最小消去多項式を用いたJordan細胞の構造の効率的な計算

An Exact Algorithm for Computing the Structure of Jordan Blocks

新潟大学大学院自然科学研究科　田島 慎一 *1
Shinichi Tajima
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

金沢大学理工研究域　小原 功任 *2
Katsuyoshi Ohara
Faculty of Mathematics and Physics, Kanazawa University

筑波大学数理物質系　照井 章 *3
Akira Terui
Institute of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba

Abstract

An efficient method for computing the structure of Jordan blocks of a matrix of integers or rational numbers by exact computation is proposed. We have given a method for computing Jordan chains of a matrix with exact computation. However, for deriving just the structure of Jordan chains, the algorithm can be reduced to increase its efficiency. We propose a modification of the algorithm for that purpose.

1　はじめに

種々の問題において，線形変換または正方行列の構造を知りたい場合がある．ここでいう構造とは，行列のある固有値 α に附随する Jordan 細胞のうちランクがいくつのものが何個ずつ存在するかという情報であり，つまりは α に関する Jordan 鎖の情報と思ってよい．いま，ある固有値 α に注目しその固有値に関する構造を調べるという問題を考える．本稿では，この問題を効率的に解くアルゴリズムを提案する．

我々はこれまでに，レゾルベントの留数解析に基づき，行列の最小消去多項式や最小消去多項式候補を用いて行列の固有空間，一般固有空間，スペクトル分解等を効率的に行うアルゴリズムを提案している ([1]–[13])．論文 [3] では正方行列に対しすべての Jordan 鎖を計算する効率的なアルゴリズムを与えた．これにより本質的には行列の構造が完全に得られている．しかしながら，すべての Jordan 鎖を計算してしまうことは本稿の目的からすると不必要であり計算量的に不利である．したがって，本稿では，ある固有値のみに関する構

*1 〒 950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐 2 の町 8050　E-mail: tajima@emeritus.niigata-u.ac.jp
*2 〒 920-1192 石川県金沢市角間町　E-mail: ohara@se.kanazawa-u.ac.jp
*3 〒 305-8517 茨城県つくば市天王台 1-1-1　E-mail: terui@math.tsukuba.ac.jp

造を効率的に計算する方法を与える．論文 [3] の方法では，固有値 α の定義多項式を $f(\alpha)$ とするとき，α に附随する Jordan 鎖と f に関する Jordan-Krylov 基底を対応させる．Jordan 鎖を求めるには Jordan-Krylov 基底を具体的に計算する必要があったが，α に関する構造のみを調べるためには Jordan-Krylov 基底を完全に求める必要はない．したがって Jordan-Krylov 基底の計算過程から冗長な処理を除くのが基本的なアイデアである．

Jordan 鎖の素朴な計算法では，一般に固有値が代数的数であることから，代数拡大体上での連立 1 次方程式の解法により（一般）固有ベクトルを求める．そして，ランクが低い一般固有ベクトルから徐々にランクが高い一般固有ベクトルを求めることにより Jordan 鎖を構成する．これに対し，我々が論文 [3] で与えた計算法は以下の特徴を持つ．まず，すべての計算を $\mathbb{Q}$ 上で行うことで計算を効率化している．さらに，一般固有ベクトルを求めるのに連立 1 次方程式を解くことなく，ランクの最も高い一般固有ベクトルにある意味で対応する $\mathbb{Q}$-ベクトルを「タネ」として Jordan 鎖をまとめて求める．この「タネ」になるベクトルが Jordan-Krylov 基底である．ある固有値に附随する一般固有ベクトル全体のなす部分空間は $\ker f(A)^{\ell}$ という $\mathbb{Q}$-ベクトル空間に対応している．より正確には固有値 α に共役なすべての各固有値に附随する一般固有ベクトル全体のなす部分空間に対応している．共役な一般固有ベクトルで張られる部分空間の次元は α に附随する一般固有空間の次元のちょうど d 倍（ただし $d = \deg f$）である．このとき $\ker f(A)^{\ell}$ は Krylov 巡回部分空間の直和になっているので，我々はその性質をうまく用いることで α に附随する一般固有空間を求める．

本稿では以上の計算法に基づきつつ Jordan 鎖の計算過程から冗長な計算を取り除き，Jordan 細胞の構造のみを効率的に計算する手法を提案する．

2　行列 A の一般固有空間と $\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の Jordan-Krylov 基底

本節では，我々が先に書いた論文 [3] から，与えられた行列 A の一般固有空間の計算が $\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の Jordan-Krylov 基底の計算に帰着されることを復習する．

$K \subset \mathbb{C}$ を計算可能な部分体とし，A を K 上の n 次正方行列とする．$\pi_A(\lambda) \in K[\lambda]$ を A の最小多項式とする．$f(\lambda)$ を $\pi_A(\lambda)$ のモニックな既約因子とし，$\bar{\ell}$ を $\pi_A(\lambda)$ における $f(\lambda)$ の重複度とする．$1 \le \ell \le \bar{\ell}$ に対し，

$$\ker f(A)^{\ell} = \{\boldsymbol{u} \in K^n \mid f(A)^{\ell}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\}$$

