

The folding family と The rotation unfolding の Versality

平松 篤樹

埼玉大学・理工学研究科

Atsuki Hiramatsu

Graduate School of Science and Engineering,

Saitama University

1 The folding family と The rotation unfolding について

$M \subset \mathbb{R}^3$ を $z = f(x, y)$ で定義付けられた正則な曲面とする. $(x, y, z) \mapsto (x, y^2, z)$ をこのグラフに制限した写像 $(x, y) \mapsto (x, y^2, f(x, y))$ を曲面 M の The folding map と呼び $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ と置く. この写像が特異点を持つ条件は曲面 M の接平面が xy -平面と一致するときであり, それが cross-cap よりも退化する条件は曲面 M の主方向が y 軸方向と一致する時であることが知られている.

この写像は曲面の無限小鏡映対称性 (Infinitesimal reflectional symmetry) を研究するために Bruce らによって導入された. ([1], [2]) 通常の意味での鏡映対称性は曲面 $z = f(x, y)$ に対して $f(x, y) = f(x, -y)$ が成立することであるため, 本稿では無限小鏡映対称性を $f_o(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) - f(x, -y))$ が原点の付近で 0 に十分近いことであると考えよう. この $f_o(x, y)$ は y に関する f の奇関数部となる. このとき次が成立する.

- $f_o(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} f_o(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} f_o(x_0, y_0) = 0$ を満たす点 (x_0, y_0) は $F(x_0, y_0) = F(x_0, -y_0)$ を満たし, $(x_0, y_0), (x_0, -y_0)$ における F の像の接平面は一致する. そのような点を Self-tangency point と呼ぶ.
- F が B_2 -特異点 $(x, y) \mapsto (x, y^2, y^5 - x^2y)$ と A -同値であるとき, その写像を少し摂動すると Self-tangency point が生じる. (図 1)
- F の特異点型を係数から判定するとき, その条件は y の奇数次の係数のみで決定される. (表.2)

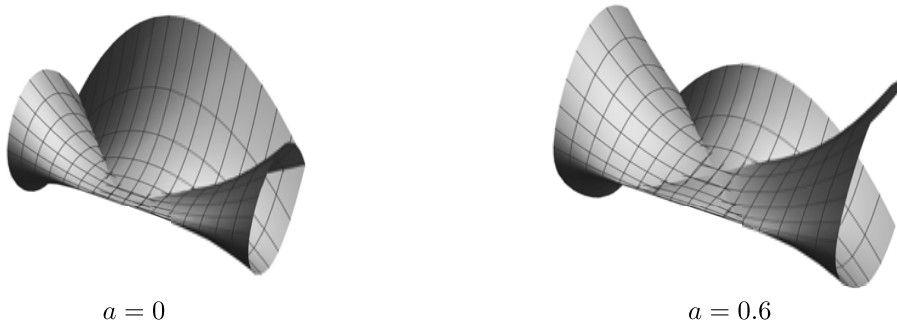


図 1 Self-tangency point を持つ写像 $(x, y) \mapsto (x, y^2, y^5 - x^2y + a^4y - 2a^2y^3)$ の像

[2] にて Bruce と Wilkinson が示したことを, 簡単にまとめる. まず The folding family の特異点型を

Mond の分類 (表 1, [8]) で整理した. そしてこの The folding map の鏡映面に運動群を作用させることで The

Germ $f(x, y)$	$\mathcal{A}_e$ -codim	Determinacy for $\mathcal{A}$	Name
(x, y^2, xy)	0	2	Cross-cap (S_0)
$(x, y^2, y^3 \pm x^{k+1}y), k \geq 1$	k	$k + 2$	$S_k^\pm$
$(x, y^2, x^2y \pm y^{2k+1}), k \geq 2$	k	$2k + 1$	$B_k^\pm$
$(x, y^2, xy^3 \pm x^ky), k \geq 3$	k	$k + 1$	$C_k^\pm$
$(x, y^2, x^3y + y^5)$	4	5	F_4

