包絡線や包絡面の創造的条件に関連する問題について

横浜国立大学
西村 尚史
Takashi Nishimura
(nishimura-takashi-yx@ynu.ac.jp)
Yokohama National University

本稿においては，平面 $\mathbb{R}^2$ 内の 1 パラメータ直線族が創造する包絡線や 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の 2 パラメータ平面族が創造する包絡面に限定し，それらの創造的条件に関連する問題（筆者が気になっている/いた問題）を取り上げることにする．

1 三つの 1 変数関数についての創造的条件

三つの C^∞ 級関数 $a, b, \theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し，以下の恒等式 $(*)$ を**創造的条件**という．

$$(*) \qquad \frac{da}{dx}(x) = b(x)\frac{d\theta}{dx}(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

創造的条件 $(*)$ のルーツは以下の問題と言える．

問題 1 (以下の定理 1 と定理 2 が解答) 与えられた二つの C^∞ 級関数 $a, \theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し，創造的条件 $(*)$ を満たす C^∞ 級関数 $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在することの幾何学的意味はなんだろうか？

問題 1 の解答を説明するために記号の準備をする．実数 $x \in \mathbb{R}$ と二つの C^∞ 級関数 $a, \theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が任意に与えられれば, 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の**直線** $L_{(\theta(x),\, a(x))}$ を次のように自然に定義できる．ここで，$(X, Y) \cdot (\cos\theta(x), \sin\theta(x))$ は二つの 2 次元ベクトル (X, Y) と $(\cos\theta(x), \sin\theta(x))$ の内積（通常の内積）を表わす．

$$L_{(\theta(x),\, a(x))} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid (X, Y) \cdot (\cos\theta(x), \sin\theta(x)) = a(x)\}.$$

直線の集合 $\{L_{(\theta(x),\, a(x))}\}_{x\in\mathbb{R}}$ は，**ガウス写像** $\nu(x)=(\cos\theta(x),\sin\theta(x))$ でパラメトライズされる 1 **パラメータ直線族**と呼ばれる．

定義 1 (1 パラメータ直線族の包絡線の定義) C^∞ 級写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ は，任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し以下の (1), (2) を満たしているとき，1 パラメータ直線族 $\{L_{(\theta(x),\, a(x))}\}_{x\in\mathbb{R}}$ の**包絡線**と呼ばれる．

(1) $\frac{df}{dx}(x)\cdot\nu(x)=0$,
(2) $f(x)\in L_{(\theta(x),\, a(x))}$.

定理 1 (包絡線の存在定理 [10, 11, 12]) 1 パラメータ直線族 $\{L_{(\theta(x),\, a(x))}\}_{x\in\mathbb{R}}$ の包絡線 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ が存在するための必要十分条件は創造的条件 $(*)$ を満たす C^∞ 級関数 $b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が存在することである．

定理 2 (包絡線の表示公式 [10, 11, 12]) 1 パラメータ直線族 $\{L_{(\theta(x),\, a(x))}\}_{x\in\mathbb{R}}$ の包絡線 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ が存在すると仮定する．すると，1 パラメータ直線族の表示に必要な C^∞ 級関数 $a,\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ および創造的条件 $(*)$ に登場する C^∞ 級関数 $b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を用いて，$f(x)$ は次のように直交分解表示できる．

$$f(x)=a(x)(\cos\theta(x),\sin\theta(x))+b(x)(-\sin\theta(x),\cos\theta(x)).$$

定理 1 と定理 2 両方の系として次を得る．

系 1 (ルジャンドル対合 [12, 13]) 1 パラメータ直線族 $\{L_{(\theta(x),\, a(x))}\}_{x\in\mathbb{R}}$ の包絡線 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ が存在すると仮定する． すると，次の形の C^∞ 級写像 $\widetilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ は 1 パラメータ直線族 $\{L_{(b(x),\, (b(x)\theta(x)-a(x)))}\}_{x\in\mathbb{R}}$ の包絡線である．

$$\widetilde{f}(x)=(b(x)\theta(x)-a(x))(\cos b(x),\sin b(x))+\theta(x)(-\sin b(x),\cos b(x)).$$

創造的条件 $(*)$ は，問題 1 の解答である上記の定理 1，定理 2 で与えられた条件であるが，何らのヒントや手掛かりもない状況で突然思いついたわけでは決してない．次の命題 1 を極座標で考えてみれば局所的な創造的条件 $(*)$ は [5] で既に与えられていたとも見做すことは可能である．また，創造的条件 $(*)$ を満たす関数 b の存在が自明となる極めて特別な場合（$\theta(x)=x$ の場合）における定理 2 は，以下の系 2 として遙か昔の 50 年ぐらい前から既に知られていた．

命題 1 (オープニング [5]) 二つの C^∞ 級関数芽 $a,\theta:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R},0)$ に対し，創造的条件 $\frac{da}{dx}(x)=b(x)\frac{d\theta}{dx}(x)$ を満たす C^∞ 級関数芽 $b:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R},0)$ が存在すると仮定すると，写像芽

$$(\theta,a):(\mathbb{R},0)\to\mathbb{R}^2$$

はある 1 パラメータ直線族の包絡線芽である. 写像芽 $(\theta, a):(\mathbb{R},0)\to\mathbb{R}^2$ は写像芽 $\theta:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R},0)$ の**オープニング**と呼ばれる.

次の系も定理 1 と定理 2 両方の系である.

系 2 (カーン・ホフマンのベクトル公式 [4]) 関数 $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は恒等関数（すなわち，$\theta(x)=x$）と仮定する．そのとき，1 パラメータ直線族 $\{L_{(x,\,a(x))}\}_{x\in\mathbb{R}}$ の包絡線 $f(x)$ は次のように直交分解表示できる.

$$f(x)=a(x)(\cos x,\sin x)+\frac{da}{dx}(x)(-\sin x,\cos x).$$

定理 1 や定理 2 が正しいことを実感してこれらを自分で使ってみたいと思う読者のために，容易に確認できる具体例を一つだけあげておく.

