Embedding properties for weighted Sobolev spaces in unbounded domains

サレジオ工業高等専門学校・一般教育科・大屋博一 *

Hirokazu Ohya,
Faculty of General Education, Salesian Polytechnic,
4-6-8 Oyamagaoka, Machida-shi, Tokyo, Japan.

Mathematics Subject Classification 2010 : 46E35, 46B50, 35J92.

Abstract

本稿では無限遠方で指数増大をする重み関数を持つ重み付きソボレフ空間について考察する．重み関数の無限遠方の増大度と埋め込み連続性・コンパクト性の関係を調べるとともに，コンパクト性が破れる条件を割り出すことを目的とする．また，関連する最小化問題（固有値問題）などにも話題を触れていきたい．

1 Introduction

本稿では $N \geq 1$ として $\mathbf{R}^N$ 上における重み付きソボレフ空間を考察する．特に重み関数については無限遠方で指数関数的に増大するもの $(e^{p\theta})$ を準備する．重み関数において $\theta \in C^1(\mathbf{R}^N)$ として準備する．$p \geq 1$ としてセミノルム $|[\cdot]|_{p,\theta}$ を以下に定義する．

$$|[u]|_{p,\theta} = \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{p\theta(x)} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

上記のセミノルムに対して，以下の重み付きソボレフ空間を導入する．

$$L^p(\theta, \mathbf{R}^N) := \Big\{ u \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N); |[u]|_{p,\theta} < +\infty \Big\}.$$

関数 $\theta(x)$ が連続関数であり，かつ無限遠方で発散していることから $\theta(x)$ は非負値関数として一般性を失わないことに注意する．このことから $L^p(\theta, \mathbf{R}^N) \subset L^p(\mathbf{R}^N)$ となる．

同様に $D^{1,p}(\theta, \mathbf{R}^N)$, $W^{1,p}(\theta, \mathbf{R}^N)$ としてそれぞれ次のノルム $\|u\| := |[|\nabla u|]|_{p,\theta}$ and $|[w]| := (|[w]|^p_{p,\theta} + |[\nabla w]|^p_{p,\theta})^{1/p}$ に関連する重み付きソボレフ空間として定義する．これら関数空間もノルムの定義からそれぞれバナッハ空間となる．大雑把に言えば通常のソボレフ空間 $D^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ や $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ にさらに指数増大する重み関数を加えた関数空間である．(さらに一般化をしてソボレフ空間 $D^{m,p}(\mathbf{R}^N)$ あるいは $W^{m,p}(\mathbf{R}^N)$ に関連する重み付きソボレフ空間 $D^{m,p}(\theta, \mathbf{R}^N)$ や $W^{m,p}(\theta, \mathbf{R}^N)$ については詳細の定義を後述に回す)

*E-mail address: **h-ohya@salesio-sp.ac.jp**

重み付きソボレフ空間 $D^{1,p}(\theta,\mathbf{R}^N)$ は，例えば次の汎関数 $I(u)$ に対する臨界点を探す際に利用される．

$$I(u) := \frac{1}{p}\int_{\mathbf{R}^N} e^{p\theta(x)}|\nabla u(x)|^p\,dx - \int_{\mathbf{R}^N}\int_0^u f(x,v)dv\,dx.$$

これは下記の準線形楕円型方程式に対する汎関数である．

$$-\mathrm{div}(e^{p\theta(x)}|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)) = f(x,u(x)) \ \text{ in } \mathbf{R}^N.$$

特に $p=2$ の場合は下記の半線形楕円型方程式に帰着する．

$$-\Delta u(x) - 2\nabla\theta(x)\cdot\nabla u(x) = \tilde{f}(x,u(x)) \ \text{ in } \mathbf{R}^N. \tag{1}$$

方程式 (1) の左辺第 2 項については一般的に勾配項と呼ばれる．このような勾配項を含む半線形楕円型方程式については，様々な場面で登場する．特に $\theta(x)$ が 2 次関数の場合の例を紹介したい．例えば非線形項 $\tilde{f}(x,u(x))$ がべき関数の場合，

$$-\Delta u - \frac{1}{2}x\cdot\nabla u = \lambda u + |u|^{q-1}u \ \text{ in } \mathbf{R}^N \tag{2}$$

