実解析写像の像の解析的拡張の不可能性の判定と応用

東京工業大学・情報理工学院，梅原雅顕 (2024 年 3 月)
Masaaki Umehara, Tokyo Institute of Technology

概要

これは，筆者が 2023 年 11 月に講演した内容をまとめたものである．ただし，ほとんどの内容が筆者の共同研究で，しかも現在執筆中の論文数編に関わるため，ここではテクニカルな部分は避け，動機と研究概要を紹介する（文献にある準備中の論文は，現時点では年内には完成する予定です．）

1. 動機

現在，筆者は「実解析写像の像」の解析的な延長不可能性の判定法を与えることに取り組んでいるが，まず，その理由から説明しよう：$\mathbb{R}^3_1$ を 3 次元時空とする，つまり $\mathbb{R}^3$ に符号 $(++-)$ の標準的な Lorentz 計量を入れた空間とする．$\mathbb{R}^3_1$ において平均曲率が零の曲面が定義されるが，特に誘導計量が半正定値となるとき**極大曲面**という．極大曲面の中でも特に固定点をもつ 1 径数のローレンツ変換群の作用で不変なものを **G 型の極大カテノイド**とよぶが，以下のように全部で 3 種類ある（小林治氏により見いだされた）．

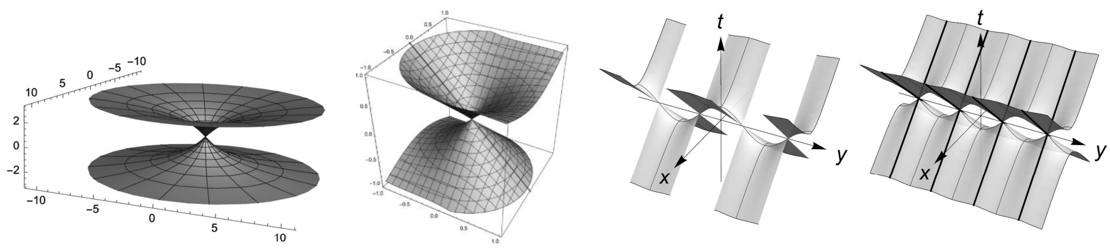

図 1. 楕円的カテノイド (左端), 放物的カテノイド (中央左)，双曲的カテノイド (中央右) と双曲的カテノイドの像の解析的拡張 (右端)

(1) 楕円的カテノイド $f_E(u,v) := (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, u)$,
(2) 放物的カテノイド $f_P(u,v) := \left(\frac{u^3}{3} - uv^2 + u, -2uv, \frac{u^3}{3} - uv^2 - u\right)$,
(3) 双曲的カテノイド $f_H(u,v) := (\sinh v \cos u, u, \cosh v \cos u)$.

楕円的カテノイドの像は解析的な拡張を持たないが，放物的カテノイドの像と双曲的カテノイドの像は，共に解析的な拡張をもつ：実際，写像 f_E の像は，以下の陰関数表示

$$\mathcal{E} := \mathrm{Im}(f_E) = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3_1\,;\, x^2 + y^2 = \sinh^2 t\} \tag{1.1}$$

をもち，写像 f_P と f_H の像は，以下の表示をもつ．

$$\mathrm{Im}(f_P) \cup L = \mathcal{P}, \qquad \overline{\mathrm{Im}(f_H) \cup T(\mathrm{Im}(f_H))} = \mathcal{H}.$$

ここで $T : \mathbb{R}^3_1 \ni (x,y,t) \mapsto (x,-y,-t) \in \mathbb{R}^3_1$ は合同変換であり，

$$\mathcal{P} := \left\{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3_1\,;\, 12(x^2 - t^2) = (x-t)^4 - 12y^2\right\} \supset L := \left\{(t,0,t)\,;\, t \in \mathbb{R}\right\}, \tag{1.2}$$

$$\mathcal{H} := \left\{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3_1\,;\, t^2 - x^2 = \cos^2 y\right\}. \tag{1.3}$$

である．$\mathcal{P}$ および $\mathcal{H}$ は平均曲率零の正則曲面を与えている．部分集合 $S(\subset \mathbb{R}^3)$ が与えられ，$\mathbb{R}^3$ 上で定義された実解析関数の零点集合に一致しているとすると，S は解析的な拡張を持たない (後の命題 2.6(3) における $m=1$ の場合に対応)．したがって，表示 (1.1)，(1.2) および (1.3) から次のことがわかる．