例 1 XY 平面 $\mathbb{R}^2$ 内で $\gamma(x)=(x,x^3)$ によりパラメータ表示される正則曲線 $Y=X^3$ を考える[1]. 点 (x,x^3) における正則曲線 $Y=X^3$ の接線の定義方程式は，（通常の内積 $\cdot$ を用いて）以下のように表すことができる.

$$\left(-3x^2,1\right)\cdot\left(X-x,Y-x^3\right)=-3x^2X+Y+2x^3=0.$$

従って，次のように置くと $X\cos\theta(x)+Y\sin\theta(x)=a(x)$ が接線の定義方程式になっている.

$$\cos\theta(x)=\frac{-3x^2}{\sqrt{1+9x^4}},\ \sin\theta(x)=\frac{1}{\sqrt{1+9x^4}},\ a(x)=\frac{-2x^3}{\sqrt{1+9x^4}}.$$

高等学校数学IIIでの計算により次を得る.

$$\frac{da}{dx}(x)=\frac{-6x^2(1+3x^4)}{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}},\ \ \frac{d\theta}{dx}(x)=\frac{6x}{1+9x^4}.$$

正則曲線 $Y=X^3$ は接線族 $\{L_{(\theta(x),\,a(x))}\}_{x\in\mathbb{R}}$ の包絡線であるはずなので，定理 1 によれば，$\frac{da}{dx}(x)$ は $\frac{d\theta}{dx}(x)$ で割り切れて $b(x)$ が求まるはずである．本当にそうなのか，計算を実行して確認してみると

$$b(x)=\frac{\frac{da}{dx}(x)}{\frac{d\theta}{dx}(x)}=\frac{\frac{-6x^2(1+3x^4)}{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{6x}{1+9x^4}}=\frac{-x(1+3x^4)}{(1+9x^4)^{\frac{1}{2}}}$$

[1] この例は英語版のウィキペディア [15] にも載っているが，定理 1 や定理 2 の確認用の例として載っているわけでは決してなくて，世界中で広く普及しているように思える「包絡線の求め方」では残念ながら包絡線そのものずばりを求めることはできない例として載っている.

となるので確かに確認できた．次に，得られた $a(x), \cos\theta(x), \sin\theta(x), b(x)$ の具体的な表示を定理 2 の公式の中に代入して整理してみる．

$$\begin{aligned}
& a(x)\,(\cos\theta(x), \sin\theta(x)) + b(x)\,(-\sin\theta(x), \cos\theta(x)) \\
= \;& \frac{-2x^3}{\sqrt{1+9x^4}}\frac{(-3x^2, 1)}{\sqrt{1+9x^4}} + \frac{-x\,(1+3x^4)}{\sqrt{1+9x^4}}\frac{(-1, -3x^2)}{\sqrt{1+9x^4}} \\
= \;& \frac{(6x^5 + x + 3x^5, -2x^3 + 3x^3 + 9x^7)}{1+9x^4} \\
= \;& \frac{(x\,(1+9x^4)\,, x^3\,(1+9x^4))}{1+9x^4} \\
= \;& (x, x^3).
\end{aligned}$$

これで求めたかったパラメータ表示が定理 2 で確かに求まることがこの例の場合は確認できたことになる．

創造的条件 $(*)$ のルーツに関する話題と問題 1 の解答の紹介はここで終えるが，ここまでだけでも，たとえば次のようなことは新たに出てくる気になる問題[2] である．

問題 2（【個人的には未解決問題】複素配位空間 $\mathbb{C}^2$ での問題) (1) 例 1 においては x は実数であったが，x は十分にゼロに近い複素数としても計算自体は全く同様に成立することは容易にわかる. この計算の幾何学的意味はなんなのだろうか？
(2) 実変数の場合と同じように（十分にゼロに近い）複素変数の場合でも $x \mapsto (\cos\theta(x), \sin\theta(x))$ をガウス写像と思うことにすると，$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + \sqrt{-1}z_2)(z_1 - \sqrt{-1}z_2) \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C})$ であるから，複素の場合はガウス写像のターゲットスペースは複素双曲線？
(3) (2) に関連し，そもそも複素配位空間 $\mathbb{C}^2$ 内の”方向” って何？

問題 3（【個人的には未解決問題】重ね合わせの原理に関する問題) i を 1 または 2 とし，$p_i(x) = a_i(x)\nu_i(x) = a_i(x)(\cos\theta_i(x), \sin\theta_i(x)) = a_i(x)e^{\sqrt{-1}\theta_i(x)}$ とおく[3]．直線族 $\{L_{(\theta_i(x),\, a_i(x))}\}_{x\in\mathbb{R}}$ と複素数値関数 p_i は 1 対 1 に対応するので，両者を同一視する. すると，関数 p_i に対して創造的条件を考えることが可能

[2]筆者にとって気になる問題という意味．講演中にもお話ししたように，私は解答を知りたいのだけれども全くわからないので，どなたか解答がお分かりの方は是非教えていただきたいです．

[3]波動関数と呼ばれる関数はこんな形をしていて，良い性質を持っている波動関数たちには重ね合わせの原理が成り立っているらしい. そこで，アナロジーを考えるため，直線族を関数に置き換えてみて，重ね合わせの原理が成り立つや否やと問うてみることにした．

になる．そこで，（考えやすいように）たとえば $a_i(x) > 0$ for $\forall x \in \mathbb{R}$ であるとし．p_1, p_2 は創造的条件を満たすような関数 b_1, b_2 が存在しているとしたとき，関数の和 $p_1(x) + p_2(x)$ で得られる新しい関数は創造的条件を満たすような関数 b が存在しているのであろうか?