などが挙げられる．楕円型方程式 (2) については非線型放物型方程式の自己相似解を考察する上で導出され，方程式 (2) の解が非線型放物型方程式の解構造を解析するうえで重要な役割を担っていることが知られている．(例えば Escobedo-Kavian [1], Haraux-Weissler [3], Weissler [8] などを参照のこと) 一方で，指数関数の非線形項を持つ場合，

$$-\Delta u - \frac{\varepsilon}{2}x\cdot\nabla u = \lambda e^{-\frac{1}{4}|x|^2}e^u \ \text{ in } \mathbf{R}^2$$

などが挙げられるが, この半線形楕円型方程式は Keller-Segel モデルにおける自己相似解を考察する上で導出される方程式である．(例えば Muramoto-Naito-Yoshida [4] を参照のこと)

半線型楕円型方程式の解析においては適切な関数空間の準備，もしくはその関数空間の性質を理解する事が不可欠である．

改めて Escobedo-Kavian [1] においては重み付きソボレフ空間の埋め込みについても議論がなされており, $\theta(x)$ が無限遠方で発散する事実を利用して $W^{1,2}(\theta,\mathbf{R}^N)\subset L^q(\theta,\mathbf{R}^N)$, $2\le q\le 2N/(N-2)\,(=: 2^*)$ の埋め込み連続性（さらに $2\le q<2^*$ における埋め込みコンパクト性) を示している．証明の仮定においては補助関数 $\eta(\theta)(x) := \Delta\theta(x)+|\nabla\theta(x)|^2$ が無限遠方で発散することにより埋め込みコンパクト性が導き出されている事が示されている．一見，この補助関数が重み付きソボレフ空間のノルムや前述の半線形楕円型方程式から無関係のように見える補助関数であるが，例えば (2) に対して $w(x)=e^{\frac{1}{8}|x|^2}u(x)$ と置くと次のような方程式に変換されるが，左辺第 2 項のポテンシャル項の部分が補助関数 η に相当する．

$$-\Delta w(x) + \left(\frac{N}{4}+\frac{1}{16}|x|^2\right)w(x) = \tilde{g}(x,w(x)) \ \text{ in } \mathbf{R}^N.$$

確かに $\theta(x)$ が二次関数の場合には補助関数 $\eta(\theta)(x)$ が無限遠方で発散することが容易に確認できる．なお, 一般的な関数 $\theta(x)$ の場合においても勾配項を含む半線形楕円型方程式 (1) に対して $w(x)=e^{\theta(x)}u(x)$ と変換することにより次の半線形楕円型方程式

$$-\Delta w(x) + (\Delta\theta(x)+|\nabla\theta(x)|^2)w(x) = \tilde{g}(x,w(x)) \ \text{ in } \mathbf{R}^N$$

が導かれ，補助関数 $\eta(\theta)(x)$ を含むポテンシャル項が現れることに注意する．これにより $\theta(x)$ の無限遠方での振る舞いと重み付きソボレフ空間の埋め込みの関係性が薄っすらと見えてくる．

前述の Escobedo-Kavian[1] と同様，Muramoto-Naito-Yoshida [4], Kawashima [7] など多くの文献において重み関数において $\theta(x)=c|x|^2$ の特別の場合に対する埋め込みの議論を行ってい

る. さらに Furtado-Myiagaki-da Silva [2] においては $\theta(x) = c|x|^\alpha$ $(\alpha \geq 2)$ に対して埋め込みの議論を行っている.

現在までの一連の研究においては $\theta(x) \in C^2(\mathbf{R}^N)$ もしくは $\theta(x) = c|x|^\alpha$ $(\alpha \geq 2)$ に対して議論を行っている．これは補助関数 $\eta(\theta)(x)$ を準備していることも原因の一つかと思われる．特に $\Delta\theta(x)$ の項を扱うことから $\theta(x) \in C^2(\mathbf{R}^N)$ という過剰な条件を扱わざるを得ないのではと推測される．重み付き関数空間の定義や勾配項の形から $\theta(x) \in C^1(\mathbf{R}^N)$ で十分であると思われる．故に $\theta(x)$ の滑らかさに対する条件をここまで落とすことが目標である．また前述のように半線形楕円型方程式 (1) に対する変換を考察すれば補助関数 $\eta(\theta)(x)$ を容易に導出できるが，一般の $p > 1$ に対しては同様の議論が構築できないため，埋め込みを調べるためには新たな補助関数を準備する必要がある.

