# Special generic maps on closed and simply-connected manifolds of dimension 6

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 北澤 直樹
Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University Naoki Kitazawa
n-kitazawa@imi.kyushu-u.ac.jp / naokikitazawa.formath@gmail.com
https://naokikitazawa.github.io/NaokiKitazawa.html

本内容は、京都大学数理解析研究所国際共同利用・共同研究拠点事業の一環として実施された研究集会「特異点論の展開」(https://www2.akita-nct.ac.jp/kasedou/workshop/rims2023/indexj.html) の著者自身による「"同題名"の講演」に関連した報告である。

## 1 導入。

閉多様体上の特異点を丁度 2 個持つような Morse 関数、所謂 Reeb の定理で次元 4 以外の球面と次元 4 の単位球面を特徴づける関数、単位球面の射影は、special generic 写像(special generic map)として一般化される。境界のない滑らかな多様体の間の滑らかな写像で、特異点でないような点のまわりでは射影で表され特異点まわりでは $(x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_{n-1}, \Sigma_{j=1}^{m-n+1} {x_j}^2)$ の型で表されるようなものが special generic 写像である。

Special generic 写像が登場したのは認識する限り [2] である([3] 等に少し関連した研究はある)。それ以降 [5, 16, 17, 18, 19, 21] 続いて [14, 22, 23] 等があり、特に 1990年代以降、定義の厳しさが多様体の位相や可微分構造に制限を与えること等が明らかにされてきた。

一方、自然に構成できるものも、所謂具体的な関数や写像の構成の難しさというものがある故多くはないが、あるにはある。例えば、単位球面と微分同相な球面を二つ直積したような多様体を滑らかなカテゴリーで連結和して得られる多様体は、 special generic 写像で、像が、単位球面と微分同相な球面と単位球体と微分同相な球体を直積した多様体を滑らかなカテゴリーで境界連結和して得られる多様体で、ユークリッド空間に余次元 0 で自然に埋め込まれたようなものを、多くの場合自然にもつ。

こういった流れから、 special generic 写像は、多様体の代数トポロジー、微分トポロジーにおいて重要なツールと同時に興味深い対象となる。以下、講演内容を特に「自身作成の自身の用いたスライド」(非公開)をもとに時に「自身作成の」スライド内の図や文言等も拝借しながら報告させて頂く。なお、いくつかの定理については証明のアウトラインや一部を紹介するが、詳細な証明等は引用している論文やプレプリントを参考にして頂ければと思

う。

今回、

Problem **1.** Special generic 写像をもつような多様体の代数トポロジー、微分トポロジー的性質を明らかにしよう。

というのが主題であった。より詳細には以下を考えた。

Problem **2.** 高次元の多様体を special generic 写像のような特別な扱いやすい滑らかな写像を用いて理解しよう。特に、自由度の高さから代数的・抽象的に分類が完成したとされる次元 5 以上の単連結閉多様体を幾何的に理解しよう。

関連して、次元 5 以下の(単連結)閉多様体上の special generic 写像についてはそれなりに成果がそろっている。今回は特に講演者が初めて挑戦した次元 6 の場合についてのいくつか得られた定理とその証明の紹介を中心に据え、講演者の special generic 写像に関する研究について紹介した。

# 2 多様体・滑らかな写像・特異点に関する基本的用語や記法。

- $\mathbb{R}^k$ : $k$ 次元 Euclid 空間 ($\mathbb{R}^1 := \mathbb{R}$)。

  なおこれは、もっとも単純な $k$ 次元の滑らかな多様体で標準的 Euclid 計量のはいった Riemann 多様体でもある。

- $||p||$ : $p \in \mathbb{R}^k$ と原点 $0 \in \mathbb{R}^k$ の間の距離。

- $S^k$ ($D^{k+1}$):=$\{p \in \mathbb{R}^{k+1} \mid ||x|| =$(resp. $\leq$)$1\}$ : $k$ 次元単位球面 (resp. $(k+1)$ 次元単位球体)。

- $X^l$ : $l$ 次元の可微分多様体(滑らかな多様体) $X$ ("$X^l$" の $l$ は次元)。

- $\pi_{k,k'} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k'}$ $(k \geq k' \geq 1)$ を $\pi_{k,k'}(x_1,x_2) := x_1$ $((x_1,x_2) \in \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k'} \times \mathbb{R}^{k-k'})$ で定義($\mathbb{R}^{k'} \times \mathbb{R}^0 = \mathbb{R}^{k'}$): 所謂自然な射影( $S^{k-1}$ への制限は単位球面の射影)。