さて創造的条件 $(*)$ は三つの 1 変数関数 $a, b, \theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に関する恒等式であった．問題 1 は，三つの関数 a, b, θ のうちの二つ a, θ が与えられた時に創造的条件 $(*)$ を満たす関数 b が存在することの幾何学的意味を問う問題であった．ここからは，ここまでの話を念頭におき，与えられた二つの関数を取り換えるとどういう問題になるのかを考えてみる．つまり，次の二つの問題を考えてみる．

問題 4 (すぐ後に解答あり) 与えられた二つの C^∞ 級関数 $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し，創造的条件 $(*)$ を満たす C^∞ 級関数 $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在することの幾何学的意味はなんだろうか？

問題 5 (第 1.1 部分節に解答あり) 与えられた二つの C^∞ 級関数 $b, \theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し，創造的条件 $(*)$ を満たす C^∞ 級関数 $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在することの幾何学的意味はなんだろうか？

問題 4 を考える．創造的条件 $(*)$ が成り立っているとすると，定理 2 から，直線族 $\{L_{(\theta(x),\, a(x))}\}_{x \in \mathbb{R}}$ の包絡線 $f(x)$ は

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a(x)(\cos\theta(x), \sin\theta(x)) + b(x)(-\sin\theta(x), \cos\theta(x)) \\
&= (a(x), b(x)) \begin{pmatrix} \cos\theta(x) & \sin\theta(x) \\ -\sin\theta(x) & \cos\theta(x) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と表せる．すると問題 4 は「$(a(x), b(x))$ が $f(x)$ の**ペダル座標**となるような**動標構**の存在」を問う問題と同じであることがわかる．ペダル座標はあまり普及していないようであるが，複雑そうな微分方程式の解がペダル座標を使うことにより簡単かつ鮮やかに求まることもあるようで，なかなか興味深い代物と言える（たとえば [1] を参照）．ペダル座標に関する問題としてはたとえば次が考えられる．

問題 6 (【個人的には未解決問題】ペダル座標問題)
(1) 創造的条件を満たすようなガウス写像 $\nu : \mathbb{R} \to S^1$ を分類せよ．
(2) ペダル座標の導入により一気に解決する新しい応用をみつけろ．

1.1 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の線叢

平面 $\mathbb{R}^2$ 内の線叢とは，$\mathbb{R}^2$ 内の直線の 1 パラメータ族のことである．第 1.1 部分節では問題 5 の解答を与えることを目的としている．

$$\widetilde{L}_{(b(x),\theta(x))} = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \mid (X,Y)\cdot(-\sin\theta(x), \cos\theta(x)) = b(x)\}$$

とおく．定理 1 より次がわかる．

$$\begin{array}{ll} & \text{二つの } C^\infty \text{ 級関数 } b,\theta \to \mathbb{R} \text{ が与えられている} \\ \Leftrightarrow & XY \text{ 平面内に}\textbf{線叢}\ \{\widetilde{L}_{(\theta(x),\, b(x))}\}_{x\in\mathbb{R}} \text{ が与えられている．} \end{array}$$

すると，問題 5 の解答は次のようになるであろうことがわかる．

$$\begin{array}{ll} & \text{創造的条件 } (*) \text{ を満たす } C^\infty \text{ 級関数 } a:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ が存在する} \\ \Leftrightarrow & \frac{df}{dx}(x) \perp \widetilde{L}_{(\theta(x),\, b(x))} \text{ かつ } f(x) \in \widetilde{L}_{(\theta(x),\, b(x))} \text{ を満たす} \\ & \qquad C^\infty \text{ 級写像 } f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 \text{ が存在する} \\ \Leftrightarrow & \{\widetilde{L}_{(\theta(x),\, b(x))}\}_{x\in\mathbb{R}}:\ \text{は直線族 } \{L_{(\theta(x),\, a(x))}\}_{x\in\mathbb{R}} \text{ の包絡線 } f \text{ に対する}\textbf{法線叢}. \end{array}$$

さて $a(x) = \int b(x)\frac{d\theta}{dx}(x)dx,\ a(0) = 0$ とおけば，C^∞ 級関数 a は一意に定まり，創造的条件 $(*)$ は成立する．よって次を得る．

補題 1 平面内のどんな線叢 $\{\widetilde{L}_{(\theta(x),\, b(x))}\}_{x\in\mathbb{R}}$ も必ずあるフロンタルの法線叢[4]になっており，そのフロンタルの任意のパラレルの法線叢にもなっている．

定義 2 二つの C^∞ 級写像芽 $\Phi,\Psi:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ は，以下が成り立つ C^∞ 級関数芽 $\theta:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R},0)$ が存在すれば $\mathcal{SO}$-**同値**と呼ばれる．

$$\Phi(t,x) = \Psi(t,x)\begin{pmatrix} \cos\theta(x) & \sin\theta(x) \\ -\sin\theta(x) & \cos\theta(x) \end{pmatrix}.$$

与えられた C^∞ 写像芽 $b,\theta:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R},0)$ に対し，$F,\widetilde{F}:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ を次のようにおく．

$$\begin{aligned} F(t,x) &= t(\cos\theta(x),\sin\theta(x)) + b(x)(-\sin\theta(x),\cos\theta(x)) \\ \widetilde{F}(t,x) &= (t, b(x)). \end{aligned}$$

[4]通常は非特異曲線に対する法線の集合になっているとき法線叢と呼ばれるようであるがここでのフロンタルは非特異とは限らず，特異点をもっているかもしれない．たとえそうでも，フロンタルであるから定義域のどの点でも法線は一意に定義されているので問題はない．

三つの1変数 C^∞ 級関数 $a(x), b(x), \theta(x)$ に関する創造的条件 $(*)$ の応用として以下の問題を考える．

定義 3 C^∞ 級の線叢芽 $F=(F_1,F_2):(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ は，以下の二つの条件 $(b),(\theta)$ のいずれか一つが成り立てば**無限小線叢安定**と呼ばれる，

$$
\begin{aligned}
(b) \qquad & T\mathcal{A}_e(\widetilde{F}) \supset (0\oplus\mathcal{E}_x)\,, \\
(\theta) \qquad & T\mathcal{A}_e(F) \supset (0\oplus\mathcal{E}_x) + T\mathcal{SO}(F),
\end{aligned}
$$