重み付きソボレフ空間 $D^{1,p}(\theta, \mathbf{R}^N)$ に対する埋め込みの議論に入る前に，この新たな補助関数を紹介したい．$p > 1$ とし $\theta(x) \in C^1(\mathbf{R}^N)$ を固定する．ベクトル値関数 $\overrightarrow{h} \in (C^1(\mathbf{R}^N))^N$ と正定数 $k > 0$ に対して下記の補助関数 G を設定する.

$$G(\overrightarrow{h}, k)(x) := p\nabla\theta \cdot \overrightarrow{h}(x) + \nabla \cdot \overrightarrow{h}(x) - (p-1)k^{-1}|\overrightarrow{h}(x)|^{p/(p-1)} \quad \text{for } x \in \mathbf{R}^N.$$

$\theta(x)$ や $\overrightarrow{h}$ の滑らかさを考慮すると補助関数 G は x に関して連続である．またすべての x において k に関して単調増大である．本稿では $\theta(x)$ に関して下記の仮定を課す．$\theta(x)$ はある関数 $\overrightarrow{h_0} \in (C^1(\mathbf{R}^N))^N$, と正定数 $k_0 \in \mathbf{R}_+$ に対して下記を満たすものとする.

$$\begin{array}{ll} (\theta.1) & G(\overrightarrow{h_0}, k_0)(x) \geq C_1(1 + |\nabla\theta(x)|^p) \ \text{ for all } \ x \in \mathbf{R}^N, \\ (\theta.2) & G(\overrightarrow{h_0}, k_0)(x) \to +\infty \ \text{ as } |x| \to \infty. \end{array}$$

この仮定については $p = 2$ の場合，$\overrightarrow{h_0} = \nabla\theta$, $k_0 = 1$ と置くことにより

$$G(\nabla\theta, 1)(x) = \Delta\theta(x) + |\nabla\theta(x)|^2 =: \eta(\theta)(x)$$

となり，既出の結果 [1] の拡張になっていることを付記する.

Theorem 1.1. $p > 1$ とし, $(\theta.1)$ を仮定する.

(i) $N > p$ とする．このとき埋め込み $D^{1,p}(\theta, \mathbf{R}^N) \subset L^q(\theta, \mathbf{R}^N)$ は $p \leq q \leq p^*$ において連続である.

(ii) $N = p$ とする．このとき埋め込み $D^{1,p}(\theta, \mathbf{R}^N) \subset L^q(\theta, \mathbf{R}^N)$ は $p \leq q < +\infty$ において連続である.

Theorem 1.2. $p > 1$ とし, $(\theta.1)$, $(\theta.2)$ を仮定する.

(i) $N > p$ とする．このとき埋め込み $D^{1,p}(\theta, \mathbf{R}^N) \subset L^q(\theta, \mathbf{R}^N)$ は $p \leq q < p^*$ においてコンパクトである.

(ii) $N = p$ とする．このとき埋め込み $D^{1,p}(\theta, \mathbf{R}^N) \subset L^q(\theta, \mathbf{R}^N)$ は $p \leq q < +\infty$ においてコンパクトである.

ここに $p^* := Np/(N-p)$ はソボレフ臨界指数である．これら定理の証明は [6] にて詳細記載する.

より詳細の埋め込みの議論を行う為に，重み関数を修正した重み付きソボレフ空間をさらに導入する．$L^{p,\beta}(\theta, \mathbf{R}^N)$ として

$$L^{p,\beta}(\theta, \mathbf{R}^N) := \left\{ u \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N); \int_{\mathbf{R}^N} e^{p\theta(x)}(1 + |\nabla\theta(x)|^p)^\beta |u(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

を導入する．なお β は実数とする．関連するセミノルムとしては

$$|[u]|_{p,\beta,\theta} := \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{p\theta}(1+|\nabla\theta|^p)^\beta |u|^p dx \right)^{1/p}$$

として定義する．指数 β が非負ならば $|[\cdot]|_{p,\beta,\theta}$ がノルムであることは自明である．また $\beta=0$ においては単に $|[\cdot]|_{p,0,\theta}$ の替わりに $|[\cdot]|_{p,\theta}$ として記述する．

