P\tau = 0, \ \forall P \in Ann_{D[s]}(f^s)$ をみたす層 $\mathcal{B}_{\Sigma^1|X}$ の section で

$$\tau = \varrho_0 h_0(x) + \varrho_1 h_1(x)$$

なる形のものを求めるには, 偏微分方程式系

$$E\tau = B\tau = 0$$

を解けば良いことになる．

さてここで local cohomology class $\left[\begin{array}{c} 1 \\ yz \end{array} \right]$ は

$$y \left[\begin{array}{c} 1 \\ yz \end{array} \right] = z \left[\begin{array}{c} 1 \\ yz \end{array} \right] = 0$$

を満たすことに注意し

$$E = 6s + 5 + 2(-\frac{\partial}{\partial y})y + 3(-\frac{\partial}{\partial z})z, \ B = 3x\frac{\partial}{\partial x} + 1 + (-\frac{\partial}{\partial y})y$$

と書き換える. 次に, イデアル $D[s](\langle y, z\rangle$ を法とし, 偏微分作用素の積の計算を行う．

$$\begin{array}{rcll} ER_0 &=& R_0(6s+5), \ BR_0 = R_0(3x\frac{\partial}{\partial x} + 1) & \mod D[s]\langle y, z\rangle, \\ ER_1 &=& (6s+5)(-\frac{\partial}{\partial y}) + 2(-\frac{\partial}{\partial y}) = R_1(6s+7) & \mod D[s]\langle y, z\rangle, \\ BR_1 &=& 3x\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{\partial}{\partial y}) + 2(-\frac{\partial}{\partial y}) = R_1(3x\frac{\partial}{\partial x} + 2) & \mod D[s]\langle y, z\rangle \end{array}$$

を得る．

(1) $\tau_0 = \varrho_0 h_0(x)$ ($= R_0 \left[\begin{array}{c} 1 \\ yz \end{array} \right] h_0(x)$) とおく．

$$E\tau_0 = \varrho_0(6s+5)h_0(x), \ B\tau_0 = \varrho_0(3x\tfrac{\partial h_0}{\partial x}(x) + h_0(x))$$

より, 次を得る．

$$6s+5=0,\ \tau_0 = cx^{-\frac{1}{3}}\begin{bmatrix}1\\ yz\end{bmatrix},\ c\in\mathbb{C}.$$

(2) $\tau_1 = \varrho_1 h_1(x)\ (= R_1\begin{bmatrix}1\\ yz\end{bmatrix} h_1(x))$ とおく.

$$E\tau_1 = \varrho_0(6s+7)h_1(x),\ B\tau_1 = \varrho_1(3x\tfrac{\partial h_1}{\partial x}(x)+2h_1(x))$$

より, 次を得る.

$$6s+7=0,\ \tau_1 = cx^{-\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}1\\ y^2z\end{bmatrix},\ c\in\mathbb{C}.$$

多項式 f の s-parametric annihilator と準素イデアルの Noether 作用素の積の計算を, イデアル $D[s]\langle y,z\rangle$ を法として行うことで, もともとは 3 変数の偏微分方程式系の問題を, 準素イデアルの極大独立集合の要素ある x を独立変数とした常微分方程式系の問題に書き換えている. この簡略化により得られた常微分方程式系を解くことで, local cohomology 解を求めていることに注目されたい.

$\Sigma^0 = \{(0,0,0)\}$ とおき $S^1 = \Sigma^1 - \Sigma^0$ と定める. Local cohomology class τ_0 and τ_1 は stratum $S^1 = \Sigma^1 - \Sigma^0$ 上非自明な monodromy を持つ多価解である. これらは Σ^0 上では定義されない. Variety Σ^1 の generic points である S^1 での transverse Milnor number は 2 である. したがって stratum S^1 上の local cohomology 解は全て求めたことになる.

Lagrangian $T^*_{\Sigma^1}X$ 上の microlocal b-function は

$$b_{T^*_{\Sigma^1}X}(s) = (s+\tfrac{5}{6})(s+\tfrac{7}{6})$$

である. Roots $-\frac{5}{6}, -\frac{7}{6}$ に対するホロノミー $\mathcal{D}_X$-加群を $\mathcal{M}_{-\frac{5}{6}}, \mathcal{M}_{-\frac{7}{6}}$ で表す. 台と特性多様体はそれぞれ

$$\mathrm{supp}(\mathcal{M}_{-\frac{5}{6}}) = \mathrm{supp}(\mathcal{M}_{-\frac{7}{6}}) = \Sigma^1,$$

$$\mathrm{Ch}(\mathcal{M}_{-\frac{5}{6}}) = \mathrm{Ch}(\mathcal{M}_{-\frac{7}{6}}) = T^*_{\Sigma^1}X \cup T^*_{\Sigma^0}X$$

で与えられる.