事実 1.1. 楕円的カテノイドの像は解析的拡張を持たない．$\mathbb{R}^3_1$ の部分集合 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{H}$ は錐的特異点をもち，それぞれ放物的カテノイド f_P と双曲的カテノイド f_H の像の解析的拡張を与え，さらにこれ以上の非自明な拡張をもたない．

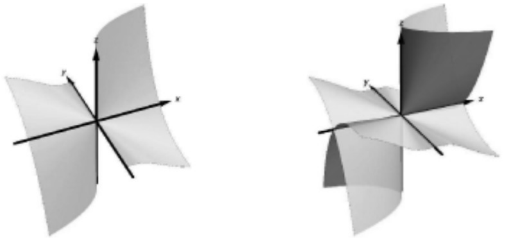

図 2．Osgood 写像の像と，その等長変換を用いた（実解析的にならない）拡張

結果的に放物的カテノイド f_P の像は単に閉包をとることで解析的な拡張が得られる．一方，双曲的カテノイド f_H の像は， $f_H(\mathbb{R}^2)$ とその合同変換による像の和集合の閉包をとることで解析的拡張が得られる．このように，時空の平均曲率が零の曲面が非自明な解析的拡張をもつ場合には，大抵その曲面の性質を個々に調べることで，その拡張が見いだされることが多い．しかし一方，その拡張が，これ以上の解析的拡張をもたないことを判定することはさらに難しい．例えば

$$f_O(u,v) := (u, uv, uve^v) \qquad (u, v \in \mathbb{R})$$

は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への実解析写像を与え，**Osgood の写像**とよばれ，定義域では v-軸が特異点集合となるが，値域では，すべての特異点が原点 $(0,0,0)$ に写され孤立特異点のように見える（図 2 左）．この曲面は f_H の像ときと同様に等長変換を用いて，(図 2 右）のような拡張を有するが，残念なことに，$f_O(\mathbb{R}^2)$ との継ぎ目は C^1 級（場所によっては C^∞-級）であり，実解析写像にはならない．すると「f_O の像は本当に実解析的な拡張を持たないのだろうか」という疑問が生ずる．より正確には

($\diamond$) M^2 を連結な 2 次元多様体とし $g : M^2 \to \mathbb{R}^3$ を 2 次元実解析写像 (ほとんど至る処で階数が 2 の実解析的な写像，定義 2.3 参照）とし，解析的に完備 (定義 2.1 参照)，つまり M^2 の空でない開集合 O が存在し $g(O) \subset f_O(\mathbb{R}^2)$ ならば，常に $g(M^2) \subset f_O(\mathbb{R}^2)$ を満たすだろうか？

という問いである (Osgood の写像に関しては答は Yes である，§3 の最後の部分参照)．F の特異点については，Osgood 自身により， F の像はいかなる実解析関数の零点にもなり得ないことが示されており，上記の ($\diamond$) を示す際には，上記の極大カテノイド f_P と f_H のときの方法は使えない．筆者は，藤森氏 (広島大)，川上氏 (金沢大)，國分氏 (東京電大)，Rossman 氏 (神戸大)，山田氏（東工大），Yang 氏（高麗大）との共同研究 [1] において，まず錐的な特異点を許す実解析的な写像の像の解析的な拡張不可能性に関する判定条件を与え，それを

- 3 次元時空の極大曲面としての G 型カテノイド，あるいは

- 3次元 de Sitter 空間 S^3_1（断面曲率は１）における空間的平均曲率１のカテノイド型曲面で錐的な特異点のみを許容するもの

に応用し，それらの解析的拡張性を調べ，拡張が存在する場合には，それ以上の拡張が存在しないことを証明した．しかし，S^3_1 の平均曲率１のカテノイド型の曲面の中には，錐的な特異点以外の特異点を許す族があり，それらの解析的拡張を構成した後，それが，さらなる拡張性を持たないことを示す必要性が生じていたが，最近ようやく，執筆中の論文 [2, 3] の応用として，それに決着をつけることができ（本稿の最後の節参照）．また，上記の Osgood の写像の像が $(\diamond)$ を満たすこともわかった．本稿では，その論文 [2, 3] を解説する．