（ただし $\ker f(A)^0 = \{\boldsymbol{0}\}$）とする．このとき，$K$ 上のベクトル空間の昇鎖

$$\{\boldsymbol{0}\} \subset \ker f(A) \subset \ker f(A)^2 \subset \cdots \ker f(A)^{\ell} \subset \cdots \subset \ker f(A)^{\bar{\ell}}$$

が存在する．

$f(\lambda)$ の根である A の固有値に附随する Jordan 鎖の構造は $\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の内部構造で決まる．$\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の内部構造を記述するため，Jordan-Krylov 基底の概念を導入する．$1 \le \ell \le \bar{\ell}$ に対し，自明でない $\boldsymbol{u} \in \ker f(A)^{\bar{\ell}}$ がランク ℓ であるとは，$\boldsymbol{u} \in \ker f(A)^{\ell} \setminus \ker f(A)^{\ell-1}$ であることをいう．このとき，$\mathrm{rank}_f \boldsymbol{u} = \ell$ と表す．

$\boldsymbol{u} \in \ker f(A)^{\bar{\ell}}$ に対し，ベクトル空間

$$L_A(\boldsymbol{u}) = \mathrm{span}_K \{A^k\boldsymbol{u} \mid k = 0, 1, 2, \ldots\}$$

を Krylov 巡回部分空間という．A と $f(A)$ が可換であるから，$\boldsymbol{u}$ のランクが ℓ ならば $L_A(\boldsymbol{u}) \subset \ker f(A)^{\ell}$ である．

定義 1
W を K^n の部分空間とする．W の部分集合 $\mathcal{W}$ が Krylov 生成系であるとは，$W=\sum_{\boldsymbol{w}\in\mathcal{W}} L_A(\boldsymbol{w})$ を満たすことをいう．さらに $\mathcal{W}$ が有限集合で $W=\bigoplus_{\boldsymbol{w}\in\mathcal{W}} L_A(\boldsymbol{w})$ を満たすとき，$\mathcal{W}$ を W の Jordan-Krylov 基底という．

定理 2 ([3, Theorem 11])
$\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ には Jordan-Krylov 基底が存在する．

ここで定義した Jordan-Krylov 基底と一般固有空間の関係を説明しよう．今，$d=\deg f$ とし，$\mathbb{C}$ における $f(\lambda)$ の根を $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d$ とおく．多項式 $f(\lambda)$ に付随する対称多項式

$$\psi_f(\mu,\lambda)=\frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda}\in K[\mu,\lambda] \tag{1}$$

を考える．さらに，$1\leq k\leq \bar{\ell}$ に対し，$\psi_f^{(k)}(\mu,\lambda)=(\psi_f(\mu,\lambda))^k \mod f(\lambda)$ とする．ここで右辺は，$(\psi_f(\mu,\lambda))^k$ を $K[\lambda][\mu]$ の元とみて，係数毎に $f(\lambda)$ で余りをとったものを表す．

ランク ℓ のベクトル $\boldsymbol{u}\in\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ に対し，$\boldsymbol{p}^{(k)}(\lambda,\boldsymbol{u})=\psi_f^{(k)}(A,\lambda E)f(A)^{\ell-k}\boldsymbol{u}$ とおく $(k=1,2,\ldots,\ell)$．このとき次が成り立つ．

定理 3
$i=1,2,\ldots,d$ に対し，

$$\{\boldsymbol{p}^{(\ell)}(\alpha_i,\boldsymbol{u}),\boldsymbol{p}^{(\ell-1)}(\alpha_i,\boldsymbol{u}),\ldots,\boldsymbol{p}^{(1)}(\alpha_i,\boldsymbol{u})\} \tag{2}$$

は長さ ℓ の Jordan 鎖を与える．

定理 3 より，ランク ℓ のベクトル $\boldsymbol{u}\in\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ が長さ ℓ の Jordan 鎖の表示式を与えることがわかる．ここで，Jordan-Krylov 基底の元を用いることで，一般固有空間の構成が可能になる．つまり，$\mathcal{A}\subset\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ に対し，$\mathcal{A}^{(\ell)}=\{\boldsymbol{u}\in\mathcal{A}\mid \mathrm{rank}_f\boldsymbol{u}=\ell\}$ とおくと次が成り立つ．($\mathcal{A}=\mathcal{A}^{(1)}\cup\cdots\cup\mathcal{A}^{(\bar{\ell})}$ に注意する．)

定理 4 ([3, Theorem 13])
$\mathcal{B}=\mathcal{B}^{(\bar{\ell})}\cup\mathcal{B}^{(\bar{\ell}-1)}\cup\cdots\cup\mathcal{B}^{(1)}$ を $\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の Jordan-Krylov 基底とする．このとき，$i=1,2,\ldots,d$ に対し以下が成り立つ．

1. $\displaystyle\bigoplus_{\boldsymbol{b}\in\mathcal{B}^{(\ell)}} P_A(\alpha_i,\boldsymbol{b})$ は長さ ℓ の Jordan 鎖で張られる．
2. $\displaystyle\bigoplus_{\boldsymbol{b}\in\mathcal{B}} P_A(\alpha_i,\boldsymbol{b})$ は固有値 α_i に附随する A の一般固有空間を与える．
3. $\displaystyle\bigoplus_{\boldsymbol{b}\in\mathcal{B}}(P_A(\alpha_1,\boldsymbol{b})\oplus P_A(\alpha_2,\boldsymbol{b})\oplus\cdots\oplus P_A(\alpha_d,\boldsymbol{b}))\simeq\mathbb{C}\otimes_K\ker f(A)^{\bar{\ell}}$.