- $f : M^m \to N^n$ を滑らかな多様体間の滑らかな写像として、$p \in M^m$ で(微分 ${df}_p$ の階数) $< \min\{m,n\}$ が成り立つとき $p$ は $f$ の<u>特異点</u>であるという($n = 1$ のときは<u>臨界点</u>ともいう)。$f(p)$ を $f$ の <u>特異値</u>という($n = 1$ のときは<u>臨界値</u>とも)いう。$S(f)$ で $f$ の特異点全体の集合を表す。今後この多様体間の滑らかな写像に関する記法は多く使うが、特に指示等ない限り $m \geq n \geq 1$ で $M^m$ は連結閉多様体とする。

- 関数 $f : M^m \to \mathbb{R}$ が滑らかであるとする。 ($f$ の)各臨界点 $p$ で、$x = 0 \in \mathbb{R}^m$ と同一視して適切な局所座標と適切な整数 $0 \leq i(p) \leq m$ で $(x_1,\cdots,x_m) \mapsto \Sigma_{j=1}^{m-i(p)} {x_j}^2 - \Sigma_{j=1}^{i(p)} {x_{m-i(p)+j}}^2 + f(p)$ と表せるとき(つ

まり臨界点が非退化であるとき)、 $f$ は Morse 関数であるという。Morse 関数において、$i(p)$ は値域の値の大小を考慮すると一意である。Special generic 写像は、各臨界点 $p$ について、 $i(p) = 0, m$ の場合を自然に高次元化したものとなる。

- 二つの滑らかな多様体が微分同相であるとは、二つの多様体の間の微分同相写像、つまり特異点をもたないような滑らかな同相写像が存在することを意味する。
- ここでは、滑らかな多様体が単位球面と同相なときホモトピ—球面とよぶ。さらに、単位球面と微分同相なものを標準球面とよぶ。今回は殆ど出てこないが、そうではないホモトピー球面をエキゾチック球面と呼ぶ。
- 連結和や境界連結和は滑らかなカテゴリーで考える。
- 滑らかな束とは、ファイバーが滑らかな多様体で構造群が微分同相群(の部分群)であるようなものとする。線形束とは、ファイバーがユークリッド空間、単位球面または単位球体で構造群が自然に線形に作用するような束とする。

なお、本稿に関連した Morse 関数の基本的な理論と多様体の微分位相幾何に関する議論について [13] を挙げる。Morse 関数の高次元版に関連した特異点論に関する教科書として、[6] を挙げる。

# 3 Special generic 写像の基本的性質やいくつかの知られた結果。

**Proposition 1** ([16]). 整数 $m > n \geq 1$ を与え、 $f : M^m \to \mathbb{R}^n$ を special generic 写像とする。このとき以下が満たされる。

1. $n$ 次元連結コンパクト多様体 $W_f$, 滑らかな全射 $q_f : M \to W_f$, 滑らかなはめ込み $\bar{f} : W_f \to \mathbb{R}^n$ で $f = \bar{f} \circ q_f$ と残りの性質を満たすようなものがある。
2. $q_f|_{S(f)}$ は境界 $\partial W_f \subset W_f$ への微分同相写像である。
3. $W_f$ の小さな管状近傍 $N(\partial W_f)$ があり、$N(\partial W_f)$ の逆像への $q_f$ の制限と $\partial W_f$ への自然な射影の合成は、ファイバーが $D^{m-n+1}$ であるような線形束を与える。
4. $q_f$ の $W_f - \mathrm{Int}\, N(\partial W_f)$ の逆像への制限は、ファイバーが $S^{m-n}$ であるような滑らかな束を与える。

Figure 1 も参照のこと。

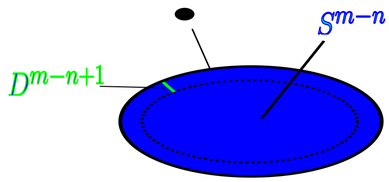


Figure 1: Proposition 1 で、special generic 写像 $f$ からでてくる商写像 $q_f : M \to W_f$ の値域の多様体 $W_f$ といくつかの点や線分の逆像。例えば $W_f$ の境界上の点の逆像は 1 点集合である。

Example **1.** 最初の節で挙げた単位球面の射影と球面の直積の連結和上の special generic 写像 $f$ は、 $\bar{f}$ が埋め込みであり、前の Proposition 1 の束が自明になるような例である。