ここに $T\mathcal{A}_e(\widetilde{F}) = t\widetilde{F}(\mathcal{E}^2_{(t,x)})+\omega\widetilde{F}(\mathcal{E}^2_{(X,Y)})$, $T\mathcal{A}_e(F)=tF(\mathcal{E}^2_{(t,x)})+\omega F(\mathcal{E}^2_{(X,Y)})$ および $T\mathcal{SO}(F)=\mathcal{E}_x\,(-F_2,F_1)$ である．

問題 7 (次の定理 3 が解答) 無限小線叢安定な線叢芽 $F:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ を分類せよ．

定理 3 ([9], [7]) 無限小線叢安定な線叢芽 $F=(F_1,F_2):(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ を $\mathcal{A}$-同値で分類するとちょうど三つの同値類を得る． 各同値類の標準形は以下である．$(t,x)\mapsto(t,x)$ （**非特異**），$(t,x)\mapsto(t,x^2)$ （**折り目**）そして $(t,x)\mapsto(t,x^3+tx)$ （**カスプ**）．

<u>定理3の証明のスケッチ</u>． [9] と [7] では証明方法が全く違う．以下は [7] での証明のスケッチであり，[2] で概説してあるマザー理論が主要なツールである．尚，この証明方法は独立変数の数によらないので，第2節での定理7の証明でも有効な方法である．

（マザー理論における）無限小安定な F をまず分類する．もしも b が無限小安定ならば $\widetilde{F}$ も無限小安定である． F と $\widetilde{F}$ は $\mathcal{K}$-同値なので, マザーの分類定理により F は $\widetilde{F}$ と $\mathcal{A}$-同値となる．以上より，$(t,x)\mapsto(t,x)$ と $(t,x)\mapsto(t,x^2)$ という二つの写像芽で代表される二つの $\mathcal{A}$-同値類を得る．もしも $\mathcal{A}_e$-$\mathrm{codim}(b)=1$ であれば, $b(x)=x^3$ と仮定して一般性を失わない．$\theta(x)=x$ とおく．すると，$\left.\frac{\partial F_2}{\partial t}\right|_{t=0}+T\mathcal{K}_e(b)=m_x$ がわかる．従って，マルチネ理論より，F は安定であり標準形として $(t,x)\mapsto(t,x^3+tx)$ を得る．

次に, F が安定ではないとする． すると, 定義3の (b) も (θ) も満たさないことは比較的容易にわかる． □

次の問題は「ガウス写像芽 $\theta:(\mathbb{R},0)\to\mathbb{R}$ が特異な場合に限る，という制約条件のもとで問題7を考えてみると分類結果は同じになるだろうか？」と

いう素朴な疑問から出てきた問題である．解答は以下の定理 4 で与えられていて，分類結果に違いが出てくることがわかる．第 2 節で扱うように，2 変数の場合も 1 変数の場合と同様に，ガウス写像に関する制約条件なしの場合と特異なガウス写像に限った場合それぞれで，無限小線叢安定な線叢芽の分類問題が考えられる．後ほど述べる定理 7 と定理 8 を眺めていただくとお分かりのように，驚くべきことに，2 変数の場合は分類結果の違いはないのである．

問題 8 (次の定理 4 が解答) ガウス写像芽 $\theta : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}$ が特異な場合に限って無限小線叢安定な線叢芽 $F : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ を分類せよ．

定理 4 ([9], [7]) ガウス写像芽 $\theta : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}$ が特異な場合に限って無限小線叢安定な線叢芽 $F = (F_1, F_2) : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ を $\mathcal{A}$-同値で分類すると，ちょうど二つの同値類を得，　標準形は以下になる．$(t, x) \mapsto (t, x)$ **（非特異）**, $(t, x) \mapsto (t, x^2)$ **（折り目）**．

定理 4 は定理 3 の証明方法と同じ方法で証明可能.

2　五つの 2 変数関数についての創造的条件

平面 $\mathbb{R}^2$ 内の原点 $(0, 0)$ を中心とする十分に小さな開円盤を U とおく．2 変数の C^∞ 級関数 $a, b_1, b_2, \theta_1, \theta_2 : U \to \mathbb{R}$ に対する**創造的条件**とは以下の 1 形式の恒等式 $(**)$ のことである．

$$(**) \qquad da = b_1(x_1, x_2)d\theta_1 + b_2(x_1, x_2)d\theta_2 \quad (\forall (x_1, x_2) \in U).$$

以下においては，$\theta_1(0, 0) = \theta_2(0, 0) = 0$ を仮定する．任意の $x = (x_1, x_2) \in U$ と任意の三つの C^∞ 級関数 $a, \theta_1, \theta_2 : U \to \mathbb{R}$ に対し，平面 $\Pi_{(\theta(x),\, a(x))}$ を次のように自然に定義する．

$$\Pi_{(\theta(x),\, a(x))} = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid (X, Y, Z) \cdot \nu(x) = a(x)\},$$

ここで $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ であり, $\nu : U \to S^2$ は, Exponential 写像 $Exp : T_{(0,0,1)}S^2 \to S^2$ を用いて，$\nu(x_1, x_2) = Exp(\theta_1(x_1, x_2), \theta_2(x_1, x_2))$ で定義される**ガウス写像**である．$\theta_i(x_1, x_2) = \Theta_i \circ \nu(x_1, x_2)$ とおくと, $(\Theta_1, \Theta_2) : V \to \mathbb{R}^2$ は $(0, 0, 1) \in S^2$ の開近傍 $V (\subset S^2)$ の**正規座標**[5]になっている．

1 変数の場合と同様に，創造的条件 $(**)$ のルーツは以下の問題である．

[5]講演中にもお話ししたように，2 次元球面の場合の正規座標やレビ・チビタ平行移動に対しては，直感的でわかりやすい説明が [3] の第 5 章の前書きにある．

問題 9 (以下の定理 5 と定理 6 が解答) 与えられた C^∞ 級関数 $a : U \to \mathbb{R}$ と C^∞ 写像 $\theta = (\theta_1, \theta_2) : U \to \mathbb{R}^2$ に対し，創造的条件 $(**)$ を満たす C^∞ 級写像 $b = (b_1, b_2) : U \to \mathbb{R}^2$ が存在することの幾何学的意味はなんだろうか？

定義 4 (2 パラメータ平面族の包絡面の定義) C^∞ 級写像 $f : U \to \mathbb{R}^3$ は，任意の $x \in U$ に対し以下の (1), (2) を満たしているとき，2 パラメータ平面族 $\{\Pi_{(\theta(x),\, a(x))}\}_{x\in U}$ の**包絡面**と呼ばれる．

(1) $df(\mathbf{v}) \cdot \nu(x) = 0 \quad (\forall \mathbf{v} \in T_xU)$,
(2) $f(x) \in \Pi_{(\theta(x),\, a(x))}$.