定理 4 より，$f(\lambda)$ の根である A の固有値に附随する Jordan 細胞の構造が，$\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の Jordan-Krylov 基底の元のランクや各ランクの元の個数によって決まることがわかる．特に，Jordan-Krylov 基底のランク ℓ の元が A の一般固有空間における長さ ℓ の Jordan 鎖に対応する．従って，行列 A の構造を与えるには，$\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の Jordan-Krylov 基底のランクごとの元の個数を求めればよい．

3　Jordan 細胞の構造を計算するアルゴリズム

一般固有空間を求めるには $\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の Jordan-Krylov 基底を与えることが本質的であり，そのために **Jordan-Krylov 掃き出し**と呼ばれる掃き出しを行うが [3]，$\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の構造のみを求める際には Jordan-Krylov 掃き出しが不要な場合が現れる．そこで，Jordan-Krylov 掃き出しのうちどの部分を省略できるかを調べる．なお，Jordan-Krylov 基底は一意とは限らないが，各ランクごとの Jordan-Krylov 基底の元の個数は一意的であることに注意する．

3.1　Krylov 生成系の構成

Jordan-Krylov 基底は上で定義された Krylov 生成系から計算するが，$\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の Krylov 生成系は K^n の基底の元の最小消去多項式から計算される．以下では A の特性多項式を

$$\chi_A(\lambda) = f(\lambda)^m g(\lambda), \quad \gcd(f, g) = 1, \quad m \cdot \deg(f) \leq n \tag{3}$$

（ここに $f(\lambda)$ は K 上既約）とする．

定義 5 (最小消去多項式)
多項式環 $K[\lambda]$ の単項イデアル $\mathrm{Ann}_{K[\lambda]}(A, \boldsymbol{u}) = \{g(\lambda) \in K[\lambda] \mid g(A)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\}$ のモニックな生成元 $\pi_{A,\boldsymbol{u}}(\lambda)$ を，A に関する $\boldsymbol{u}$ の最小消去多項式という．

$\mathcal{E}$ を K^n の基底とし，$\mathcal{P} = \{\pi_{A,\boldsymbol{e}}(\lambda) \mid \boldsymbol{e} \in \mathcal{E}\}$ とする．$\mathcal{P}$ の最小消去多項式 $\pi_{A,\boldsymbol{e}}(\lambda)$ は

$$\pi_{A,\boldsymbol{e}}(\lambda) = f(\lambda)^{\ell_{\boldsymbol{e}}} g_{\boldsymbol{e}}(\lambda), \quad \gcd(f, g_{\boldsymbol{e}}) = 1, \quad \ell_{\boldsymbol{e}} \geq 0$$

の形で表されることから，$\bar{\ell} = \max\ \{\ell_{\boldsymbol{e}} \mid \boldsymbol{e} \in \mathcal{E}\}$, $g_{\boldsymbol{e}}(A)\boldsymbol{e} \in \ker f(A)^{\bar{\ell}}$ がわかる．

$$\mathcal{E}_f = \{\boldsymbol{e} \in \mathcal{E} \mid \pi_{A,\boldsymbol{e}}(\lambda) = f(\lambda)^{\ell_{\boldsymbol{e}}} g_{\boldsymbol{e}}(\lambda),\ \ell_{\boldsymbol{e}} > 0\}, \quad \mathcal{V} = \{g_{\boldsymbol{e}}(A)\boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{e} \in \mathcal{E}_f\} \tag{4}$$

とおくと，$\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$ に対し，$L_A(\boldsymbol{u}) \subset \ker f(A)^{\bar{\ell}}$ が成り立つことに注意する．

さて，$\boldsymbol{u} \in \ker f(A)^{\bar{\ell}}$ のランクが ℓ のとき，

$$\mathcal{L}_{A,d}(\boldsymbol{u}) = \{\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u}, A^2\boldsymbol{u}, \ldots, A^{d-1}\boldsymbol{u}\},$$
$$\mathcal{L}_A(\boldsymbol{u}) = \mathcal{L}_{A,d}(\boldsymbol{u}) \cup \mathcal{L}_{A,d}(f(A)\boldsymbol{u}) \cup \cdots \cup \mathcal{L}_{A,d}(f(A)^{\ell-1}\boldsymbol{u})$$

とおくと $L_A(\boldsymbol{u}) = \mathrm{span}_K \mathcal{L}_A(\boldsymbol{u})$ が成り立つ．ここで，$\mathcal{U} \subset K^n$ に対し $\mathcal{L}_A(\mathcal{U}) = \bigcup_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}} \mathcal{L}_A(\boldsymbol{u})$ とおく．このとき次の命題が成り立つ．

命題 6 ([3, Proposition 16])
$\ker f(A)^{\bar{\ell}} = \mathrm{span}_K \mathcal{L}_A(\mathcal{V})$.