柏原の結果 [5, Theorem 3.7] により, 原点 Σ^0 に台を持つホロノミー D-加群が存在する可能性が分かる. 論文 [25] では Σ^0 に台を持つ local cohomologu 解を求める事で, 方程式系を特定した. ここでは数式処理を用いることで残されたホロノミー D-加群を求める方法を紹介する.

アルゴリズム **sup_cgsw**([27]) に $Ann_{D[s]}(f^s) + D[s]\langle f, J_f\rangle$ を入力し, 条件 $(6s+5)(6s+7)\neq 0$ の下で, このアルゴリズムを実行する. このとき **sup_cgsw** は, b-関数が $(6s+5)(6s+7)=0$ 以外に根を持つとき, その根の値と対応するホロノミー D-加群を定めるイデアルのグレブナ基底を返す. この例の場合 **sup_cgsw** の出力は

$$[[2s+3],[x,y^3,z,y\tfrac{\partial}{\partial y}+3]]$$

である.

この結果は $-\frac{3}{2}$ が reduced b-function の根であり, 付随するホロノミー D-加群は

$$\mathcal{M}_{-\frac{3}{2}} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X(x,y^3,z,y\tfrac{\partial}{\partial y}+3)$$

であることを意味する. Lagrangian $T^*_{\Sigma^0}X$ の microlocal b-function は $b_{T^*_{\Sigma^0}X}(s) = s + \frac{3}{2}$ である. $\mathcal{M}_{-\frac{3}{2}}$ の台と特性多様体は, それぞれ

$$\mathrm{supp}(\mathcal{M}_{-\frac{3}{2}}) = \Sigma^0,\ \mathrm{Ch}(\mathcal{M}_{-\frac{3}{2}}) = T^*_{\Sigma^0}X$$

である. Local cohomology 解は

$$c \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \\ xy^3z \end{array} \right],\ c \in \mathbb{C}$$

で与えられる.

例 (swallows tail) $f = 9x^4z - 8x^3y^2 + 6x^2z^2 - 24xy^2z + 16y^4 + z^3$
イデアル (f, J_f) の準素イデアル分解は $(f, J_f) = Q_1 \cap Q_2$ で与えられる. ここで

$$Q_1 = (y, 3x^2 + z),\ Q_2 = (3x^2z^2 - 2y^4 - z^3, x^3 + 3xz - 4y^2, 5x^2z - 4xy^2 - z^2)$$

である. 対応する素イデアルは $P_1 = (y, 3x^2 + z),\ P_2 = (x^2 - z, xz - y^2)$ で与えられる.

Swallows tail の定義多項式 f は weight vector が $(\frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12})$ の擬斉次多項式である., イデアル Q_1, Q_2, P_1, P_2 は全て weighted homogeneous な多項式で生成されていることに注意しておく.

アルゴリズム **para_ann**([8, 9]) を用いて $Ann_{D[s]}(f^s)$ のグレブナ基底を求めると $\{E, B_1, B_2, A\}$ を得る (0.0935sec). ここで

$$\begin{array}{rcl} E &=& 2x\dfrac{\partial}{\partial x} + 3y\dfrac{\partial}{\partial y} + 4z\dfrac{\partial}{\partial z} - 12s, \\ B_1 &=& (x^2 + z)\dfrac{\partial}{\partial x} + 3xy\dfrac{\partial}{\partial y} + (-4xz + 8y^2)\dfrac{\partial}{\partial z,}, \\ B_2 &=& 8y\dfrac{\partial}{\partial x} + (9x^2 + 3z)\dfrac{\partial}{\partial y} + 16xy\dfrac{\partial}{\partial z}, \\ A &=& (9x^4 + 12x^2z - 24xy^2 + 3z^2)\dfrac{\partial}{\partial y} + (16x^3y + 48xyz - 64y^3)\dfrac{\partial}{\partial z} \end{array}$$

である. 偏微分作用素 A は $D[s](f, J_f)$ に属す. **newcgsw1**([8, 9]) を用いて, 超曲面の redeced b-function と付随するホロノミー D-加群を求めると, $\tilde{b}_f(s) = (s+1)(4s+3)(4s+5)(6s+5)(6s+7)$ を得る (0.1875sec).