定理 5 (包絡面の存在定理 [10]) 2 パラメータ平面族 $\{\Pi_{(\theta(x),\, a(x))}\}_{x\in U}$ の包絡面 $f : U \to \mathbb{R}^3$ が存在するための必要十分条件は創造的条件 $(**)$ を満たす C^∞ 級写像 $b = (b_1, b_2) : U \to \mathbb{R}^2$ が存在することである．

定理 6 (包絡面の表示公式 [10]) 2 パラメータ平面族 $\{\Pi_{(\theta(x),\, a(x))}\}_{x\in U}$ の包絡面 $f : U \to \mathbb{R}^3$ が存在すると仮定すれば，f は以下のように直交分解表示できる．

$$f(x) = a(x)\nu(x) + b_1(x)\left(\frac{\partial}{\partial \Theta_1}\right)_{\nu(x)} + b_2(x)\left(\frac{\partial}{\partial \Theta_2}\right)_{\nu(x)}.$$

尚，定理 6 における $\left(\frac{\partial}{\partial \Theta_i}\right)_{\nu(x)}$ は，$P_{(0,x)} : T_{\nu(0)}S^2 \to T_{\nu(x)}S^2$ を**レビ・チビタ平行移動**としたとき，$P_{(0,x)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial \Theta_i}\right)_{\nu(0)}\right)$ のことである．定理 5 と定理 6 両方の系として次を得る．

系 3 (ルジャンドル対合 [13]) 2 パラメータ平面族 $\left\{\Pi_{(\theta(x),\, a(x))}\right\}_{x\in U}$ の包絡面 $f : U \to \mathbb{R}^3$ が存在すると仮定する．すると，以下の形の C^∞ 写像 $\widetilde{f} : U \to \mathbb{R}^3$ は，2 パラメータ平面族 $\left\{\Pi_{\left(b(x),\, \sum_{i=1}^2 b_i(x)\theta_i(x) - a(x)\right)}\right\}_{x\in \widetilde{U}}$ の包絡曲面になっている．ここに，$\widetilde{U}\,(\subset U)$ は原点 $(0,0)$ の十分小さな開近傍であり，$b(x) = (b_1(x), b_2(x))$ とおいており，$\widetilde{\nu} : \widetilde{U} \to S^2$ は $\widetilde{\nu}(x) = Exp(b_1(x), b_2(x))$ で定義されるガウス写像である．

$$\widetilde{f}(x) = \left(\sum_{i=1}^2 b_i(x)\theta_i(x) - a(x)\right)\widetilde{\nu}(x) + \theta_1(x)\left(\frac{\partial}{\partial \Theta_1}\right)_{\widetilde{\nu}(x)} + \theta_2(x)\left(\frac{\partial}{\partial \Theta_2}\right)_{\widetilde{\nu}(x)}.$$

以下のように，命題 1 や系 2 の 2 変数バージョンが成立する．

命題 2 (オープニング [5]) 三つの C^∞ 級関数芽 $a, \theta_1, \theta_2 : (U, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ に対し，恒等式 $da = b_1(x_1, x_2)\, d\theta_1 + b_2(x_1, x_2)\, d\theta_2$ を満たす C^∞ 級関数芽 $b_1, b_2 : (U \to \mathbb{R}$ が存在すると仮定すると，写像芽

$$((\theta_1, \theta_2), a) : (U, 0) \to \mathbb{R}^3$$

はある 2 パラメータ平面族の包絡面芽である．写像芽 $((\theta_1, \theta_2), a) : (U, 0) \to \mathbb{R}^3$ は写像芽 $(\theta_1, \theta_2) : (U, 0) \to \mathbb{R}^2$ の**オープニング**と呼ばれる．

系 4 (カーン・ホフマンのベクトル公式 [4]) $(\theta_1, \theta_2) : U \to \mathbb{R}^2$ が恒等写像の場合，2 パラメータ平面族 $\{\Pi_{(x_1, x_2,\, a(x))}\}_{(x_1, x_2) \in U}$ の包絡面 $f(x)$ は次のように直交分解表示できる，ここに $x = (x_1, x_2)$ とおいている．

$$f(x) = a(x)\, \nu(x) + \frac{\partial a}{\partial x_1}(x) \left(\frac{\partial}{\partial \Theta_1}\right)_{\nu(x)} + \frac{\partial a}{\partial x_2}(x) \left(\frac{\partial}{\partial \Theta_2}\right)_{\nu(x)}.$$

1 変数の場合と同様に，2 変数の場合も以下のような問題は考えられる．

問題 10 (【個人的には未解決問題】複素配位空間 $\mathbb{C}^3$ での問題) 例えば, [10] の Example 4.3 における計算を考えてみる．x, y が十分に小さい複素数だと仮定しても全く同様の計算が可能なことがわかる．x, y が十分に小さい複素数だと仮定した場合の計算の幾何学的意味はなんなのであろうか？