すなわち，$\mathcal{V}$ は $\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の Krylov 生成系である．

ここでは A の特性多項式 (3) の既約因子 $f(\lambda)$ に着目し，f の根である固有値 α に関する構造を調べるものとする．K^n の基底 $\mathcal{E}$ の元 $\boldsymbol{e}$ の最小消去多項式 $\pi_{A,\boldsymbol{e}}(\lambda)$ が

$$\pi_{A,\boldsymbol{e}}(\lambda) = f(\lambda)^{\ell_{\boldsymbol{e}}} g_{\boldsymbol{e}}(\lambda), \quad \gcd(f, g_{\boldsymbol{e}}) = 1, \quad \ell_{\boldsymbol{e}} \geq 0 \tag{5}$$

の形で表されるとき，$f(A)^m\boldsymbol{e}$ の最小消去多項式は $g_{\boldsymbol{e}}(\lambda)$ である．よって (5) より $g_{\boldsymbol{e}}(A)\boldsymbol{e} \in \ker f(A)^{\ell_{\boldsymbol{e}}}$ が成り立つ．

$$\bar{\ell} = \max\{\ell_{\boldsymbol{e}} \mid \boldsymbol{e} \in \mathcal{E}_f\}, \quad \mathcal{V} = \{g_{\boldsymbol{e}}(A)\boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{e} \in \mathcal{E}_f\} \tag{6}$$

とおくと $\mathcal{V}$ は $\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の Krylov 生成系をなす．

$\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の Krylov 生成系 $\mathcal{V}$ を求める際，$\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ のランク $\mathrm{rank}_f \boldsymbol{v}$ および $\boldsymbol{v}' = f(A)^{\mathrm{rank}_f \boldsymbol{v}-1}\boldsymbol{v}$ を求めることになるが，これらはこの後で行う α に関する構造の計算において基本的な情報であり，1 回計算した段階でそれらの情報を保存することにする．そこで，Krylov 生成系にそれらの情報を付加したデータ構造 $\tilde{\mathcal{V}} = \{(\boldsymbol{v}, \mathrm{rank}_f \boldsymbol{v}, f(A)^{\mathrm{rank}_f \boldsymbol{v}-1}\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}\}$ を $\mathcal{V}$ の**拡張 Krylov 生成系**と呼ぶことにし，Krylov 生成系 $\mathcal{V}$ および拡張 Krylov 生成系 $\tilde{\mathcal{V}}$ を構築するアルゴリズムをそれぞれアルゴリズム 1 および 2 に示す．アルゴリズム 1 の出力がアルゴリズム 2 の入力になる点に注意する．

拡張Krylov生成系の各アルゴリズムの出力に現れる $\bar{\ell}$ は式 (6) の $\bar{\ell}$ を表す．ある $(\boldsymbol{v}, \mathrm{rank}_f \boldsymbol{v}, f(A)^{\mathrm{rank}_f \boldsymbol{v}-1}\boldsymbol{v})$ を $\tilde{\mathcal{V}}$ に加える操作を $\tilde{\mathcal{V}} \overset{\circ}{\Longleftarrow} (\boldsymbol{v}, \mathrm{rank}_f \boldsymbol{v}, f(A)^{\mathrm{rank}_f \boldsymbol{v}-1}\boldsymbol{v})$ で表す．$\overset{\circ}{\Longleftarrow}$ は $\tilde{\mathcal{V}}$ の構造を直接変えることに注意する．$\tilde{\mathcal{V}}$ の部分集合でランク ℓ のものを取り出す操作を $\tilde{\mathcal{V}}^{(\ell)} = \{(\boldsymbol{v}, \mathrm{rank}_f \boldsymbol{v}, f(A)^{\mathrm{rank}_f \boldsymbol{v}-1}\boldsymbol{v}) \in \tilde{\mathcal{V}} \mid \mathrm{rank}_f \boldsymbol{v} = \ell\}$ により表す．有限個の列ベクトルの集合 $\mathcal{W} = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k\}$ に対し，$\mathcal{W}$ のすべての列ベクトルからなる行列を $[\ \mathcal{W}\ ] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k]$ とおく．行列 M の第 j 列ベクトルを M_j で表す．

アルゴリズム 1 ($\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ **の Krylov 生成系の構成**)

Input: 行列 $A \in K^{n\times n}$, 特性多項式 $\chi_A(\lambda) = f(\lambda)^m g(\lambda)$ (式 (3)), 着目する固有値の定義多項式 $f(\lambda)$, K^n の基底 $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$

Output: $\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の Krylov 生成系 $\mathcal{V}$

function KrylovGS(A, $\chi_A(\lambda)$, $f(\lambda)$, $\mathcal{E}$)
  $\mathcal{V} \leftarrow \emptyset$
  for $i = 1, \ldots, n$ **do**
    $\boldsymbol{e}_i' \leftarrow f(A)^m \boldsymbol{e}_i$
    if $\boldsymbol{e}_i' = \boldsymbol{0}$ **then**
      $g_i(\lambda) \leftarrow 1$
    else
      $g_i(\lambda) \leftarrow$ ($\boldsymbol{e}_i'$ の最小消去多項式 [1])
    end if
    $\boldsymbol{v}_i \leftarrow g_i(A)\boldsymbol{e}_i$
    $\mathcal{V} \leftarrow \mathcal{V} \cup \{\boldsymbol{v}_i\}$ **if** $\boldsymbol{v}_i \neq \boldsymbol{0}$
  end for
  return $\mathcal{V}$
end function