因子 $4s+3, 4s+5$ に対するホロノミー D-加群は原点に台を持つことが直ちにわかる. 因子 $s+1, 6s+5, 6s+7$ に対するホロノミー D-加群は 1 次元の variety に台を持つ. 因子 $6s + 5$ に対するホロノミー D-加群のグレブナ基底は 20 個の偏微分作用素からなりその中には 5 階の偏微分作用素が含まれている. 因子 $6s + 7$ に対するホロノミー D-加群のグレブナ基底は 38 個の偏微分作用素からなり, その中には 7 階の偏微分作用素が含まれている. これらの極めて複雑なデータだけをもとに local cohomology 解を求めることは現実的ではないと思われる.

以下では, ネター作用素を用いて. local cohomology 解を求めていく.

I $\Sigma^1_1 = V(P_1)$ 上での解析

$R_0 = 1$ に対し $\varrho_0 = R_0 \left[\begin{array}{c} 1 \\ y(z + 3x^2) \end{array} \right],\ \tau_0 = \varrho_0 h(x)$ とおく. ϱ_0 は,

$$y\varrho_0 = (z + 3x^2)\varrho = (\frac{\partial}{\partial x} - 6x\frac{\partial}{\partial z})\varrho = 0$$

を満たす.

次に, イデアル $D[s]\left\langle y,(z+3x^2)\right\rangle$ を法とし, 偏微分作用素の積の計算を行う.

$$\begin{aligned} ER_0 &= R_0\{2x(\frac{\partial}{\partial x}-6x\frac{\partial}{\partial z})-(7+12s)\}, \quad \bmod D[s]\langle y,(z+3x^2)\rangle, \\ B_1R_0 &= R_0\{-2x^2(\frac{\partial}{\partial x}-6x\frac{\partial}{\partial z})-5x\}, \quad \bmod D[s]\langle y,(z+3x^2)\rangle, \\ B_2R_0 &= 0 \quad \bmod D[s]\langle y,(z+3x^2)\rangle \end{aligned}$$

を得る.

$B_1\tau_0=\varrho_0\{-x(2x\frac{\partial h}{\partial x}+5h)\}$ より, $h(x)=c\cdot x^{-\frac{5}{2}}$ を得る. $E\tau_0=-(12+12s)\tau_0$ より, $s=-1$ を得る. Local cohomology 解

$$\tau_0=c\cdot x^{-\frac{5}{2}}\left[\begin{array}{c}1\\ y(z+3x^2)\end{array}\right]$$

は, 非自明な monodromy を持つ多価解であり, Σ_1^1 の原点では定義されないことを注意しておく.

II $\Sigma_2^1=V(P_2)$ 上での解析

イデアル P_2 の極大独立集合を求めると, $\{x\},\{y\},\{z\}$ を得る. それぞれの場合に, 素イデアルのグレブナ基底とネター作用素を求めると

(a) $(y^2-x^3,z-x^2)\subset K(x)[y,z], \quad \{1,3x\frac{\partial}{\partial y}+8y\frac{\partial}{\partial z}\}$

(b) $(x^3-y^2,z-x^2)\subset K(y)[z,x], \quad \{1,\frac{\partial}{\partial x}-2x\frac{\partial}{\partial z}\}$

(c) $(y^2-2x,x^2-z)\subset K(z)[y,x], \quad \{1,4z\frac{\partial}{\partial x}+3xy\frac{\partial}{\partial y}\}$

を得る (項順序は略). ここでは. (b) を用いて解析することにする.

$R_0=1,R_1=(-\frac{\partial}{\partial x})-2x(-\frac{\partial}{\partial z})$ を用いて

$$\varrho_0=R_0\left[\begin{array}{c}1\\ (x^3-y^2)(x^2-z)\end{array}\right],\quad \varrho_1=R_1\left[\begin{array}{c}1\\ (x^3-y^2)(x^2-z)\end{array}\right]$$

とおく.

(1) ϱ_0 は, $(x^3-y^2)\varrho_0=(x^2-z)\varrho_0=0$ および

$$(2y\frac{\partial}{\partial x}+3x^2\frac{\partial}{\partial y}+4xy\frac{\partial}{\partial z})\varrho_0=(2x\frac{\partial}{\partial x}+3y\frac{\partial}{\partial y}+4x^2\frac{\partial}{\partial z}+6)\varrho_0=0$$

を満たす.