後者の写像について補足する。$l > 0$、$m \geq n \geq 1$ を整数とし、 $m$ 次元閉多様体 $M^m$ を $\{S_{k_j} \times S^{m-k_j}\}_{j=1}^{l}$ 内の $l$ 個の多様体の連結和で表されるようなものとする。ただし $1 \leq k_j \leq n-1$ とする。このとき $M$ は $\mathbb{R}^n$ への special generic 写像で像が $\{S^{k_j} \times D^{n-k_j}\}_{j=1}^{l}$ 内の $l$ 個の多様体の境界連結和で表される多様体を $\mathbb{R}^n$ へ自然に埋め込んだものであるようなものをもつ。

さらに Proposition 1 によれば、 special generic 写像(の定義域の多様体)は、 ”3.” の束でファイバーを境界 $\partial D^{m-n+1}$ に制限して得られる部分束と ”4.” の束の底空間を境界に制限して得られる束の間の同型で貼り合わせてできるとみられる。さらにこの束の議論に対し補足する。底空間は、管状近傍 $N(\partial W_f)$ と補空間(の閉包)の貼り合わせで得られている $W_f$ という部分を考慮し、自然に同一なものとしてみている。単位球面であるファイバーについては $\partial D^{m-n+1} = S^{m-n}$ なる関係で自然に同じものとみている。

そしてここで挙げた例では、この同型は自然に底空間の恒等写像とファイバーの恒等写像の直積写像とみなせる。

Remark **1.** Proposition 1 の”逆”として、逆にはめ込まれた多様体 $W_f$ の方からそれを像とするような special generic 写像を再構成できることについても、原論文では説明されている。また、今回 $m = n$ のケースはあまり考えない。このケースは Eliashberg の 1970 年代の有名な理論 [4] である。

**Theorem 1** (1993 Saeki [16, 17], 2005 Saeki Suzuoka [20], 2013– K [7, 8, 9])**.** $A$ を可換環とする。Proposition 1 で、 $q_f$ は準同型写像 ${q_f}_* : H_j(M;A) \to H_j(W_f;A)$、${q_f}^* : H^j(W_f;A) \to H^j(M;A)$、 ${q_f}_* : \pi_j(M;A) \to \pi_j(W_f;A)$ を $0 \leq j \leq m-n$ では同型となるように導く。

証明の詳細は省略する。証明において重要なものは、まずコンパクトな位相(PL)多様体(さらに強く $m-n = 1, 2, 3$ では滑らかな多様体) $W$ で、境界について $\partial W = M$ が成り立ち、また $W_f$ に($W_f$ を自然に PL 多様体としてみて)縮約しさらに $W_f$ の上のファイバーが $D^{m-n+1}$ であるような束の全空間となるようなものがとれるということである。 $W_f$ は $n-1$ 次元の多面体に縮約するような多面体とみなせる。$W$ は、 $M$ を $M \times \{1\}$ と対応 $x \mapsto (x, 1)$ で同一視し、 $M \times [0, 1]$ を用意して $M \times \{1\}$ を含むような境界成分に沿って

然るべき順に高々指数 $(m+1)-(n-1)=m-n+2$ の"ハンドル"を接着して得られる多様体とみられる。

**Theorem 2** (Reeb's Theorem [15], 1968 Calabi [3], 1993 Saeki [16, 17])**.**

1. (Reeb's theorem [15]) Special generic 写像 $f: M^m \to \mathbb{R}$ があることと $M^m$ が次元 $m \neq 4$ のホモトピー球面であるか次元 $m=4$ の標準球面であることが同値である。

2. (1993 Saeki [16, 17]) $M^m$ を次元 $m \geq 2$ のホモトピー球面とする。Special generic 写像 $f: M^m \to \mathbb{R}^2$ があることと、$M^m$ が前の Reeb's theorem のホモトピー球面であることは同値である。さらにここでの $f: M^m \to \mathbb{R}^2$ $(m > 2)$ について, Proposition 1 の $W_f$ は $D^2$ と微分同相。

3. (1993 Saeki [16, 17]) $m > n \geq 1$ で $f: M^m \to \mathbb{R}^n$ を special generic 写像とする。$M^m$ が $m$ 次元ホモトピー球面ならば Proposition 1 の $W_f$ は可縮である。なお、逆に $W_f$ が可縮であるような special generic 写像 $f: M^m \to \mathbb{R}^n$ について $M^m$ はホモトピー球面である。

4. (1968 Calabi [3], 1993 Saeki [16, 17]) $m \geq 4$, $n = m-1, m-2, m-3$ で $f: M^m \to \mathbb{R}^n$ がホモトピー球面上の special generic 写像であれば、$M^m$ は標準球面である。