アルゴリズム 2 ($\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ **の 拡張 Krylov 生成系の構成**)

Input: 行列 $A \in K^{n\times n}$, 着目する固有値の定義多項式 $f(\lambda)$, $\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の Krylov 生成系 $\mathcal{V}$

Output: $\{\tilde{\mathcal{V}}, \bar{\ell}\}$, ここに $\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の 拡張Krylov生成系 $\tilde{\mathcal{V}} = \{(\boldsymbol{v}, \mathrm{rank}_f \boldsymbol{v}, f(A)^{\mathrm{rank}_f \boldsymbol{v}-1}\boldsymbol{v})\}$, $\bar{\ell} = \max\{\mathrm{rank}_f \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}\}$

function ExtendedKrylovGS(A, $f(\lambda)$, $\mathcal{V}$)
  $\tilde{\mathcal{V}} \leftarrow \emptyset; \quad \bar{\ell} \leftarrow 0$
  (Optional) 掃き出しを行う: $[\mathcal{V}] \longrightarrow [\mathcal{V}']$
  $[\mathcal{V}_0'] \leftarrow [\mathcal{V}'], \quad \ell \leftarrow 0, \quad N \leftarrow$ ($[\mathcal{V}']$ の列数)
  while $[\mathcal{V}'] \neq O$ **do**
    $[\mathcal{V}''] \leftarrow f(A)[\mathcal{V}'], \quad \ell \leftarrow \ell + 1, \quad \bar{\ell} \leftarrow \ell$
    for $j = 1, \ldots, N$ **do**
      $\tilde{\mathcal{V}} \overset{\circ}{\Longleftarrow} ([\mathcal{V}_0']_j, \ell, [\mathcal{V}']_j)$ **if** $[\mathcal{V}'']_j = \boldsymbol{0}$ and $[\mathcal{V}']_j \neq \boldsymbol{0}$

end for
$[\mathcal{V}'] \leftarrow [\mathcal{V}'']$
end while
return $\{\tilde{\mathcal{V}}, \bar{\ell}\}$
end function

3.2 Jordan 細胞の構造の計算

$\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の Jordan-Krylov 基底を $\mathcal{B} = \bigcup_{\ell=1}^{\bar{\ell}} \mathcal{B}^{(\ell)}$ とおく．まず，$\mathcal{V}$ を用いて $\ker f(A)^{(\bar{\ell})}$ のある Jordan-Krylov 基底 $\mathcal{B} = \bigcup_{\ell=1}^{\bar{\ell}} \mathcal{B}^{(\ell)}$ を求める方法について述べる．我々のアイデアは，ランク ℓ の高い順に集合 $\mathcal{B}^{(\ell)}$ を定めていくことである．まず最高ランク $\bar{\ell}$ の元 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}^{(\bar{\ell})}$ は $\mathcal{B}^{(\bar{\ell})}$ の元としてもよい．その後，$\mathcal{V}^{(\bar{\ell})}$ の他の元に対して掃き出しを行うことで $\mathcal{B}^{(\bar{\ell})}$ を決定する．次に，$\bar{\ell}$ よりもランクの低い $\mathcal{V}^{(\ell)}$ の元に対しても，同様にランクの高い順に $\mathcal{B}^{(\ell)}$ を決定していく．

さて，$i = 1, 2, \ldots, \bar{\ell}$ に対し，$c_i = |\mathcal{B}^{(i)}|$（ここに $|\mathcal{B}^{(\ell)}|$ は $\mathcal{B}^{(\ell)}$ の元の個数）とし，$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_{\bar{\ell}}\}$ を **Jordan 細胞の構造**と呼ぶ．Jordan-Krylov 基底を求める際には $\mathcal{B}^{(\ell)}$ をすべて決めなければならないが，我々の目的は行列 A の構造を求めることであるので $\mathcal{B}^{(\ell)}$ の元の個数のみがわかればよい．そこで，Jordan-Krylov 基底の計算を $\mathcal{B}^{(\ell)}$ の元の個数を知るために必要最小限の規模に絞り，可能な限り Jordan-Krylov 掃き出しの回数を減らす．

A の特性多項式における $f(\lambda)$ の重複度を m とするとき，m が $f(\lambda)$ の根である A の固有値に属する互いに独立な Jordan 鎖の長さの和に等しいことから

$$m = \sum_{\ell=1}^{\bar{\ell}} \ell \cdot |\mathcal{B}^{(\ell)}| \tag{7}$$

が成り立つ．

式 (7) より次の命題が成り立つ．

命題 7
$m - \sum_{\ell=k+1}^{\bar{\ell}} \ell \cdot |\mathcal{B}^{(\ell)}| < k$ ならば $\mathcal{B}^{(k)} = \emptyset$.