表 1 Mond 型の特異点

folding family と呼ばれる写像族を導入する. この The folding family が M の埋め込み全体の residual set で $\mathcal{A}$ -versal であること, この族の分岐集合が曲面 M の焦曲面の dual と Symmetry set の dual で表せることを示し, 分岐集合のモデルを与えた. このモデルは C_3^- -型の特異点の場合が抜けている. (図 2, 図 3) ここで, ある写像の写像族が $\mathcal{A}$ -versal であるとはその写像がとりうる変形をすべて持っているような写像族のことを指す. $\mathcal{A}$ -versal である写像族はその写像の各写像族に対してパラメータの同型が存在するため, 分岐集合にも同型が誘導される. よって $\mathcal{A}$ -versal な写像族の分岐集合のモデルを与えることで $\mathcal{A}$ -versal であるということを確認している写像族であればその分岐集合の微分同相類を知ることができる.

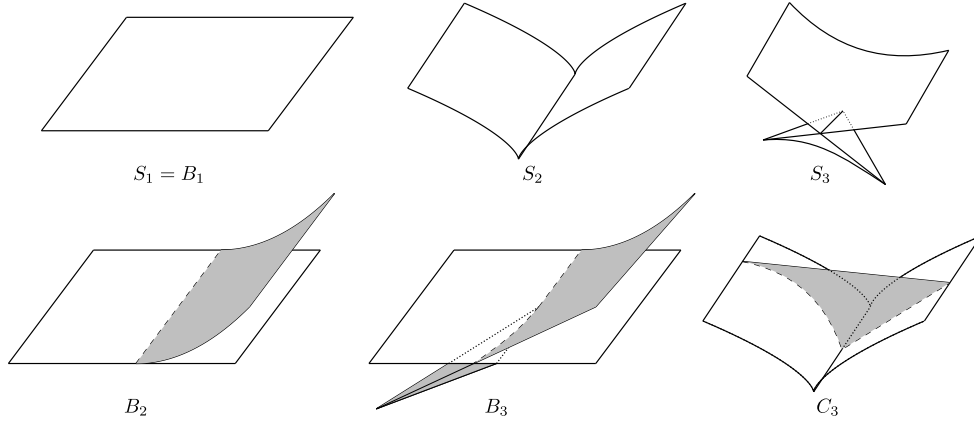


図 2 Bruce と Wilkinson による The folding family の分岐集合のモデル ([2]). 焦曲面の dual に相当するのが白い部分, The symmetry set の dual に相当するのが網掛け部分となっている.

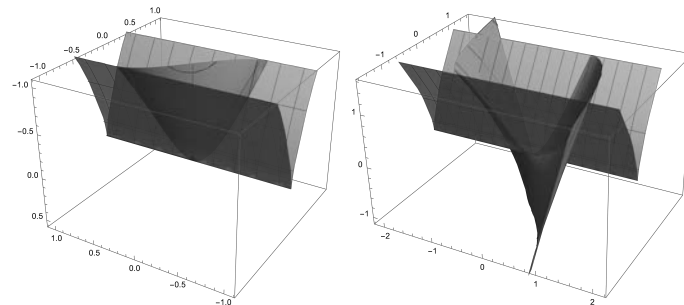


図 3 左が図 2 の C_3 のモデルで C_3^+ 型の特異点, 右が載っていない C_3^- 型の特異点の分岐集合のモデル

本稿では、The folding family とその自然な意味を持つ部分族の Versality の微分幾何学的な条件を紹介する。

2 焦曲面と劣放物点・峰点について

The folding map の特異点や The folding family の Versality を特徴付ける微分幾何学的な性質に劣放物点、峰点というものがある。この節ではそれらの概念を紹介する。詳しくは [7] を参照したい。臍点でない場合を考える。曲面 M の原点近傍における主曲率を κ_i 、対応する主方向を $\mathbf{v}_i$ と置く。

定義 2.1. 原点が $\mathbf{v}_i$ -劣放物点 ($\mathbf{v}_i$ -subparabolic point) であるとは、 $\mathbf{v}_i \kappa_j = 0$, ($i \neq j$) を満たす時であり、その点全体が 1 次元であれば $\mathbf{v}_i$ -劣放物線 ($\mathbf{v}_i$ -subparabolic line) と呼ぶ。また、原点が $\mathbf{v}_i$ -峰点 ($\mathbf{v}_i$ -ridge point) であるとは、 $\mathbf{v}_i \kappa_i = 0$ を満たす時であり、その点全体が 1 次元であれば $\mathbf{v}_i$ -峰線 ($\mathbf{v}_i$ -ridge line) と呼ぶ。