Special generic 写像は球面の可微分構造も強く制限するのである。詳細は省略するが、証明では、Proposition 1 の $W_f$ が強く位相的な制限を受けるということが最大のポイントである。

**Theorem 3** ([16, 17])**.** $M^m$ が special generic 写像 $f: M^m \to \mathbb{R}^2$ を持つための必要十分条件は、$M$ が以下いずれかであることである。.

1. 次元 $m$ のホモトピー球面(ただし $m \geq 2$ かつ $m \neq 4$)。

2. 次元 $m=4$ の標準球面。

3. $m \neq 1, 5$ で、$S^1$ 上の、ファイバーが $m-1$ 次元ホモトピー球面をファイバーとする滑らかな束の全空間有限個の連結和で表されるような多様体に微分同相な多様体。

4. $m=5$ で、$S^1$ 上の、ファイバーが次元 4 の単位球面であるような滑らかな束の全空間の連結和で表されるような多様体に微分同相な多様体。

**Theorem 4** ([16, 17])**.** $m \geq 4$ を整数とし、$M^m$ は単連結閉多様体、$f: M \to \mathbb{R}^3$ を special generic 写像とする。このとき多様体 $M$ は、次のいずれかと微分同相である。

1. $m=4$ の場合は標準球面。$m \geq 5$ の場合はホモトピー球面。

2. 次の多様体有限個の連結和で表されるような多様体。

   (a) $m \geq 7$ で $S^2$ 上のファイバーが次元 $m-2$ のホモトピー球面であるような滑らかな束の全空間。

(b) $4 \geq m \geq 6$ で $S^2$ 上のファイバーが $S^{m-2}$ であるような線形束の全空間。

詳細は省略するが、これら二つの Theorem の証明で重要なことを述べる。多様体を決定するうえで重要なことは、special generic 写像 $f: M \to \mathbb{R}^n$ について Proposition 1 の全射 $q_f: M \to W_f$ の値域の多様体 $W_f$ がやや強く制限を受けることである。逆に special generic 写像を構成するにあたっては、Proposition 1 の逆と時に滑らかな束の構造群や微分同相群の詳細な議論が重要になる。

**Theorem 5** (2015 Nishioka etc. ([14]))**.** 整数 $m \geq 5$ とし、 $H_1(M^m;\mathbb{Z})$ を自明な群とし、special generic 写像 $f: M^m \to \mathbb{R}^4$ があるとする。このとき $H_2(M;\mathbb{Z})$ はねじれがない有限生成アーベル群となる。

**Theorem 6** ([10])**.** $A$ を可換環とし、 $l > 0,\ m > n \geq 1$ を整数とする。 $m$ 次元連結閉多様体 $M^m$ について $\{a_j\}_{j=1}^l \subset H^*(M^m;A)$ を以下を満たすようなコホモロジー類の列とする。

- 各元の次数が $m-n$ 以下で次数の和が $n$ 以上。
- カップ積 $\cup_{j=1}^l a_j$ が零元でない。

このとき special generic 写像 $f: M \to \mathbb{R}^n$ は存在しない。

証明は　Theorem 1 のコホモロジー群の間の同型と、基本的な、コホモロジー類のカップ積の議論等を使えばできる。

さて、次元 $k$ の実射影空間を $\mathbb{R}P^k$、複素次元 $k$ で実次元 $2k$ の複素射影空間を $\mathbb{C}P^k$ で表す。

**Corollary 1** ([10])**.** *1.* $1 \leq n \leq m-1$ として $m$ 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^m$ は、$\mathbb{R}^n$ への special generic 写像を持たない。

*2.* $m$ を 4 以上の偶数、$1 \leq n \leq m-2$ とする。 $\frac{m}{2}$ 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^{\frac{m}{2}}$ は、 $1 \leq n \leq m-2$ として $\mathbb{R}^n$ への special generic 写像を持たない。

整数 $m > 1$ を任意にとる。このとき次を満たすような $m$ 次元連結閉多様体を簡単に得ることができる ([10])。

- ある正の整数 $n_0 < m$ について、$1 \leq n < n_0$ で special generic 写像 $f: M \to \mathbb{R}^n$ は存在しない。
- $n_0 \leq n \leq m$ では special generic 写像 $f: M \to \mathbb{R}^n$ が存在する。