命題 7 より，$m - \sum_{\ell=k+1}^{\bar{\ell}} \ell \cdot |\mathcal{B}^{(\ell)}| \leq 1$ が成り立った時点で行列 A の構造が確定する．

ランク $k+1$ まで Jordan-Krylov 掃き出しを行った時点で $m' = m - \sum_{\ell=k+1}^{\bar{\ell}} \ell \cdot |\mathcal{B}^{(\ell)}| < k$ ならば，まずランク m' において Jordan-Krylov 掃き出しを行う．$\mathcal{B}^{(m')} = \emptyset$ ならば，ランク k から再び Jordan-Krylov 掃き出しを行い，

$$m - \sum_{\ell=k}^{\bar{\ell}} \ell \cdot |\mathcal{B}^{(\ell)}| \tag{8}$$

を求める．

以上を踏まえ，Jordan 細胞の構造を計算するアルゴリズムをアルゴリズム 3 に，この中で ℓ に関する繰り返しの部分をアルゴリズム 4 にそれぞれ示す．また，アルゴリズム 4 の中で行われる Jordan-Krylov 掃き出しの手順をアルゴリズム 5 に示す．そして，アルゴリズム 1–5 を組み合わせ，$f(\lambda)$ の根に付随する A の Jordan 細胞の構造を計算するアルゴリズムを アルゴリズム 6 に示す．

アルゴリズム 3, 4, 5 において，順序付き集合（$\mathcal{B}$ など）の ℓ 番目の要素を書き換える際には $\xleftarrow{\ell}$ のような記号で表す．

注意 1

アルゴリズム 4 および 5 内で，$f(\lambda)$ の根に附随する Jordan 細胞で構造が未確定のもののサイズの和 (8) を扱う．

アルゴリズム 3 (Jordan 細胞の構造の計算)

Input: 行列 $f(A) \in K^{n\times n}$, $\ker f(A)^{\bar\ell}$ の拡張 Krylov 生成系 $\tilde{\mathcal{V}}$, A の特性多項式における $f(\lambda)$ の重複度 m

Output: $f(\lambda)$ の根に附随する Jordan 細胞の構造 $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_{\bar\ell}\}$ (ℓ: ランク，c_ℓ: ランク ℓ の Jordan 細胞の個数)

function JordanBlocksMain($f(A)$, $\tilde{\mathcal{V}}$, m)
  return $\{m, 0, \ldots, 0\}$ **if** $\bar\ell = 1$
  $m \leftarrow m - \bar\ell$
  return $\{m, 0, \ldots, 0, 1\}$ **if** $m \le 1$ ▷ $m = 0$ または 1 の場合はこの時点で Jordan 細胞の構造が確定
  $\mathcal{C} \leftarrow \{0, \ldots, 0\}$, $S = \{S_2, S_3, \ldots, S_{\bar\ell}\} \leftarrow \{0, \ldots, 0\}$, $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}^{(2)}, \ldots, \mathcal{B}^{(\bar\ell)}\} \leftarrow \{\emptyset, \ldots, \emptyset\}$ ▷ $\mathcal{C}$, S, $\mathcal{B}$ の初期化
  $\hat\ell \leftarrow \bar\ell$ ▷ Jordan-Krylov 掃き出しが進行中（未完了）のランクの最大値
  $N \leftarrow$ ($[\tilde{\mathcal{V}}^{(\bar\ell)}]$ の列数)
  $(\boldsymbol{v}, \bar\ell, \boldsymbol{v}') \in \tilde{\mathcal{V}}^{(\bar\ell)}$ を選ぶ，$\mathcal{B} \xLeftarrow{\bar\ell} \{\boldsymbol{v}\}$, $\tilde{\mathcal{V}}^{(\bar\ell)} \leftarrow \tilde{\mathcal{V}}^{(\bar\ell)} \setminus \{(\boldsymbol{v}, \bar\ell, \boldsymbol{v}')\}$, $\mathcal{C} \xLeftarrow{\bar\ell} 1$ ▷ ランク $\bar\ell$ の Jordan 細胞を 1 個検出
  $S \xLeftarrow{\bar\ell} [\mathcal{L}_{A,d}(\boldsymbol{v})]$ ▷ S をランクごとに保持
  $W \leftarrow [\mathcal{L}_{A,d}(\boldsymbol{v}')]$ ▷ $W = f(A)^{\bar\ell-1}S_{\bar\ell}$ はこの時点で列簡約可能
  $\ell \leftarrow \min\{\hat\ell, m\}$
  $\mathcal{C} \leftarrow$ JordanBlocksLoop ($f(A)$, ℓ, $\hat\ell$, m, S, W, $\tilde{\mathcal{V}}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$) ▷ ℓ に関する繰り返し (アルゴリズム 4)
  return $\mathcal{C}$
end function

アルゴリズム 4 (Jordan 細胞の構造の計算（ℓ に関する繰り返し）)

Input: 行列 $f(A) \in K^{n\times n}$, 現在計算対象のランク ℓ, Jordan-Krylov 掃き出しが進行中（未完了）のランクの最大値 $\hat\ell$, 構造未確定の細胞のサイズの和 m (注意 1), Jordan-Krylov 掃き出しに用いられる行列 S, W, $\ker f(A)^{\bar\ell}$ の拡張 Krylov 生成系 $\tilde{\mathcal{V}}$,（計算途中の）$\ker f(A)^{\bar\ell}$ の Jordan-Krylov 基底 $\mathcal{B}$,（計算途中の）Jordan 細胞の構造 $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_{\bar\ell}\}$