劣放物線は曲面 M の焦曲面の放物線に、峰線は曲面 M の焦曲面の cuspidal edge に対応することが知られている。分岐集合が焦曲面または The symmetry set の dual であることに注意すると図 2 にそれらの特徴が表れていることが読み取れる。このことから Bruce と Wilkinson は The folding map の特異点の条件を次のように整理した。([2])

- S_1 焦曲面上の滑らかな点となる
- S_2 焦曲面上の放物点となる (分岐集合上で尖点)
- S_3 焦曲面上の滑らかな点でガウス写像の尖点となる (分岐集合上でつばめの尾)
- B_2 焦曲面上の尖点となる (分岐集合上で放物点。モデルでは平面になっている)
- B_3 焦曲面上の尖点が Symmetry set 上の放物点軌跡の閉包上となる
- C_3 焦曲面上の cuspidal edge と放物線の交点となる

3 The folding family と The rotation unfolding の Versality

今回、我々が取り組んだ研究は The folding family と作用する運動群 Euc を回転のみに制限して考えた The rotation unfolding $\mathcal{R}$ についての Versality の幾何学的条件を考察するものである。

Bruce と Wilkinson は鏡映面に運動群を作用させるためその鏡映面を保つような変形を除くことで The folding family を次のようにして得た。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}: \mathbb{R}^2 \times Euc/H & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (p, A) & \longmapsto & A^{-1} \circ F \circ A(p) \end{array}$$

ここで、 H は平面 $y = 0$ を保つような運動群の部分群とする。これは鏡映面の回転の 2 個のパラメータと平行移動による 1 個のパラメータを持つ。[6] ではこのように構成した開折を用いて versality を検討している。これを回転のみに制限した部分族 $\mathcal{R}: \mathbb{R}^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を The rotation unfolding と呼ぶ。

[5] ではもう少し直接的に構成したものを検討している。曲面 M の法ベクトル $\mathbf{v}$ 、運動群が作用して摂動された鏡映面 $\Pi_{\mathbf{v}}$ の法ベクトルを $\mathbf{v} \in S^2$ と置き、摂動された鏡映面 $\Pi_{\mathbf{v}}$ が $\mathbf{u} := \mathbf{v} \times \mathbf{v}$, $\mathbf{w} := \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ で張られていると仮定すると、 $\mathbb{R}^3$ のフレームとして $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ が取れる。The folding map F は鏡映面 $y = 0$ の法方向の成分を 2 乗することで曲面の折り返しを実現しているため、同様にこのフレームにおける $\mathbf{v}$ 成分を 2 乗することで The rotation unfolding を得ることができる。またこの方法で The folding family を得るには鏡映

面を平行移動する必要があるが、その代わりに曲面を y -軸方向に平行移動して $(x, y) \mapsto (x, y - \varepsilon, f(x, y))$ の像を ν 方向に折り返せばいい。この具体的に書かれた形を使って分岐集合に関する計算などを行った。

以上の方法で構成された写像族らの versality をまとめると以下の定理を得る。

定理 3.1 ([5],[6]). $\mathcal{F}$ を F の The folding family, $\mathcal{R}$ を F の The rotation unfolding とする。