Example **2** ([10])**.** 1. $\prod_{j=1}^m S^1$。 $n_0 = m-1$ でとれる。

2. より一般に、いくつかの単位球面から初めて直積、連結和をとるという操作を繰り返して得られる多様体は、多くの場合適切に定めたこの型の条件に当てはまるような多様体となる。

この Example の ”2.” の例を一つ紹介する。

Example **3.** $S^2 \times S^4$ の 3 個の連結和 $M_1$ も $M_2 = S^2 \times S^2 \times S^2$ も閉単連結多様体で、$H_2(M_i;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ で $H_3(M_i;\mathbb{Z})$ は自明群である(他の整係数ホモロジー群は Poincaré 双対性等から従いまた $i = 1, 2$ である)。

$\mathbb{R}^n$ への special generic 写像の存在を論じる。

$M_1$ は $n = 1, 2$ では持たないが $n = 3, 4, 5, 6$ では $\mathbb{R}^n$ への special generic 写像をもつ。

$M_2$ は $n = 1, 2, 3, 4$ では持たない。 $M_2$ について、$n = 5, 6$ の場合を考える。 $S^2$ 上の恒等写像と Example 1 の $\mathbb{R}^{n-2}$ への $S^2 \times S^2$ 上の special generic 写像(で値域を像を内部に含むような単位球体 $D^{n-2}$ と微分同相な多様体に制限したもの)の直積写像を考える。そして値域を自然に埋め込んだものを考えると、 $\mathbb{R}^n$ への special generic 写像ができる。

単連結でまた整係数ホモロジー群では区別できない二つの閉多様体の、(有理)コホモロジー環の違いが、 "Special generic 写像の存在するようなユークリッド空間の次元"に影響を与えていることを示す興味深い例である。

## 4 主定理と周辺。

**Theorem 7** ([16])**.** $m = 4, 5, 6$ とし、 $M^m$ は次元 $m$ の単連結閉多様体とする。 $M$ が special generic 写像 $f : M \to \mathbb{R}^3$ を持つための必要十分条件は、$M$ が以下いずれかであることである。

1. 次元 $m$ の標準球面。
2. $S^2$ 上の $S^{m-2}$ をファイバーとするような線形束の全空間有限個の連結和で表されるような多様体に微分同相な多様体。

**Theorem 8** ([14])**.** 次元 $m = 5$ の単連結閉多様体 $M^m$ が special generic 写像 $f : M \to \mathbb{R}^4$ を持つための必要十分条件は、$M$ が以下のいずれかであることである。

1. 次元 5 の標準球面。
2. $S^2$ 上の $S^3$ をファイバーとするような線形束の全空間有限個の連結和で表されるような多様体に微分同相な多様体。

証明の詳細は省略する。証明で重要なことのひとつは、Proposition 1 や周辺である。加えて、Theorem 1 や Theorem 5 と 5 次元単連結閉多様体の分類に関する結果([1])の適用が重要なポイントである。

**Main Theorem 1** ([11])**.** 次元 $m = 6$ の単連結閉多様体 $M^m$ が special generic 写像 $f : M \to \mathbb{R}^4$ を持つための必要十分条件は、$M$ が以下のいずれかであることである。

1. 次元 6 の標準球面。
2. $S^2$ 上の $S^4$ をファイバーとするような線形束の全空間有限個と $S^3 \times S^3$ のコピー有限個の連結和で表されるような多様体に微分同相な多様体。

こちらも証明の詳細は省略する。証明で重要なことのひとつは、Proposition 1 とその逆や Theorem 1、Theorem 5、Theorem 6 の周辺である。加えて 6 次元単連結閉多様体の分類に関する結果([24, 25])の適用が重要なポイントである。

**Main Theorem 2** ([11]). $M^6$ を次元 $m=6$ の単連結閉多様体で $H_2(M;\mathbb{Z})$ が有限で単位元でなく位数が偶数であるような元 $a \in H_2(M;\mathbb{Z})$ がないものとする。 Special generic 写像 $f: M^6 \to \mathbb{R}^5$ が存在するための必要十分条件は $M$ が $M_0 \sharp (S^3 \times S^3) \cdots (S^3 \times S^3)$ という型の多様体、以下を満たすような単連結有理ホモロジー球面 $M_0$ と有限個の $S^3 \times S^3$ のコピーの連結和で表せる多様体に微分同相であることである。

1. 単位元でなくかつ位数が偶数であるような元 $a_0 \in H_2(M_0;\mathbb{Z})$ がない。
2. $M_0$ の全 Stiefel-Whitney 類・全 Pontrjagin 類が自明。
3. すべての素数 $k>1$ について、$H^2(M_0;\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ の元のカップ積が常に $H^4(M_0;\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ の零元となる。