2. 解析的完備性

ここでは，$n \geq 1$ として，実解析的な n 次元多様体 N^n と，その部分集合 S を１つ固定する．

定義 2.1 ([1]). 部分集合 S が **解析的に完備** (analytically complete) であるとは，以下の性質が満たされるときを云う：

> $\Gamma : [0, 1] \to N^n$ を任意の実解析的写像とする[1]．もしも，ある $\epsilon \in (0, 1)$ に対して $\Gamma([0, \epsilon)) \subset S$ ならば，$\Gamma([0, 1]) \subset S$ となる．

似たような概念としては Kurdyka [6] の「arc-symmetry」があるが，上記の概念より若干弱い．N^n 上で定義された実解析的な関数 $F : N^n \to \mathbb{R}$ があり，S が F の零点集合であれば，S は解析的に完備である．特に

- $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間は解析的に完備である．
- 第１節で定義した（極大曲面としての G 型カテノイド，あるいはその解析的拡張を行った後に得られる）$\mathbb{R}^3$ の部分集合 $\mathcal{E}$，$\mathcal{P}$ そして $\mathcal{H}$ は解析的に完備である．

解析的に完備であることは，S が空間 N^n において解析的な拡張を持たないことを意味する．

解析的に完備でない例を１つ与えよう．閉区間 $S := [0, 1]$ は $\mathbb{R}$ の部分集合として解析的に完備ではない．なぜなら $\Gamma(t) := 2t$ とすると $\Gamma([0, 1/2)) \subset S$ であるが $\Gamma(1) \notin S$ となるからである．ここで「解析的完備性」の概念が,「与えられた部分集合 S が非自明な解析的拡張を持たない」ことを意味する概念としては強すぎる，と感じる例を挙げよう．

例 2.2. 標準的な交叉帽子写像

$$f_W(u, v) := (u, uv, v^2) \qquad ((u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

の像 $f_W(\mathbb{R}^2)$ は解析的に完備ではない．というのは，実解析的な曲線[2] $\Gamma(t) := (0, 0, \frac{1}{2} - t)$ を考えると $\Gamma([0, \frac{1}{2})) \subset S$ であるが $\Gamma(1) \notin f_W(\mathbb{R}^2)$ となるからである（図３左）．これは，特別な実解析的な曲線は $f_W(\mathbb{R}^2)$ から脱出可能であることを意味するが，そもそも $f_W(\mathbb{R}^2)$ は２次元の集合なので，この事実から「$f_W(\mathbb{R}^2)$ が非自明な解析的拡張を許さない」と判定するには無理がある．

[1]閉区間で**実解析的**とは，その閉区間を含むある開区間上で定義された実解析的写像の制限であることとする．

[2]本稿では曲線は，区間から他の集合への写像を意味する．実解析的な曲線は「実解析的な写像」と同じ意味である．

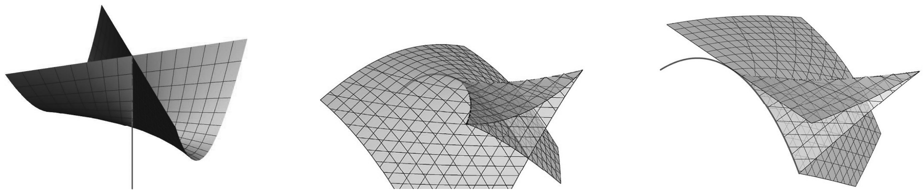

図 3. 標準的な交叉帽子写像を定める解析関数の零点集合 (左) および標準的なツバメの尾写像を定める解析関数の零点集合全体 (中央) とその半分 (右)

標準的な交叉帽子だけでなく任意の実解析的な交叉帽子写像芽は，同様に特異点から脱出する実解析的な曲線を許容する．交叉帽子だけでなく，標準的ツバメの尾写像

$$f_{SW}(u,v) := (3u^4 + u^2v, -4u^3 - 2uv, v) \qquad ((u,v) \in \mathbb{R}^2)$$

も同様の性質をもつ．これらの具体例をふまえて,「解析的完備性」の概念を少し弱めた「m-解析的完備性」を定義する．まず m 次元解析写像の概念を準備する．

定義 2.3 ([2])**.** 自然数 m $(1 \le m \le n)$ を固定する．M^m を（境界を持たない）m 次元実解析的多様体とし，$g : M^m \to N^n$ を実解析的写像とする．もしも g が M^m における開かつ稠密な部分集合において「はめ込み」となるとき，g を m **次元解析写像** (m-dimensional analytic map) とよぶ．