1. F が S_1 型の特異点であるとき, $\mathcal{R}, \mathcal{F}$ は常に $\mathcal{A}$ -versal になる。
2. F が S_2 型の特異点であるとき, $\mathcal{R}$ が $\mathcal{A}$ -versal であることと M が原点で臍点でないことが必要十分であり, $\mathcal{F}$ は原点で臍点でなければ $\mathcal{A}$ -versal である。
3. F が S_3 型の特異点であるとき, $\mathcal{R}$ は常に $\mathcal{A}$ -versal でなく, $\mathcal{F}$ は原点を通る劣放物線が非特異であれば $\mathcal{A}$ -versal である。
4. F が B_2 型の特異点であるとき, $\mathcal{R}$ が $\mathcal{A}$ -versal であることと「峰線が鏡映面: $y = 0$ に横断的であるか, 原点が D_4 型以上に退化している臍点でないこと」と必要十分であり, $\mathcal{F}$ は原点を通る峰線が非特異であれば $\mathcal{A}$ -versal になる。
5. F が B_3 型の特異点であるとき, $\mathcal{R}$ は常に $\mathcal{A}$ -versal でなく, $\mathcal{F}$ は 6-ジェットによる条件 ((2), 本稿末尾) を満たすと $\mathcal{A}$ -versal になる。
6. F が C_3 型の特異点であるとき, $\mathcal{R}$ は常に $\mathcal{A}$ -versal でなく, $\mathcal{F}$ は劣放物線と峰線が横断的に交わっていれば $\mathcal{A}$ -versal になる。

曲面が臍点を持つとき, Darboux による分類で与えられる Lemmon, monstar, star 型であれば $\mathcal{F}$ があるための必要十分 $\mathcal{q}$ versal になることが分かっている。 $\mathcal{A}$ -versal であるための必要十分条件は Fukui, Hiramatsu ([6]) にて与えられているが、臍点であるとき条件が煩雑であるためここでは割愛する。

証明の概略. 1. の The rotation unfolding の場合のみを述べる。曲面 M が Monge 形式

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2) + \sum_{i+j \geq 3}^m \frac{1}{i!j!} a_{ij} x^i y^j + O(m+1)$$

で与えられていたとする。このとき, F の特異点の判定条件は以下で与えられる ([4]).

特異点型	係数の条件
$S_1^\pm$	$\pm a_{21} a_{03} > 0$
S_2	$a_{21} = 0, a_{03} \neq 0, a_{31} \neq 0$
$S_3^\pm$	$a_{21} = 0, a_{31} = 0, \pm a_{03} a_{41} > 0$
$B_2^\pm$	$a_{21} \neq 0, a_{03} = 0, \pm(3a_{21} a_{05} - 5a_{13}^2) > 0$
$B_3^\pm$	$a_{21} \neq 0, a_{03} = 0, 3a_{21} a_{05} - 5a_{13}^2 = 0,$ $\pm(9a_{07} a_{21}^3 - 63a_{15} a_{13} a_{21}^2 + 105a_{23} a_{13}^2 a_{21} - 35a_{31} a_{13}^3) > 0$
$C_3^\pm$	$a_{21} = 0, a_{03} = 0, \pm a_{31} a_{13} > 0$

表 2 Mond の分類と係数の条件

ある C^∞ -写像芽 $g: \mathbb{R}^n, \mathbf{0} \rightarrow \mathbb{R}^p, \mathbf{0}$ の開折 $G: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbf{0} \rightarrow \mathbb{R}^p, \mathbf{0}$ が $\mathcal{A}$ -versal であることの条件は u_i を G のパラメータとすると次であることが知られている ([9]).

$$T\mathcal{A}_e g + \left\langle \frac{\partial G}{\partial u_1} \Big|_{\mathbb{R}^n \times \mathbf{0}}, \dots, \frac{\partial G}{\partial u_r} \Big|_{\mathbb{R}^n \times \mathbf{0}} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \theta(g) \quad (1)$$

これを The rotation unfolding $\mathcal{R}$ の場合で考えると、次のような行列が誘導される．この行列は自明な行や列を削除している． b_{ij}, c_{ij} は右からの作用の部分， q_i は左からの作用の部分， r_i は開折をパラメータで微分して 0 に制限した部分となっている．縦列には $\theta(F)$ の生成元が並んでいる．