証明の概略を説明する。

まず、Theorem 1 より special generic 写像 $f: M \to \mathbb{R}^5$ があるとすると $W_f$ は単連結である。$H_2(M;\mathbb{Z})$ が有限群であることから、$\partial W_f$ が連結であることも分かる。これは慣れていればそこまで難しくなくまたこの流れの中で分かる方は分かるかもだが、そこまで自明ではない。同じくさほど自明ではないこと、$H_2(M;\mathbb{Z})$ と $H_2(W_f;\mathbb{Z})$ は同型で有限群である。また ${q_f}_*$ でこの同型は誘導できる。

Proposition 1 の "3." と "4." の束の自明性も従う。$M$ の全 Stiefel-Whitney 類・全 Pontrjagin 類が自明であることになる。

$H_2(M;\mathbb{Z}k/\mathbb{Z})$ の各元 $a$ は $M$ に滑らかに埋め込まれた 2 次元球面 ${S^2}_a$ で表される。さらに $H_2(W_f;\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ の各元は $W_f$ の内部に滑らかに埋め込まれた 2 次元球面で表されるが、$H_2(M;\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ の各元 $a$ はそのような球面 $\bar{S_a}$ のうち適当なものの上に　Proposition 1 の "4." の束を制限して得られる束の切断の像 $S_a$ で表せる。球面 $\bar{S_a}$ について、それが表すホモロジー類の Poincaré 双対に自然に対応するような 3 次のホモロジー群 $H_3(W_f,\partial W_f;\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ の元とそれを表す 3 次元の滑らかで適切に埋め込まれたコンパクト多様体 $F_a$ がとれる。なお適切に埋め込まれているということは、内部が内部、境界が境界に埋め込まれていることを意味する。さらに、厳密には、いわゆる"境界部分での横断性"も考慮する(がそこまで慣れなくても問題ない)。これは $\bar{S_a}$ と $W_f$ の内部の1 点で横断的に交わるとみなせる。二つの $a_1, a_2 \in H_2(M;\mathbb{Z}k/\mathbb{Z})$ を考える。 3 次元多様体 $F_{a_1}$ と　$F_{a_2}$ を述べた流れの中で考える。これらの多様体の交わりは、一般に、 $W_f$ の内部に滑らかに埋め込まれた円周の非交和と $W_f$ に滑らかにかつ適切に埋め込まれた閉区間の非交和の非交和として表される 1 次元コンパクト多様体として良い。これの $q_f: M \to W_f$ による逆像は、 $M$ 内の滑らかに埋め込まれた 4 次元閉多様体である。$W_f$ の構造の制限、特に、単連結であることと境界が連結であることから、この 4 次元閉多様体は、 $H_4(M;\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ の零元を表すことが分かる。これにより性質 "3." が $M$ の場合に成り立つこと、つまり、すべての素数 $k>1$ について、$H^2(M;\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ の元のカップ積が常に $H^4(M;\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ の零元となることが分か

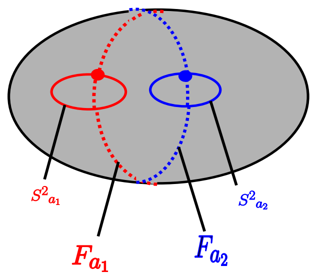


Figure 2: 5 次元多様体 $W_f$ の中の 2 次元球面 $S^2{}_{a_i}$ と 3 次元コンパクト多様体 $F_{a_i}$。Poincaré 双対性と横断性を満たすように交わる。

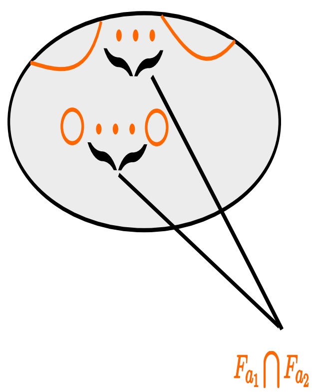


Figure 3: $F_{a_1} \bigcap F_{a_2}$。Figure 2 から大幅に変更した。$F_{a_1} \bigcap F_{a_2}$ は$W_f$ に埋め込まれた 1 次元のコンパクト多様体とみなせ、境界を固定して零ホモトピックである。 ${q_f}^{-1}(F_{a_1} \bigcap F_{a_2})$ は $H_2(M;\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ の零元を表す。