Output: Jordan 細胞の構造 $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_{\bar\ell}\}$

function JordanBlocksLoop($f(A)$, ℓ, $\hat\ell$, m, S, W, $\tilde{\mathcal{V}}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$)
  while $\ell > 1$ **do**
    $S \xLeftarrow{\ell} f(A)^{\hat\ell-\ell}S_{\hat\ell}$ **if** $S_\ell = 0$ and $\ell < \hat\ell$ ▷ S_ℓ が未計算であればこの段階で計算
    $\{m, S, W, \tilde{\mathcal{V}}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\} \leftarrow$ JordanKrylovElim($f(A)$, ℓ, m, S, W, $\tilde{\mathcal{V}}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$) ▷ ランク ℓ の Jordan-Krylov 掃き出し (アルゴリズム 5)
    return $\mathcal{C}$ **if** $m \le 1$ ▷ $m = 0$ または 1 の場合はこの時点で Jordan 細胞の構造が確定
    $S \xLeftarrow{\ell-1} f(A)S_\ell$
    $\hat\ell \leftarrow \ell - 1$ **if** $\hat\ell = \ell$
    if $\mathcal{B}_\ell = \emptyset$ and $\ell < \hat\ell$ **then** ▷ ランク $\hat\ell, \hat\ell-1, \ldots, \ell$ の Jordan-Krylov 掃き出し
      for $\ell = \hat\ell, \hat\ell-1, \ldots, k$ **do**
        $\{m, S, W, \tilde{\mathcal{V}}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\} \leftarrow$ JordanKrylovElim($f(A)$, ℓ', m, S, W, $\tilde{\mathcal{V}}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$) ▷ ランク ℓ' の Jordan-Krylov 掃き出し (アルゴリズム 5)
        return $\mathcal{C}$ **if** $m \le 1$ ▷ $m = 0$ または 1 の場合はこの時点で Jordan 細胞の構造が確定

$S \overset{\ell-1}{\Longleftarrow} f(A)S_{\ell'}$
end for
$\hat{\ell} \leftarrow \ell - 1$
end if
$\ell \leftarrow \min\{m, \ell-1\}$ ▷ 次に Jordan-Krylov 掃き出しを行うランクの決定
end while
$\mathcal{C} \overset{1}{\Longleftarrow} m$
return $\mathcal{C}$
end function

アルゴリズム 5 (ランク ℓ の Jordan-Krylov 掃き出し)

Input: 行列 $f(A) \in K^{n\times n}$, 現在計算対象のランク ℓ, 構造未確定の細胞のサイズの和 m (注意 1), Jordan-Krylov 掃き出しに用いられる行列 S, W, $\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の拡張 Krylov 生成系 $\tilde{\mathcal{V}}$, （計算途中の）$\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の Jordan-Krylov 基底 $\mathcal{B}$, （計算途中の）Jordan 細胞の構造 $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_{\bar{\ell}}\}$

Output: $\{m, S, W, \tilde{\mathcal{V}}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$, ここに構造未確定の細胞のサイズの和 m (注意 1), Jordan-Krylov 掃き出しに用いられる行列 S, W, $\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の拡張 Krylov 生成系 $\tilde{\mathcal{V}}$, $\ker f(A)^{\bar{\ell}}$ の Jordan-Krylov 基底 $\mathcal{B}$, Jordan 細胞の構造 $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_{\bar{\ell}}\}$

function JordanKrylovElim($f(A)$, ℓ, m, S, W, $\tilde{\mathcal{V}}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$)
while $\tilde{\mathcal{V}}^{(\ell)} \neq \emptyset$ **do**
$N \leftarrow$ ($[\tilde{\mathcal{V}}^{(\ell)}]$ の列数)
$(\boldsymbol{v}, \ell, \boldsymbol{v}') \in \tilde{\mathcal{V}}^{(\ell)}$ を選ぶ, $\quad \tilde{\mathcal{V}}^{(\ell)} \leftarrow \tilde{\mathcal{V}}^{(\ell)} \setminus \{(\boldsymbol{v}, \ell, \boldsymbol{v}')\}$ ▷ $\boldsymbol{v}' = f(A)^{\ell-1}\boldsymbol{v}$
Simultaneous column reduction of the rightmost column in the augmented matrix
$[W \mid \boldsymbol{v}'] \longrightarrow [W \mid \boldsymbol{r}'], \quad [S_\ell \mid \boldsymbol{v}] \longrightarrow [S_\ell \mid \boldsymbol{r}]$
if $\boldsymbol{r}' \neq \boldsymbol{0}$ **then** ▷ $\boldsymbol{r}' \notin \mathrm{span}_K W$
$\mathcal{B} \overset{\ell}{\Longleftarrow} \{\boldsymbol{r}\}, \quad m \leftarrow m - \ell, \quad \mathcal{C} \overset{\ell}{\Longleftarrow} \mathcal{C}_\ell + 1$ ▷ ランク ℓ の Jordan 細胞が 1 個増加
if $m \leq 1$ **then** ▷ $m = 0$ または 1 の場合はこの時点で Jordan 細胞の構造が確定
$\mathcal{C} \overset{1}{\Longleftarrow} m$
return $\{m, S, W, \tilde{\mathcal{V}}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$
end if
$S \overset{\ell}{\Longleftarrow} [S_\ell \mid \mathcal{L}_{A,d}(\boldsymbol{r})], \quad W \leftarrow [W \mid \mathcal{L}_{A,d}(\boldsymbol{r}')]$ ▷ $W = f(A)^{\ell-1}S$ can be reduced
else if $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ and $\ell > 1$ **then**
$\ell' \leftarrow \mathrm{rank}_f \boldsymbol{r}, \quad \tilde{\mathcal{V}}^{(\ell')} \overset{\circ}{\Longleftarrow} (\boldsymbol{r}, \ell', \boldsymbol{r}')$
end if
end while
return $\{m, S, W, \tilde{\mathcal{V}}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$
end function