上記の定義において M^m が連結であれば，もしも g の微分 dg の階数が，ある点で m なら，g は m **次元解析写像**となるため,「m 次元解析写像」の判定は簡単である．

定義 2.4 ([2])**.** 自然数 m $(1 \le m \le n)$ を固定する．部分集合 $S(\subset N^n)$ が m-**解析的に完備** (m-analytically complete) であるとは，以下の性質が満たされるときを云う：

> M^m を連結な（境界を持たない）m 次元の実解析的多様体とし，$g : M^m \to N^n$ を m 次元実解析的写像とする．もしも M^m の空でない開集合 O が存在し $g(O) \subset S$ を満たすならば $g(M^m) \subset S$ となる．

閉区間 $[0,1]$ 上で定義された実解析的な曲線は，区間 $[0,1]$ を含むある開区間で定義された実解析的な曲線に拡張されるが，それを g と考えると，1-解析的完備性は，定義 2.1 の解析的完備性と同値であることがわかる．また $m < \ell$ のとき，m-解析的完備性は，ℓ-解析的完備性を導く．特に m-解析的完備性は，$m \ge 2$ のとき解析的完備性より弱いが,「m 次元的な意味において解析的な拡張を許さない」という意味をもつ．m-解析的完備性の判定には，以下の m-解析性の概念が有用である．

定義 2.5 ([2])**.** Ω を N^n の開集合とし，S を N^n の部分集合とする．S が開集合 Ω に対して m-**解析的** (m-analytic) であるとは，N^n の劣解析集合 (subanalytic set) L と，実解析的な関数 $F : \Omega \to \mathbb{R}$ が存在して，以下の条件を満たすときを云う．

(1) $S \cap L$ は空集合で,
(2) $\dim(L) < m$ を満たす，但し L が空集合のときは $\dim(L) = -1$ と定める,
(3) 関数 F の定義域 Ω における零点集合 $\mathcal{Z}(F)$ は，$\mathcal{Z}(F) = (S \cup L) \cap \Omega$ を満たし，かつ次元については $\dim(\mathcal{Z}(F)) \ge m$ を満たす.
(4) S は $\mathcal{Z}(F)$ の閉部分集合である. 特に $L \cap \Omega$ は $\mathcal{Z}(F)$ の開部分集合である.

この状況で，もしも $\Omega = N^n$ にとれるならば，S は**大域的に** m-**解析的**と云う．特に $m = 0$ ならば，S は**大域的に解析的**と云う．

この定義から以下のことが示される．

命題 2.6. いま $m \leq \ell(\leq n)$ とする．N^n の部分集合 S について以下が成り立つ．

(1) S が開集合 Ω に対して m-解析的ならば ℓ-解析的である，
(2) また，1-解析的であることと 0-解析的であることは同値，
(3) S が大域的に m-解析的であれば，S は m-解析的完備である．

例 2.2 の標準的交叉帽子写像 f_W の像については，$\mathbb{R}^3$ 上の多項式

$$F_W : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto x^2 z - y^2 \in \mathbb{R}$$

を考えると

$$f_W(\mathbb{R}^2) = \mathcal{Z}(F_W) \setminus L, \qquad L := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x = y = 0, \quad z < 0\}$$

と書ける．したがって $f_W(\mathbb{R}^2)$ は，$\mathbb{R}^3$ において大域的に 2-解析的である．同様に標準的カスプ状交叉帽子写像 f_{CW} および標準的ツバメの尾写像 f_{SW} も大域的に 2-解析的であることが示される．すると命題 2.6 により，$f_W(\mathbb{R}^2)$ と $f_{SW}(\mathbb{R}^2)$ は，共に $\mathbb{R}^3$ において 2-解析的完備であることがわかる．