る。なお、この最後の部分でも Poincaré 双対性の基本的な議論を用いていることに触れておく。Figure 2 と Figure 3 も参照のこと。なお、Figure 3 は Figure 2 から大幅に変更している。

最後に、 6 次元単連結閉多様体の分類に関する結果([24, 25])を使う。この際、決定がうまくいくことに、 $M$ の連結和表示に関する事実、 $H_2(M;\mathbb{Z})$ が有限で単位元でなく位数が偶数であるような元 $a \in H_2(M;\mathbb{Z})$ がないという事実は相当重要となる。

逆に写像を与えられた多様体に構成する方は、Proposition 1 の逆を用いる。こちらは何度か述べた 6 次元単連結閉多様体の分類に関する結果等も使うことですぐにできる。

## 5 謝辞他。

今回の内容は例えば以下より補助等を受けております。

- 本内容は、京都大学数理解析研究所国際共同利用・共同研究拠点事業の一環として実施された研究集会「特異点論の展開」(https://www2.akita-nct.ac.jp/kasedou/workshop/rims2023/indexj.html)

  の著者の講演をもとにしたものです。

- JSPS KAKENHI Grant Number JP17H06128 (代表者: 佐伯 修)。講演者はこのプロジェクトのメンバーとして働いていました。このプロジェクトに関連し、今回の内容で佐伯氏他当時プロジェクトメンバーであった Dominik Wrazidlo 氏(Heidelberg Univ.) に議論して頂けたこと、大いに感謝申し上げます。

- JSPS KAKENHI Grant Number JP22K18267 (代表者: 佐伯 修)。講演者はこのプロジェクトのメンバーとして働いていました。前述のプロジェクトとこのプロジェクトに関連し、佐伯氏と今回の内容に関連した非公式セミナーを実施させて頂けたこと、大いに感謝申し上げます。

- JSPS KAKENHI Grant Number JP21H04428 (代表者: 大槻 知忠) または JSPS KAKENHI Grant Number JP19K03502 (代表者: 茂手木 公彦)からも例えば後の"横浜国立大学訪問"の部分で補助を得ております。

- 講演者は九州大学マス・フォア・インダストリ研究所学術研究員で、詳細にはマス・フォア・イノベーション連係学府の"ヤングメンター"(https://www.jgmi.kyushu-u.ac.jp/en/)として働いております。今回の内容は業務とも**関連しております**。
  なお**今回の内容**は**業務とは"公式には独立"したもの**でもあります。

- 講演者は大阪公立大学数学研究所特別研究員(MEXT Promotion of Distinctive Joint Research Center Program JPMXP0723833165)でもあり、金銭的な補助等はないですが、我々の研究はこちらにも支えて頂いております。

- IMI 若手研究-短期共同研究 20200027 "高次元多様体の世界の幾何的構成的と高次元データへの応用"(代表者: 北澤 直樹)。金銭的な補助等はないですがこちらにも関係しております。

講演を聴講して下さった皆様に大いに感謝申し上げます。特に質問・議論して下さった以下の三者三グループに大いに感謝申し上げます。

- 「佐久間 一浩　氏(近畿大学)」とその周辺とは、special generic 写像をもつ多様体のトポロジーについて、特に、多様体の単連結性を外すことについて、関連したご質問をもとに、議論させて頂きました。

- 「山本 卓宏　氏(東京学芸大学)」とその周辺とは、special generic 写像について、一般に適切なクラスの折り目写像で考えると多様体の制限等はどうなるか、関連したご質問をもとに議論させて頂きました。折り目

写像は Morse 関数を自然に高次元化したものです。研究集会終了後数日後に講演者の所属機関を訪問され、その際、special generic 写像の幾何的な意味について、特異点論・幾何学全般の観点から議論をさせて頂きました。「special generic 写像は多様体のきれいな構造をとらえているのだろう」という考えにたどり着ける等しました。なお氏とは、前年度 2022 年度にも、非公式なものながら special generic 写像の自身の研究に関する議論を実施させて頂きました。そこでは、今回話しきれなかった、special generic 写像と多様体のコホモロジー環の関係に関するもうひとつの成果 [12] 等について「こういった研究で、 special generic 写像を通した、特異点論を介した、多様体のコホモロジーの理解が進んだ。」というようなことをお互いに確認できる等という成果がありました。