問題 11 (【個人的には未解決問題】重ね合わせの原理に関する問題) i を 1 または 2 とする．例えば任意の $(x_1, x_2) \in U$ に対して $a_i(x_1, x_2) > 0$ を仮定することにする．また，$p_i(x_1, x_2) = a_i(x_1, x_2)\nu_i(x_1, x_2)$ に対応する 2 パラメータ平面族 $\left\{\Pi_{(\theta_i(x),\, a_i(x))}\right\}_{x \in U}$ に対しては創造的条件を満たすような C^∞ 級関数 $b_{i1}, b_{i2} : U \to \mathbb{R}$ が存在すると仮定する．そのとき，ベクトルの和 $p_1(x_1, x_2) + p_2(x_1, x_2)$ に対応する 2 パラメータ平面族に対して創造的条件を満たすような C^∞ 級関数 $b_1, b_2 : U \to \mathbb{R}$ が存在するであろうか？

問題 12 (【個人的には未解決問題】ペダル座標問題)
(1) 創造的条件を満たすようなガウス写像 $\nu : U \to S^2$ を分類せよ．
(2) ペダル座標の導入により一気に解決できる新しい応用をみつけろ．

2.1 $\mathbb{R}^3$ 内の線叢

$\mathbb{R}^3$ 内の**線叢**とは $\mathbb{R}^3$ 内の 2 パラメータ直線族のことである．1 変数の場合の問題 5 に対応する 2 変数版は次の問題である．

問題 13 (直後に解答が与えてある) 与えられた二つの C^∞ 級写像 $b=(b_1,b_2)$, $\theta=(\theta_1,\theta_2):U\to\mathbb{R}^2$ に対し, 創造的条件 $(**)$ を満たす C^∞ 級関数 $a:U\to\mathbb{R}$ が存在することの幾何学的意味はなんだろうか?

任意の $x=(x_1,x_2)\in U$ に対し,

$$\widetilde{L}_{(\theta(x),\,b(x))}=\left\{(X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\begin{array}{c}(X,Y,Z)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\Theta_1}\right)_{\nu(x)}=b_1(x),\\ (X,Y,Z)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\Theta_2}\right)_{\nu(x)}=b_2(x)\end{array}\right\}.$$

とおく. 次がわかる.

$$\begin{array}{rl}&\text{二つの } C^\infty \text{ 級写像 } b,\theta:U\to\mathbb{R}^2 \text{ が与えられている}\\ \Leftrightarrow & \mathbb{R}^3 \text{ 内の}\textbf{線叢}\ \{\widetilde{L}_{(\theta(x),\,b(x))}\}_{x\in U}\text{が与えられている.}\end{array}$$

以上の準備のもとに問題 13 の解答を記載すると以下になる.

$$\begin{array}{rl}&\text{創造的条件 } (**) \text{ を満たす } C^\infty \text{ 級関数 } a:U\to\mathbb{R} \text{ が存在する}\\ \Leftrightarrow & \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\perp\widetilde{L}_{(\theta(x),\,b(x))},\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\perp\widetilde{L}_{(\theta(x),\,b(x))}\ \text{と}\ f(x)\in\widetilde{L}_{(\theta(x),\,b(x))}\\ &\text{を満たすフロンタル } f:U\to\mathbb{R}^3\text{が存在する}\\ \Leftrightarrow & \text{直線族 } \{\widetilde{L}_{(\theta(x),\,b(x))}\}_{x\in U}\text{はフロンタル } f \text{ の}\textbf{法線叢}.\end{array}$$

補題 2 $\mathbb{R}^3$ 内の 2 パラメータ直線族 $\{\widetilde{L}_{\theta(x),b(x))}\}_{x\in\mathbb{R}}$ があるフロンタルの法線叢であることの必要十分条件は以下の恒等式が成り立つことである.

$$db_1\wedge d\theta_1+db_2\wedge d\theta_2=0\quad(\forall x\in U).$$

<u>補題 2 の証明</u>. そのようなフロンタルが存在する $\Leftrightarrow$ 創造的条件 $(**)$ を満たす C^∞ 級関数 $a:U\to\mathbb{R}$ が存在する $\Leftrightarrow d(b_1(x)d\theta_1+b_2(x)d\theta_2)=0\ (\forall x\in U)$ $\Leftrightarrow db_1\wedge d\theta_1+db_2\wedge d\theta_2=0\ (\forall x\in U)$. □

定義 5 二つの C^∞ 級写像芽 $\Phi,\Psi:(\mathbb{R}^3,0)\to(\mathbb{R}^3,0)$ は, $x=(x_1,x_2)$ に依存する回転行列 (R_x と書くことにする) が存在して以下の恒等式が成立するとき $\mathcal{SO}$-**同値**と呼ばれる.

$$\Phi(t,x_1,x_2)=\Psi(t,x_1,x_2)R_x$$

四つの C^∞ 級関数芽 $b_1, b_2, \theta_1, \theta_2 : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ が与えられているとき，$F, \widetilde{F} : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ を次のようにおく．

$$\begin{aligned} F(t, x_1, x_2) &= (t, b_1(x_1, x_2), b_2(x_1, x_2))R_x, \\ \widetilde{F}(t, x_1, x_2) &= (t, b_1(x_1, x_2), b_2(x_1, x_2)). \end{aligned}$$

ここに, R_x は $\widetilde{F}(t, x_1, x_2) = (t, b_1(x_1, x_2), b_2(x_1, x_2))$ を $F(t, x_1, x_2) = t\nu(x) + b_1(x)\left(\frac{\partial}{\partial \Theta_1}\right)_{\nu(x)} + b_2(x)\left(\frac{\partial}{\partial \Theta_2}\right)_{\nu(x)}$ に写す回転行列を表わしている．
四つの C^∞ 級関数芽 $b_1, b_2, \theta_1, \theta_2 : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ に対して創造的条件 $(\star\star)$ を満たす C^∞ 級関数芽 $a : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ が存在するとき，$G, : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ を以下のようにおく．

$$G(t, x_1, x_2) = (t + a(x_1, x_2), b_1(x_1, x_2), b_2(x_1, x_2))R_x.$$

$h(t, x_1, x_2) = (t + a(x_1, x_2), x_1, x_2)$ とおけば h は C^∞ 級微分同相写像芽であり $G(t, x_1, x_2) = F \circ h(t, x_1, x_2)$ を満たしている．よって，線叢芽と法線叢芽それぞれに対してそのクラスの中での微小変動に対して安定な線叢芽や法線叢芽の $\mathcal{A}$-分類問題を解きたいのであるが，F と G それぞれを調べる代わりに

$$F(t, x_1, x_2) = (t, b_1(x_1, x_2), b_2(x_1, x_2))R_x$$

という形を持つ写像芽 F のみを調べれば十分であることがわかる.