3. 弧状固有写像 (ARC-PROPER MAPS) と解析的完備性に関する定理

前節で N^n の部分集合 S の解析的完備性を定義したが，大抵の場合 S は，ある解析的な写像の像である場合が多い．しかも，その写像の像が，非自明な解析的な拡張をもち，その結果として S が得られている場合には，１つの実解析的な多様体からの実解析写像の像として表されている保証はない．しかし，そのような場合でも，S が１つの位相空間 X からの連続写像

$$f : X \to N^n$$

の像に一致する (つまり $S = f(X)$) という設定は自然である．本稿では，位相空間 X は，局所コンパクトな Hausdorff 空間で第二可算公理を満たしていると仮定する[3]．$f(X)$ が，これ以上の解析的拡張を持たないことを保証する位相的な条件として，以下の定義を与える．

定義 3.1 ([2])**.** $f : X \to N^n$ を連続写像とせよ．r は非負整数であるか，あるいは $r \in \{\infty, \omega\}$ とするとき，連続曲線 $\gamma : [0, 1) \to X$ が (C^r, f)**-拡張可能**であるとは C^r-可微分な写像 $\Gamma : [0, 1] \to N^n$ があり[4]，$\Gamma(t) = f \circ \gamma(t)$ が $t \in [0, 1)$ について成り立つときを云う．このとき，f が C^r**-弧状固有写像** (C^r-arc-proper) であるとは，各 (C^r, f)**-拡張可能**であるような定値でない連続曲線 $\gamma : [0, 1) \to X$ と，1 に収束する $[0, 1)$ 上の任意の数列 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ を与えると，部分列 $\{t_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在し，極限 $\lim_{k\to\infty} \gamma(t_{i_k}) \in X$ をもつときを云う．

上記の定義は，筆者等の第一論文 [1] で与えたものと少し異なり,「Γ が定値でないこと」などの記述が加わっている．固有な連続写像は，任意の r に関して C^r-弧状固有写像であり，$r < s$ のとき (但し $\infty < \omega$ とする) C^r-弧状固有性は C^s-弧状固有性を導く．従って，$f \circ \gamma$ に実解析性を課す「C^ω-弧状固有性」が最も弱い条件である．S が N^n の部分集合であり $\iota_S : S \to N^n$ を包含写像とすれば, S が閉集合であることは ι_S が C^0-弧状固有であることを意味する．S が解析的に完備であれば，包含写像 ι_S は C^ω-弧状固有

[3]この設定では距離付け定理が適用できて，X は距離付け可能となる．

[4]閉区間上で C^r-級とは，その閉区間を含むある開区間上で C^r-級のものの制限であるときを云う．

写像でなければいけない，という意味で，我々の定義は自然なものである．以下，例を挙げよう．

例 3.2. 写像 $f_1 : \mathbb{R} \ni t \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$ は固有ではないが，C^0-弧状固有である．

例 3.3. よく知られるように，$T^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ を正方トーラスとするとき，写像

$$f_2 : \mathbb{R} \ni t \mapsto (t, \sqrt{2}t) \in T^2$$

の像は T^2 において稠密である．f_2 は固有ではないが，C^0-弧状固有写像である．

例 3.4. 写像

$$f_3(t) := \left(t, \sin\frac{1}{t}\right) \qquad (t > 0)$$

は，トポロジストの正弦曲線とよばれ，その像の閉包は連結だが弧状連結でないことで有名である．特に $f_3((0,\infty))$ は $\mathbb{R}^2$ において閉集合ではないが，f_3 は C^0-弧状固有写像である．

例 3.5. 対数うずまき線

$$f_4(t) := e^t(\cos t, \sin t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

は，１変数の実解析関数に関する一致の定理を使うと C^ω-弧状固有写像であることが示されるが，C^∞-弧状固有写像にはならない．実際

$$\Gamma(s) := \begin{cases} f_4(1/s) & (\text{if } s < 0), \\ (0,0) & (\text{if } s = 0), \\ f_4(-1/s) & (\text{if } s > 0) \end{cases}$$

は C^∞-写像であり，連続曲線 $\gamma : [-1,0) \to \mathbb{R}$ で

$$f_4 \circ \gamma(t) = \Gamma(t) \qquad (t \in [-1,0))$$

を満たすものがとれるが，区間 $[-1,0)$ 上で 0 に収束する数列 $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ に対して，常に $\{\gamma(t_k)\}_{k=1}^\infty$ は $\mathbb{R}$ 上において $-\infty$ に発散するので収束する部分列をもたない．