アルゴリズム 6 ($f(\lambda)$ の根に附随する A の Jordan 細胞の構造の計算)

Input: 行列 $A \in K^{n\times n}$, 特性多項式 $\chi_A(\lambda) = f(\lambda)^m g(\lambda)$ (式 (3)), 着目する固有値の定義多項式 $f(\lambda)$, K^n の基底 $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$

Output: $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_{\bar{\ell}}\}$: $f(\lambda)$ の根に附随する A の Jordan 細胞の構造 ($\bar{\ell}$ は アルゴリズム 2 の出力)

function JordanBlocks(A, $\chi_A(\lambda)$, $f(\lambda)$, $\mathcal{E}$)
$\mathcal{V} \leftarrow$ KrylovGS(A, $\chi_A(\lambda)$, $f(\lambda)$, $\mathcal{E}$) ▷ アルゴリズム 1
$\{\tilde{\mathcal{V}}, \bar{\ell}\} \leftarrow$ ExtendedKrylovGS(A, $f(\lambda)$, $\mathcal{V}$) ▷ アルゴリズム 2

$\mathcal{C} \leftarrow$ JordanBlocksMain($f(A)$, $\tilde{\mathcal{V}} = \bigcup_{\ell=1}^{\bar{\ell}} \mathcal{V}^{(\ell)}$, m) ▷ アルゴリズム 3
    return $\mathcal{C}$
end function

参 考 文 献

[1] S. Tajima, K. Ohara, and A. Terui. Fast Algorithm for Calculating the Minimal Annihilating Polynomials of Matrices via Pseudo Annihilating Polynomials. preprint, 27 pages. `https://arxiv.org/abs/1801.08437`

[2] S. Tajima, K. Ohara, and A. Terui. Fast Algorithms for Computing Eigenvectors of Matrices via Pseudo Annihilating Polynomials. preprint, 17 pages. `https://arxiv.org/abs/1811.09149`

[3] S. Tajima, K. Ohara, and A. Terui. Exact algorithms for computing generalized eigenspaces of matrices via annihilating polynomials, 2022. preprint, 23 pages. `https://arxiv.org/abs/2209.04807`

[4] 小原功任, 田島慎一. 最小消去多項式を用いた行列スペクトル分解計算の並列化. In *Computer Algebra: Design of Algorithms, Implementations and Applications*, 数理解析研究所講究録, 第 1815 巻, pp. 21–28. 京都大学数理解析研究所, 2012.

[5] 小原功任, 田島慎一. 最小消去多項式候補を用いた行列の一般固有空間の構造の計算法について. 数式処理研究と産学研究の新たな発展, MI レクチャーノート, 第 49 巻, pp. 113–118. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, 2013.

[6] 小原功任, 田島慎一. 最小消去多項式候補を用いた行列の一般固有空間の構造の計算アルゴリズム. 数式処理とその周辺分野の研究, 数理解析研究所講究録, 第 1907 巻, pp. 62–70. 京都大学数理解析研究所, 2014.

[7] 小原功任, 田島慎一. 最小消去多項式を用いた一般固有ベクトル空間の基底計算法. 数式処理とその周辺分野の研究, 数理解析研究所講究録, 第 1955 巻, pp. 198–204. 京都大学数理解析研究所, 2015.

[8] 田島慎一. 一般固有ベクトル空間の構造を求める計算法について. Computer Algebra: The Algorithms, Implementations and the Next Generation, 数理解析研究所講究録, 第 1843 巻, pp. 146–154. 京都大学数理解析研究所, 2013.

[9] 田島慎一, 照井章. 行列の最小消去多項式候補を利用した固有ベクトル計算. 数式処理とその周辺分野の研究, 数理解析研究所講究録, 第 1815 巻, pp. 13–20. 京都大学数理解析研究所, 2012.

[10] 田島慎一, 照井章. 行列の最小消去多項式候補を利用した固有ベクトル計算 (II). 数式処理研究と産学研究の新たな発展, MI レクチャーノート, 第 49 巻, pp. 119–127. 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, 2013.

[11] 田島慎一, 照井章. 行列の最小消去多項式候補を利用した固有ベクトル計算 (III). 数式処理とその周辺分野の研究, 数理解析研究所講究録, 第 1907 巻, pp. 50–61. 京都大学数理解析研究所, 2014.

[12] 田島慎一, 照井章. 行列の最小消去多項式候補を利用した固有ベクトル計算 (IV). 数式処理とその周辺分野の研究, 数理解析研究所講究録, 第 1955 巻, pp. 188–197. 京都大学数理解析研究所, 2015.

[13] 田島慎一, 奈良洸平. 最小消去多項式候補とその応用. In *Computer Algebra — Design of Algorithms, Implementations and Applications*, 数理解析研究所講究録, 第 1815 巻, pp. 1–12. 京都大学数理解析研究所, 2012.