- 「本田 淳史　氏(横浜国立大学)」には、「Theorem 6 や Corollary 1 で special generic 写像を持たないことは、多様体のホモトピーだけでわかるか?」というご質問を頂きました。研究集会終了数日後に講演者の所属機関を訪問され、その際、多様体の”(絶対)全曲率”の最小値等との関係について、微分幾何的な内容を議論させて頂きました。この出来事は、前述の山本氏との議論の直前の出来事であり、山本氏との議論でも反映されました。なお、これらの出来事の数週間後に、横浜国立大学を訪問し、「野崎 雄太　氏(横浜国立大学)」等も交え追加の議論、例えば $S^5$ の位数が 2 の群の作用による商空間のトポロジー等についての議論等を実施させて頂きました。

オンラインで講演をさせて下さり、研究集会の運営をして下さった世話人の”加世堂 公希　先生(秋田工業高等専門学校)”、”土田 旭　先生”(滋賀大学)にも大いに感謝申し上げます。

# References

[1] D. Barden, *Simply Connected Five-Manifolds*, Ann. of Math. (3) 82 (1965), 365–385.

[2] O. Burlet and G. de Rham, *Sur certaines applications génériques d'une variété close a 3 dimensions dans le plan*, Enseign. Math. 20 (1974). 275–292.

[3] E. Calabi, Quasi-surjective mappings and a generation of Morse theory, Proc. U.S.-Japan Seminar in Differential Geometry, Kyoto, 1965, pp. 13–16.

[4] Y. Eliashberg, *On singularities of folding type*, Math. USSR Izv. 4 (1970). 1119–1134.

[5] Y. K. S. Furuya and P. Porto, *On special generic maps from a closed manifold into the plane*, Topology Appl. 35 (1990), 41–52.

[6] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics (14), Springer-Verlag (1974).

[7] N. Kitazawa, *On round fold maps* (in Japanese), RIMS Kokyuroku Bessatsu B38 (2013), 45–59.

[8] N. Kitazawa, *On manifolds admitting fold maps with singular value sets of concentric spheres*, Doctoral Dissertation, Tokyo Institute of Technology (2014).

[9] N. Kitazawa, *Fold maps with singular value sets of concentric spheres*, Hokkaido Mathematical Journal Vol.43, No.3 (2014), 327–359.

[10] N. Kitazawa, *Closed manifolds admitting no special generic maps whose codimensions are negative and their cohomology rings*, submitted to a refereed journal, arXiv:2008.04226v5.

[11] N. Kitazawa, *Characterizing certain classes of* 6*-dimensional closed and simply-connected manifolds via special generic maps*, arXiv:2205.04048.

[12] N. Kitazawa, *A note on cohomological structures of special generic maps*, a revised version is submitted based on positive comments by a referee and editors after the third submission to a refereed journal.

[13] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Math. Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1965.

[14] M. Nishioka, *Special generic maps of* 5*-dimensional manifolds*, Revue Roumaine de Math'ematiques Pures et Appliquèes, Volume LX No.4 (2015), 507–517.

[15] G. Reeb, *Sur les points singuliers dùne forme de Pfaff completement integrable ou d' une fonction numerique*, -C. R. A. S. Paris 222 (1946), 847–849.

[16] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. 49 (1993), 265–293.

[17] O. Saeki, *Topology of special generic maps into* $\mathbb{R}^3$, Workshop on Real and Complex Singularities (Sao Carlos, 1992), Mat. Contemp. 5 (1993), 161–186.

[18] O. Saeki and K. Sakuma, *On special generic maps into* $\mathbb{R}^3$, Pacific J. Math. 184 (1998), 175–193.

[19] O. Saeki and K. Sakuma, *Special generic maps of* 4*-manifolds and compact complex analytic surfaces*, Math. Ann. 313, 617–633, 1999.

[20] O. Saeki and K. Suzuoka, *Generic smooth maps with sphere fibers*, J. Math. Soc. Japan Volume 57, Number 3 (2005), 881–902.

[21] K. Sakuma, *On special generic maps of simply connected $2n$-manifolds into* $\mathbb{R}^3$, Topology Appl. 50 (1993), 249–261.

[22] D. J. Wrazidlo, *Standard special generic maps of homotopy spheres into Eucidean spaces*, Topology Appl. 234 (2018), 348–358, arXiv:1707.08646.

[23] D. J. Wrazidlo, *On special generic maps of rational homology spheres into Euclidean spaces*, Pure and Applied Mathematics Quarterly, Volume 19, Number 2 (2023), 713–730, arXiv:2009.05928.

[24] A. V. Zhubr, Closed simply-connected six-dimensional manifolds: proofs of classification theorems, Algebra i Analiz 12 (2000), no. 4, 126–230.

[25] A. V. Zhubr (responsible for the page), http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/6-manifolds:_1-connected.