次に,「像解析性」の概念を与える．

定義 3.6. 写像 $f : X \to N^n$ は連続であるとせよ．与えたれた点 $x_0 \in X$ が像解析的 (image analytic) であるとは，x_0 の開近傍 $U(\subset X)$ と，$f(x_0)$ の開近傍 $\Omega(\subset N^n)$ が存在して以下の性質が満たされるときを云う．

(1) $(f|_U)^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$ であり，かつ
(2) $f(U)$ は，Ω に関して 0-解析的 (定義 2.5 参照) である．

写像に像解析性を仮定することは，それほど不自然ではない．例を挙げよう．

- X^m を m 次元実解析的多様体とし $f : X^m \to N^n$ をはめ込みとすると X^m の各点の近傍で f は埋め込みとなるため，像解析的であることが示される．
- 上記の f が錐的特異点を許すときも，適切な設定のもとで像解析的であることが示される ([1])．
- $m = 2$ のとき，$f : X^2 \to \mathbb{R}^3$ が正則点かカスプ辺のみを許容すれば f は像解析的である．

この状況における我々の得た結果は次の２つである．まず，固有な連続写像については，以下が示される．

定理 3.7 ([2])**.** $f : X \to N^n$ を 固有な連続写像とし，X 上のすべての点が像解析的であり，かつすべての x に対して $f^{-1}(f(x))$ が有限集合となるならば， $f(X)$ は解析的に完備である．

定義域が多様体で写像 f が m 次元の実解析的な写像の場合には，次が示される．

定理 3.8 ([2])**.** X^m を m 次元実解析多様体で，$f : X^m \to N^n$ が m 次元実解析的写像とせよ．もしも f が C^ω-弧状固有写像で，X^m 上の各点 $x \in X^m$ は像解析的かつ制限写像 $f|_{U_x}$ が単射となる近傍 U_x をもつならば， $f(X^m)$ は解析的に完備である．

この定理により例 3.2，例 3.3，例 3.4 および例 3.5 で与えた写像の像は，すべて解析的に完備となる．冒頭で紹介した Osgood の写像は C^ω-弧状固有ではあるが，写像の特異点は像解析的にはならない．けれども少しの修正で，上記の定理を適用することが可能であり，結果的に Osgood の写像の像の解析的完備性が従う．

4. m-解析的完備性に関する定理

m は 1 以上 n 以下の自然数とする．今度は m-解析的完備性に関する定理を紹介する．

定義 4.1. 連続写像 $f : X \to N^n$ が与えられたとき，点 $x_0 \in X$ が m-**像解析的** (m-image analytic) であるとは，x_0 の開近傍 $U(\subset X)$ と，$f(x_0)$ の開近傍 $\Omega(\subset N^n)$ が存在して以下の性質が満たされるときを云う．

(1) $(f|_U)^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$,

(2) $f(U)$ が，開集合 Ω に関して m-解析的 (定義 2.5 参照) であるときを云う．

さらに x_0 の近傍 U を，U 内の点がすべて m-像解析的となるように取れるとき，x_0 は**正規**な m-像解析的点であると云う．

自明ではないが「1-像解析性」は前節の「像解析性」と同値である．また $m \le \ell \le n$ のとき，m-像解析性は ℓ-像解析性を意味する．次が成り立つ．

命題 4.2. 「m-像解析的」という概念は写像芽に付随する．つまり x が写像 f に関して m-像解析的であれば，任意の x の開近傍 U_x に対して，制限写像 $f|_{U_x}$ も x において m-像解析的となる．

この命題の証明では，位相空間 X の局所コンパクト性が重要な役割を演ずる．連続写像においても，我々がよく知っている特異点を定義することができる．例えば $f : X \to \mathbb{R}^3$ を連続写像とし，x_0 が**交叉帽子点**であるとは

$$\Phi \circ f \circ \psi = f_W$$

を満たす局所微分同相写像 Φ と局所同相写像 ψ が存在するときを云う，但し f_W は，例 2.2 で与えた標準的交叉帽子写像である．このように定義すると，連続写像の交叉帽子点は 2-像解析的となる．ちなみに，この要領で正則点・カスプ辺点・ツバメの尾点・カスプ状交叉帽子点を定義すると，正則点とカスプ辺点は像解析的，ツバメの尾点とカスプ状交叉帽子点は 2-像解析的となる．高次元の場合であるが，波面としての超曲面に現れる $A, D\ E$ 型の特異点をモデルとし，与えられた連続写像上に同じ名前の点を定義すると，それらは m-像解析的となる (山田氏と佐治氏との共同研究 [7] 参照), さらに m 次元の多様体から $\mathbb{R}^n$ $(1 \le m \le 7, n > m)$ に現れる Morin 特異点は m-像解析的となる．すべての特異点が m-像解析的なわけではない．例えば，例 2.2 で与えた標準的交叉帽子写像 f_W を用いて，$g(u,v) := f_W(u,v^2)$ とすれば原点 $(0,0)$ は写像 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ に対す