イデアル $D[s]\left\langle x^3-y^2,x^2-z\right\rangle$ を法として計算すると

$$B_1=2x^2\frac{\partial}{\partial x}+3xy\frac{\partial}{\partial y}+4x^3\frac{\partial}{\partial z}+6x, B_2=8y\frac{\partial}{\partial x}+12x^2\frac{\partial}{\partial y}+16xy\frac{\partial}{\partial z}$$

を得る. これらより直ちに $B_1\varrho_0=B_2\varrho_0=0$ を得る. 偏微分作用素 E を用いることで, $6s+5=0$ を得る.

(2) 先ず, イデアル $D[s]\left\langle x^3-y^2,x^2-z\right\rangle$ を法とし, 偏微分作用素の積 ER_1,B_1R_1,B_2R_1 を計算すると言いたいところだが,

$$\varrho_1=\left[\begin{array}{c}4x\\ (x^3-y^2)(x^2-z)^2\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}3x^2\\ (x^3-y^2)^2(x^2-z))\end{array}\right]$$

を眺めていると

$$\psi=\left[\begin{array}{c}4\\ (x^3-y^2)(x^2-z)^2\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}3x\\ (x^3-y^2)^2(x^2-z))\end{array}\right]$$

を用いた方が計算が楽になるだろうと予想できる.

この local cohomology $\psi = \dfrac{x^2}{y^2}\varrho_1$ は, $Q_2\psi = 0$ をみたしその weighted degree は $-\frac{14}{12}$ である. 試しに $B_1\psi, B_2\psi$ を計算すると, $B_1\psi = B_2\psi = 0$ となるので, ψ が求める local cohomology 解であることが分かる. 偏微分作用素 E を用いることで, $6s+7=0$ を再確認できる. Local cohomology ϱ_0, ψ は共に, Σ_2^1 上で定義される.

Σ_2^1 の generic points での Milnor number は 2 であるので, Σ_2^1 の generic points での local cohomology 解はこれで全て求めたことになる.

III 原点での解析

イデアル (f, J_f) の準素イデアル分解は $(f, J_f) = Q_1 \cap Q_2$ であり, 原点は埋没因子ではない. しかし, **newcgsw1** の計算が示すように, 原点に台を持つホロノミー D-加群が存在する. このことは, ホロノミー D-加群が Whitney stratification と深く係わっていることによるものである. 可換代数の概念である primary decomposition だけでは, 複素解析的な対象であるホロノミー D-加群を捉えきることができないことに由来している. 柏原の定理 [5, Theorem 3.7] と **I** の計算結果から, 原点に台を持つホロノミー D-加群の存在の可能性が分かることを注意しておきたい.

さて, 原点に台を持つ local cohomology 解の計算法を考える.

この swallows tail は weight vector が $(\frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12})$ の擬斉次多項式で定義されていることを思い出そう. $\tilde{b}_f$ の因子 $4s+3, 4s+5$ から, 原点に台を持つ local cohomology 解の weighted degree が $-\frac{9}{12}, -\frac{15}{12}$ であることが分かる.

weighted degree が $-\frac{9}{12}$ となるような local cohomology class は $\left[\begin{array}{c} 1 \\ xyz \end{array}\right]$ のみである. また weighted degree が $-\frac{15}{12}$ に等しいような local cohomology class は, 次の 3 つの local cohomology class

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ x^4yz \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ x^2yz^2 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ xy^3z \end{array}\right]$$

の一次結合で与えられる.

Weighted degree に注目することで, 解の候補に制限を加えることができたので, 後は実際に偏微分方程式系を解けばよい.

$4s+3=0$ のとき $c\left[\begin{array}{c} 1 \\ xyz \end{array}\right]$, $c \in \mathbb{C}$

$4s+5=0$ のとき

$$c(\left[\begin{array}{c} 1 \\ x^4yz \end{array}\right] - \frac{3}{2}\left[\begin{array}{c} 1 \\ x^2yz^2 \end{array}\right] - \frac{9}{16}\left[\begin{array}{c} 1 \\ xy^3z \end{array}\right]),\ c \in \mathbb{C}$$

を得る.

論文 [27] では, Local cohomology に対するネター作用素の概念とそのホロノミー D-加群の local cohomology 解の計算への応用について論じている.

今迄幾つかの例で local cohomology 解の計算をしてきたが, 埋没因子やいまの例のように埋没因子でもないような variety 上で, local cohomology 解を求める際も, ネター作用素の概念が有効であった. このことについては稿をあらためて報告したい.