	b_{00}	b_{10}	b_{01}	b_{11}	b_{21}	b_{03}	c_{00}	c_{10}	c_{01}	c_{20}	c_{11}	c_{02}	q_1	q_2	q_3	r_1	r_2
ye_1			1													-1	
xye_1				1													
x^2ye_1					1								$\frac{a_{21}}{2}$				
y^3e_1						1							$\frac{a_{03}}{6}$				
ye_2							2									2	
xye_2								2									
x^2ye_2										2					$\frac{a_{21}}{2}$	k_1	
y^3e_2											2				$\frac{a_{03}}{6}$	k_2	
ye_3							k_2										-1
xye_3	$\frac{a_{21}}{2}$			k_1			a_{12}	k_2									
x^2ye_3	$\frac{a_{31}}{2}$	$\frac{a_{21}}{2}$	$\frac{a_{30}}{2}$	k_1			$\frac{a_{22}}{2}$	a_{12}	$\frac{a_{21}}{2}$	k_2					$\frac{a_{21}}{2}$		
y^3e_3	$\frac{a_{13}}{6}$		$\frac{a_{12}}{2}$				$\frac{a_{04}}{6}$		$\frac{a_{03}}{6}$		k_2				$\frac{a_{03}}{2}$		

S_1 型の特異点の場合、枠で囲まれた係数はすべて 0 でないため行列の階数が最大となり (1) を満たす． $\square$

4 話さなかったトピックについて

以上の話は ([5], [6]) にてまとめられている．本稿に触れていない話として、前者には The rotation unfolding と The folding family の分岐集合上での関係がある．The rotation unfolding のパラメータ集合は The folding family のパラメータ空間上の曲面としてみなせるが、この曲面が The folding family の分岐集合に横断的に交わることが The rotation unfolding が versal になることの必要十分条件である．後者については臍点についての細かい分類や B_2, B_3 型特異点の係数による条件の意味付けを行った

The foldong family について曲面 M の原点がジェネリックな臍点よりも退化していれば versal にならないか、と問われるとそういうわけでもなく versal になる場合が発見されている．また B_3 型特異点の時の The folding family が versal になる条件が以下であるが、これの微分幾何学的意味は未解明である．

$$\begin{vmatrix} a_{12} + \frac{a_{13}(k_2 - k_1)}{3a_{21}} & \frac{a_{14}}{2} + \frac{a_{15}}{10a_{21}}(k_2 - k_1) + \frac{a_{13}}{3a_{21}}(a_{04} - 3a_{22} + \frac{a_{23}(k_1 - k_2)}{a_{21}}) + \frac{a_{13}^2}{6a_{21}^2}(a_{30} - 2a_{12} + \frac{a_{31}}{a_{21}}(k_2 - k_1)) \\ a_{04} - 3k_2^3 - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{21}} & \frac{3a_{06}}{10} - \frac{9a_{04}k_2^2}{2} - \frac{3a_{31}a_{13}^2}{a_{21}^2} + \frac{a_{13}}{a_{21}}(-a_{14} + 6a_{12}k_2^2 + \frac{a_{12}a_{23}}{a_{21}} + \frac{a_{13}^2}{a_{21}^2}(a_{22} - k_1k_2^2 - \frac{a_{12}a_{31}}{a_{21}})) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2)$$

参考文献

- [1] J.W.Bruce, Projections and reflections of generic surfaces $\mathbb{R}^3$, Mathematica Scandinavica 54, no. 2 (1984): 262–78.
- [2] J.W.Bruce, T.C.Wilkinson, Folding maps and focal sets, Lecture Notes in Math, vol. 1462, pp. 63–72. Springer, Berlin, 1991.
- [3] Toshizumi Fukui, Masaru Hasegawa, Singularity of parallel surfaces, Tohoku Mathematical Journal.64 (2012), 387–408.
- [4] Toshizumi Fukui, Masaru Hasegawa, The differential geometry of singular surfaces parameterized by smooth maps $\mathcal{A}$ -equivalent to S_k, B_k, C_k and F_4 (2014), preprint.
- [5] Toshizumi Fukui, Atsuki Hiramatsu, Versality of rotaiton unfolding of folding maps for surfaces in $\mathbb{R}^3$, (2023), preprint.
- [6] Toshizumi Fukui, Atsuki Hiramatsu, Versality of the folding families of regular surfaces, (2023), preprint.

- [7] S.Izumiya, C.Romero Fuster, M.Ruas, F.Tari, Differential geometry from a singularity theory viewpoint. World Scientific, 2016.
- [8] David Mond, On the classification of germs of maps from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^3$, Proceedings of the London Mathematical Society, 50, (1985), 333-369.
- [9] David Mond, Juan J. Nuño-Ballesteros, Singularities of mappings, Springer Cham (2020).