る 2-像解析的でない点を与える．この状況で，我々の得た結果は次の２つである．まず，固有な連続写像については，以下が示される．

定理 4.3 ([2]). $f : X \to N^n$ を 固有な連続写像とし，X 上の各点が m-像解析的であり $f^{-1}(f(x))$ が有限集合ならば，$f(X)$ は m-解析的に完備である．

この定理の $m = 1$ の場合が，定理 3.7 と解釈できる．定義域が多様体で，写像が m 次元の実解析的な写像の場合には，次が示される．

定理 4.4 ([3]). X^m を m 次元実解析多様体で，$f : X^m \to N^n$ が m 次元実解析的写像で C^ω-弧状固有写像であり，かつ X^m の各点が m-像解析的ならば，$f(X^m)$ は m-解析的に完備である．

この定理の証明は劣解析集合の性質等を駆使するため，証明は簡単ではなく本稿では割愛する．ここまで紹介した定理群は，すべて定義域上の点が像解析的であるか m-像解析的であることを仮定していた．しかし，一般に，具体的に与えられた写像上の点が，そのようは性質をもつかどうかを判定することは容易ではない．そこで実用性を高めるため，f が波面としての特異点を許す場合に定理 4.4 を拡張しよう．

定義 4.5. $f : X^m \to N^n$ を実解析写像とする．また $\mathrm{G}_m(TN^n)$ を N^n の接束 TN^n 上の階数 m のグラスマン束とする．写像 f が波面的写像 (frontal) であるとは，実解析的な写像 $\mathcal{L}_f : X^m \to \mathrm{G}_m(TN^n)$ (**f の m-持ち上げ**と云う) が存在し

$$df(T_xX^m) \subset \mathcal{L}_f(x) \qquad (x \in X^m)$$

を満たすときを云う．この状況において，もしも $\mathcal{L}_f$ が「はめ込み」にとれるならば，f は**波面**とよぶ．

この定義を用いて，さらに以下の定義を与える．

定義 4.6. $f : X^m \to N^n$ を実解析写像とする．点 $x \in X^m$ が**波面点** (front point) であるとは，x の開近傍 U_x が存在し，$f|_{U_x}$ が**波面**となるときを云う．

以下の定理が成り立つ．

定理 4.7. $f : X^m \to N^n$ が m 次元実解析的写像で C^ω-弧状固有写像であり，かつ X^m 上のすべての点が波面点であるか，あるいは正規な m-像解析的点であるとすると，$f(X^m)$ は m-解析的に完備である．

周囲の点がすべて m-像解析的な点は正規な m-像解析的となるので，この定理は，定理 4.4 を系として含み，本稿で紹介する定理の中で最も深いものである．f が波面的でないような点は，余次元２の劣解析集合の元となるため，その補集合が連結であることが証明の鍵となる．波面点な特異点 x の判定には，$x \in X^m$ の十分小さな近傍 U_x について $(f|_{U_x})^{-1}(f(x))$ が有限集合となることのチェックは不要で，単純に f の持ち上げのヤコビ行列の階数を調べればよいため，実用性は高い．

5. 応用

ここまで，紹介した定理の具体的な応用を１つ紹介する．３次元時空 $\mathbb{R}^3_1$ の極大曲面 (つまり空間的零平均曲率曲面) および３次元 de Sitter 空間 S^3_1 の空間的平均曲率１の曲面は，共に Weierstrass 型の表現公式により曲面が構成でき，すべて実解析的な写像によって曲面を表示することができる．これらの曲面は，一般的に特異点を許容する．この２つの曲面のクラスは，以下のようにそれぞれ２つの型のカテノイド型の曲面を含む：