参 考 文 献

[1] T. Becker and V. Weispfenning, Gröbner Bases, A Computational Approach to Commutative Algebra (GTM 141), Springer, 1991

[2] J-E. Björk, Rings of Differential Operators, North-Holland, 1979

[3] L. Ehrenpreis, Fourier Analysis in Several Complex Variables, Wiley Interscience Publishers, 1970.

[4] M. Kashiwara, b-functions and singularity of a hypersurface (in Japanese, Noted by T. Miwa), RIMS Kôkyûroku **225** (1975), 16-53.

[5] M. Kashiwara, On the maximally overdetermined system of linear differential equations, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **10** (1974–1975) 563–579

[6] M. Kashiwara, On the holonomic systems of linear differential equations. II, Invent. Math. **49** (1978), 121–142

[7] H. Matsumuram Commutative Algebra, Benjamin, 1979.

[8] K. Nabeshima, K. Ohara and S. Tajima, Comprehensive Gröbner systems in rings of differential operators, holonomic D-modules and b-functions, Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM (2016), 349–356

[9] K. Nabeshima, K. Ohara and S. Tajima, Comprehensive Gröbner systems in PBW algebra, Bernstein-Sato ideals and holonomic D-modules, J. Symbolic Computation **89** (2018), 146–170

[10] 鍋島克輔, 田島慎一, 零次元準素イデアルのネター作用素の計算と応用, 京都大学数理解析研究所講究録 **2185** (2021), 1–15

[11] K. Nabeshima and S. Tajima, Effective algorithm for computing Noetherian representations of zero-dimensional ideals, Applicable Algebra in Engineering, Computation and Computing **33** (2022), 867-899

[12] 鍋島克輔, 田島慎一, 正次元イデアルのネター作用素の計算と特異点, 京都大学数理解析研究所講究録 **2255** (2023), 75-87

[13] K. Nabeshima and S. Tajima, Effective algorithm for computing Noetherian operators of positive dimensional ideals, Lecture Notes in Computer Science **14139**, Springer (2023), 272-291

[14] U. Oberst, The construction of Noetherian operators, J. Algebra **222** (1999), 595-620

[15] K. Ohara and S. Tajima, An algorithm for computing Grothendieck local residues II - general case - Mathematics in Computer Sciences. **14** (2020), 483–496

[16] V. P. Palamodov, Linear Differential Operators with Constant Coefficients, Springer, 1970.

[17] 田島慎一, 代数的局所コホモロジー類のローラン展開と L. Ehrenpreis の Noether 作用素, 京都大学数理解析研究所講究録 **1138** (2000), 87–95

[18] S. Tajima, An algorithm for computing the Noetherian operator representations and its applications to constant coefficients holonomic PDE's, Tools for Mathematical Modellings, (2001) St. Petersbourg, 154–160

[19] S. Tajima, Exponential polynomials and the Fourier-Borel transforms of algebraic local cohomology classes, in Microlocal Analysis and Complex Fourier Analysis, Eds. T. Kawai and K. Fujita, World Scientific (2002), 284–296

[20] 田島慎一, 零次元準素イデアルとネター作用素アルゴリズム, 京都大学数理解析研究所講究録 **1395** (2004), 57–63

[21] 田島慎一, Noether 作用素と多変数留数計算アルゴリズム, 京都大学数理解析研究所講究録 **1431** (2005), 123–136

[22] S. Tajima, On b-functions and local cohomology classes attached to hypersurfaces with line singularities, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **72** (2014), 175–191

[23] S. Tajima, Local cohomology solutions of holonomic D-modules associated with non-isolated hypersurface singularities, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **75** (2019), 61–72

[24] S. Tajima, K. Nabeshima, K. Ohara and Y. Umeta, Computing holonomic D-modules associated to a family of non-isolated hypersurface singularities via comprehensive Gröbner systems of PBW algebra, Mathematics in Computer Science **17** (2023), 315-337

[25] S. Tajima and Y. Umeta, Computing structure of holonomic D-modules associated with a simple line singularity, RIMS Kôkyûroku Bessatsu. **57** (2016), 125–140

[26] S. Tajima and Y. Umeta, Holonomic D-module4s associated with a simple line singularity and the vertical monodromy, Funkcialaj Ekvacioj, **64** (2021), 17–48.

[27] S. Tajima, Y. Umeta and K. Nabeshima, Noetherian operators for local cohomology classes and holonomic D-modules associated with non-isolated hypersurface singularities, submitted.

[28] H. Whitney, Tangents to an analytic variety, Ann. Math. **81** (1965), 496–549

[29] T. Yano, On the theory of b-functions, Pub. Res. Inst. Math. Sci. **14** (1978) 111–202