定義 6 線叢芽 $F = (F_1, F_2, F_3) : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ は，以下の二つの条件 $(b), (\theta)$ のいずれか一つでも成り立つとき**無限小線叢安定**と呼ばれる．

$$\begin{aligned} (b) \qquad & T\mathcal{A}_e(\widetilde{F}) \supset \left(0 \oplus \mathcal{E}^2_{(x_1,x_2)}\right), \\ (\theta) \qquad & T\mathcal{A}_e(F) \supset \left(0 \oplus \mathcal{E}^2_{(x_1,x_2)}\right) + T\mathcal{SO}(F), \end{aligned}$$

ここに $T\mathcal{A}_e(F) = tF(\mathcal{E}^3_{(t,x_1,x_2)}) + \omega F(\mathcal{E}^3_{(X,Y,Z)})$, そして，
$T\mathcal{SO}(F) = \mathcal{E}_{(x_1,x_2)}\left(-F_2 - F_3, F_1 - F_3, F_1 + F_2\right)$ である．

問題 14 (次の定理 7 が解答) 無限小線叢安定な線叢芽 $F : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ を分類せよ．

定理 7 ([6], [7]) 無限小線叢安定な線叢芽 $F : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ はちょうど四つの $\mathcal{A}$-類に分類される．それぞれの $\mathcal{A}$-類の標準形は以下である．$(t,\ x_1,\ x_2)$ (**非特異**), $(t,\ x_1,\ x_2^2)$ (**折り目**), $(t,\ x_1,\ x_2^3 + x_1x_2)$ (**カスピダルエッジ**), $(t,\ x_1,\ x_2^4 + x_1x_2^2 + tx_2)$ (**スワローテイル**).

注意 1 (正規座標のメリット) 定理 7 も定理 3 の証明方法と同じ方法で証明可能ではある．とは言っても，2 変数なので正規座標を有効に使った次のような工夫をしないと泥沼に陥ると思える．

$\theta = (\theta_1, \theta_2) : U \to \mathbb{R}^2$ が $\mathcal{K}$-同値に関して有限確定と仮定する．$\widetilde{\theta}(x) = \sqrt{\theta_1^2(x) + \theta_2^2(x)}$ とおく．任意の $x \neq (0,0)$ に対し $\mathbf{v}_1(x) = \nu(0) = (1,0,0)$, $\mathbf{v}_2(x) = \left(0, \frac{\theta_1(x)}{\widetilde{\theta}(x)}, \frac{\theta_2(x)}{\widetilde{\theta}(x)}\right)$ および $\mathbf{v}_3(x) = \left(0, -\frac{\theta_2(x)}{\widetilde{\theta}(x)}, \frac{\theta_1(x)}{\widetilde{\theta}(x)}\right)$ とおく．すると，

$$\begin{aligned} F(t, x_1, x_2) &= \left(t \cos \widetilde{\theta}(x) - (b_{11}(x) + b_{21}(x)) \sin \widetilde{\theta}(x)\right) \mathbf{v}_1(x) \\ &\quad + \left(t \sin \widetilde{\theta}(x) + (b_{11}(x) + b_{21}(x)) \cos \widetilde{\theta}(x)\right) \mathbf{v}_2(x) \\ &\quad + (b_{12}(x) + b_{22}(x))\, \mathbf{v}_3(x) \end{aligned}$$

と表示することができる．ここに，$(0, b_1(x), 0) = b_{11}(x)\mathbf{v}_2(x) + b_{12}(x)\mathbf{v}_3(x)$, $(0, 0, b_2(x)) = b_{21}(x)\mathbf{v}_2(x) + b_{22}(x)\mathbf{v}_3(x)$ とおいている．

問題 15 (次の定理 8 が解答) ガウス写像芽 $\nu : (\mathbb{R}^2, 0) \to (S^2, (1,0,0))$ が特異であるという制約条件のもとで，無限小線叢安定な線叢芽 $F : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ を分類せよ．

定理 8 ([7]) $\nu : (\mathbb{R}^2, 0) \to (S^2, (1,0,0))$ が特異であるという制約条件のもとで，無限小線叢安定な線叢芽 $F : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ を分類するとちょうど四つの $\mathcal{A}$-類に分類され，それぞれの $\mathcal{A}$-類は定理 *7* での $\mathcal{A}$-類と全く同じ標準形を持つ．

定理 8 は定理 7 の証明方法と同じ方法で証明可能．

定義 7 法線叢芽 $G : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ は以下の包含関係が成り立つとき**無限小法線叢安定**と呼ばれる．

$$T\mathcal{A}_e(F) \supset \mathcal{NC}(F),$$

ここに $G(t, x_1, x_2) = F \circ h(t, x_1, x_2) = (t + a(x_1, x_2), b_1(x_1, x_2), b_2(x_1, x_2))\, R_x$ であり，$\mathcal{NC}(F)$ は

$$\left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1}\frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} - \frac{\partial b_1}{\partial x_2}\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial b_2}{\partial x_1}\frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} - \frac{\partial b_2}{\partial x_2}\frac{\partial \theta_2}{\partial x_1}\right) = 0.$$

を満たす $b = (b_1, b_2) : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ に沿ったベクトル場と $\theta = (\theta_1, \theta_2) : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ に沿ったベクトル場からなる集合である．

問題 16 (次の定理 9 が解答) 無限小法線叢安定な法線叢芽 $G : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ を分類せよ.