(W) 球面から２点を除いたリーマン面上で定義され，Gauss 写像の写像度が１で，Hopf 微分が，除かれた２点で２位の極をもつ．

(G) 曲面は，外の空間の不動点をもつ１径数等長部分群の作用で不変である．

２種類のカテノイドはそれぞれ (Weierstrass 型表現公式と関係が深いため)**W 型カテノイド**，(定義が幾何学的なため)**G 型カテノイド**と呼んで区別する．極大面としての G 型カテノイドは，既に本稿の第１節で紹介し，楕円的なもの以外 (の２つ) は解析的拡張をもち，拡張後の曲面の解析的完備性も指摘済みである．W 型カテノイドは２種類あるが，１つは楕円的 G 型カテノイドなので，新しいものはただ１つで，それは解析的な拡張をもち，拡張後は，xy-平面上で定義されたグラフ $t = x \tanh y$ となるため解析的に完備である ([1])．

S^3_1 の空間的平均曲率１の曲面における G 型カテノイドは全部で８種類あり，その中で５種が非自明な解析的な拡張をもち，拡張後の曲面の助変数表示は固有であるか，あるいは C^0 弧状固有写像となるため，これは本稿の定理 3.8 により解析的に完備であることが示される ([1] では，定理 3.8 を用いずに証明している)．一方，S^3_1 の空間的平均曲率１の曲面における W 型カテノイドは，

- 楕円的 W 型カテノイド，
- 放物的 W 型カテノイド，
- 双曲的 W 型カテノイド，
- 例外 I 型楕円的 W 型カテノイド，
- 例外 II 型楕円的 W 型カテノイド

の５種類に分かれ，後半の I 型と II 型の例外的 W 型カテノイドのみが非自明な解析的な拡張をもつ．拡張後に解析的に完備となることの証明は，本稿の定理 3.8 により示される（[2]）．一方，放物的 W 型カテノイドは固有写像であり，双曲的 W 型カテノイドは固有ではないが C^0-弧状固有写像となり，錐的特異点あるいはカスプ辺のみを許容するため，やはり本稿の定理 3.8 により解析的完備性が示される．最後に (非例外的な) 楕円的 W 型カテノイドは，曲面の第二 Gauss 写像の形により全部で以下の３種類に分かれる．

(i) $g = z^\alpha$ $(\alpha > 0 \ \ \alpha \notin \mathbb{Z})$,

(ii) $g = z^k + c$ $(c \geq 0, \ c \notin \{1/\sqrt{2}, 1\})$,

(iii) $g = z^k + 1/\sqrt{2}$,

ここで k は 2 以上の正の整数を動く．３つの場合すべてにおいてカテノイドを定める写像は固有である．しかし (iii) の場合の W 型カテノイドの特異点が最近まで特定できず，波面点でもないため定理 4.7 を適用できない状態であったが，本田・佐藤の論文 [4] の非退化な特異点の分類を用いて，本田氏・山田氏との共同研究 [5] にて，その特異点を特定し，それが 2-像解析的であることを示すことでき，最終的に以下の結果を得た．

定理 5.1 ([2, 5])．３次元 de Sitter 時空における W 型カテノイドは，例外型のものを除けば解析的に完備あるは 2-解析的に完備で，２つの例外型の楕円的 W 型カテノイドは，適切な解析的な拡張により解析的に完備となる．

以上により，筆者等が長年取り組んできた S^3_1 の空間的平均曲率１のカテノイドの解析的な拡張の決定問題が，ようやく決着した．

参考文献

[1] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Analytic extensions of constant mean curvature one geometric catenoids in de Sitter 3-space*, Differential Geometry and its Applications **84** (2022) 101924.

[2] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Unextendability of real analytic map images and its applications*, in preparation.

[3] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Unextendability of real analytic map images II*, in preparation.

[4] A. Honda and H. Sato, *Singularities of spacelike mean curvature one surfaces in de Sitter space*, preprint (arXiv:2103.13849).

[5] A. Honda, M. Umehara and K. Yamada, *Analytic completeness of maximal surfaces in Lorentz Minkowski 3-space and CMC-1 surfaces in de Sitter* 3*-space, and its application*, in preparation.

[6] K. Kurdyka, *Ensembles semi-algebriques symetriques par arc*, Math. Ann. **282** (1988) 445–462.

[7] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Properties of wave front singular points of type A, D and* E, in preparation.