定理 9 ([14], [7]) 無限小法線叢安定な法線叢芽 $G : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ はちょうど六つの $\mathcal{A}$-類に分類される. それぞれの $\mathcal{A}$-類の標準形は以下である.
$G(t, x_1, x_2) = \left(t + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2,\ x_1,\ x_2\right) R_x$ **(非特異)**,
$G(t, x_1, x_2) = \left(t + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^3,\ x_1,\ x_2^2\right) R_x$ **(折り目)**,
$G(t, x_1, x_2) = \left(t + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2^2 + \frac{1}{4}x_2^4,\ x_1 + \frac{1}{2}x_2^2,\ x_2^3 + x_1x_2\right) R_x$ **(カスピダルエッジ)**,
$G(t, x_1, x_2) = \left(t + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{3}x_1x_2^3 + \frac{1}{5}x_2^5,\ x_1 + \frac{1}{3}x_2^3,\ x_2^4 + x_1x_2^2\right) R_x$ **(スワローテイル)**,
$G(t, x_1, x_2) = \left(t + \frac{1}{2}x_1^2x_2 + \frac{1}{6}x_2^3,\ x_1x_2,\ \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2\right) R_x$ **(楕円的臍)**,
$G(t, x_1, x_2) = \left(t + \frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{1}{6}x_2^3,\ x_1x_2,\ \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2\right) R_x$ **(双曲的臍)**.

注意 2 (定理 9 に関する注意) (1) もしも滑らかな曲面の法線になっている法線叢に限定して無限小法線叢安定な法線叢芽を分類したいのであれば, 定理 9 の各々の標準形に対して $x \mapsto (a(x) + \mathbf{c}, b_1(x), b_2(x))$ が $x = 0$ で非特異芽になるような定数 c を求めれば十分. 実際, どの標準形に対しても $c = 0$ が求めたい定数であることがわかる.
(2) 文献 [14] には定理 9 のリストの中の「折り目」は登場していない. その理由は, 文献 [14] においては, 無限小法線叢安定な法線叢 $G : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ であって特異値集合が特異点をもつものに限定して分類をしているからである.
(3) 定義 7 の中の $\mathcal{NC}(F)$ の定義に登場している偏微分方程式はとても複雑に見える. とはいえ,「ソースの座標変換により, 最初から $(\theta_1, \theta_2)(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ という形 (つまり, 恒等写像) であり (θ_1, θ_2) の変形は考慮しなくてよい」と仮定してよいことがわかる. すると,「$\mathcal{NC}(F)$ は

$$\frac{\partial b_1}{\partial x_2} = \frac{\partial b_2}{\partial x_1}.$$

を満たす $(b_1, b_2) : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ に沿ったベクトル場の集合」という扱いやすい集合となる. (問題 16 に対する $\mathcal{NC}(F)$ よりは煩雑になるものの) この手法は下の問題 17 に対しても適用可能であるので, 汎用性がある手法と言えるように思える.

問題 17 (2024 年 3 月 26 日時点では [8] にて解答作成中) ガウス写像芽 $\nu : (\mathbb{R}^2, 0) \to (S^2, (1, 0, 0))$ が特異であるという制約条件のもとで, 無限小法線叢安定な法線叢芽 $G : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ を分類せよ.

謝辞

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.
The author was supported by JSPS KAKENHI (Grant No. 23K03109).

References

[1] P. Blaschke, *Pedal coordinates, dark Kepler and other force problems*, J. Math. Phys., **58** (2017), 063505. https://doi.org/10.1063/1.4984905

[2] 福田拓生・西村尚史：**特異点と分岐**, 特異点の数理第 2 巻, 共立出版, 2002 年.

[3] 服部晶夫：**多様体 増補版**, 岩波全書, 1989 年.

[4] D. W. Hoffman and J. W. Cahn, *A vector thermodynamics for anisotropic surfaces*, Surface Science, **31** (1972), 368–388. https://doi.org/10.1016/0039-6028(72)90268-3

[5] G. Ishikawa, *Opening of differentiable map-germs and unfoldings*, Topics on real and complex singularities, 87–113, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2014. https://doi.org/10.1142/9789814596046_0007

[6] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, *Singularities of line congruences*, Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A, **133** (2003), 1341–1359. https://doi.org/10.1017/S0308210500002973

[7] S. Janeczko and T. Nishimura, *Infinitesimal Line-congruence stability of line-congruence-germs and infinitesimal normal-congruence stability of normal-congruence-germs*, in preparation. [6]

[8] S. Janeczko, T. Nishimura and M.A.S. Ruas, *The normal singularities of a submanifold with singular Gauss map-germ* , in preparation.

[6] 文献 [7], [8], [13] は本稿入稿日である 2024 年 3 月 27 日時点では未だ準備中であるので，完成時点ではオーサーシップやタイトル等の若干の変更はあり得ることをご了承願いたい．また，完成時点においては，これら三つのうちの二つが合体し一つの論文になってしまうかもしれないし，これら三つのうちには複数に分割される論文もあるかもしれないが，それらについてもご了承願いたい．

[9] Y. Kabata and M. Takahashi, *One parameter families of Legendre curves and plane line congruences*, Math. Nachr., **295** (2022), 1533–1561. https://doi.org/10.1002/mana.201900327

[10] T. Nishimura, *Hyperplane families creating envelopes*, Nonlinearity, **35** (2022), 2588. https://doi.org/10.1088/1361-6544/ac61a0

[11] 西村尚史, **平面直線族が創造する包絡線について**/*On envelopes created by line families in the plane*, 数理解析研究所講究録/RIMS Kokyuroku, **2226** (2022), 37–68.

[12] T. Nishimura, *Envelopes of straight line families in the plane*, preprint (arXiv:2307.07232 [math.DG]).

[13] T. Nishimura, *The concept of duality and the characterization of the Legendre involution on frontals*, in preparation.

[14] I. R. Porteous, *The normal singularities of a submanifold*, J. Differ. Geom., **5** (1971), 543–564. https://doi.org/10.4310/jdg/1214430015

[15] Wikipedia, "envelope, mathematics"と入力して2024年3月26日に検索.