Theorem 1.3. $p>1$ とし，$(\theta.1)$ を仮定する．このとき

(i) $N>p$ とする．埋め込み $D^{1,p}(\theta,\mathbf{R}^N) \subset L^{q,\beta}(\theta,\mathbf{R}^N)$ は $p \le q \le p^*$ かつ $\beta \le \beta^*$ において連続である．

(ii) $N=p$ とする．埋め込み $D^{1,p}(\theta,\mathbf{R}^N) \subset L^{q,\beta}(\theta,\mathbf{R}^N)$ は $p \le q < +\infty$ かつ $\beta < p/q$ において連続である．なお $q=p$ に限っては $\beta=1$ の場合でも埋め込み連続性が示される．ここに β^* は次に定義される正の指数である．

$$\beta^* := p(p^*-q)/q(p^*-p).$$

Theorem 1.4. $p>1$ とし，$(\theta.1)$, $(\theta.2)$ を仮定する．このとき

(i) $N>p$ とする．埋め込み $D^{1,p}(\theta,\mathbf{R}^N) \subset L^{q,\beta}(\theta,\mathbf{R}^N)$ は $p \le q < p^*$ かつ $\beta < \beta^*$ においてコンパクトである．

(ii) $N=p$ とする．埋め込み $D^{1,p}(\theta,\mathbf{R}^N) \subset L^{q,\beta}(\theta,\mathbf{R}^N)$ は $p \le q < +\infty$ かつ $\beta < p/q$ においてコンパクトである．

Remark 1.5. これらの定理については $\theta(x)$ の仮定により $D^{1,p}(\theta,\mathbf{R}^N)$ の替わりに $W^{1,p}(\theta,\mathbf{R}^N)$ を用いても同様に成立する．

さらに拡張をして m 階微分に関する重み付きソボレフ空間を導入しても通常のソボレフ空間と同様の埋め込みの性質が見込まれる．セミノルム

$$||u||_{m,p,\theta} = \left(\sum_{|\alpha|=m} |[D^\alpha u]|^p_{p,\theta} \right)^{1/p}$$

として関連する重み付きソボレフ空間 $D^{m,p}(\theta,\mathbf{R}^N)$ を導入すると次の系を得ることが出来る．

Corollary 1.6. $p,q>1$ とし，$(\theta.1)$ を仮定する．このとき m,n を $0 \le n \le m$ として $1/q-n/N > 1/p-m/N$ を満たすとき，埋め込み $D^{m,p}(\theta,\mathbf{R}^N) \subset D^{n,q}(\theta,\mathbf{R}^N)$ は連続である． さらに $(\theta.2)$ を仮定すると埋め込み $D^{m,p}(\theta,\mathbf{R}^N) \subset D^{n,q}(\theta,\mathbf{R}^N)$ はコンパクトである．

同様にセミノルム

$$|||u|||_{m,p,\theta} = \left(\sum_{|\alpha|\le m} |[D^\alpha u]|^p_{p,\theta} \right)^{1/p}$$

として関連する重み付きソボレフ空間 $W^{m,p}(\theta,\mathbf{R}^N)$ を導入すると次の系を得ることが出来る．

Corollary 1.7. $p,q>1$ とし，$(\theta.1)$ を仮定する．このとき m,n を $0 \le n \le m$ として $1/q-n/N > 1/p-m/N$ を満たすとき，埋め込み $W^{m,p}(\theta,\mathbf{R}^N) \subset W^{n,q}(\theta,\mathbf{R}^N)$ は連続である． さらに $(\theta.2)$ を仮定すると埋め込み $W^{m,p}(\theta,\mathbf{R}^N) \subset W^{n,q}(\theta,\mathbf{R}^N)$ はコンパクトである．

2　Theorem 1.1-1.4 の証明のアウトライン

埋め込みの証明に関するキーポイントとしては下記のポアンカレの不等式に相当する関係式を導くことである．まずは下記の補題に注目をする．

Lemma 2.1. $\overrightarrow{h} \in (C^1(\mathbf{R}^N))^N$, $p>1$, $k>0$ とする．ここで与えらえた元 $u \in C_0^1(\mathbf{R}^N)$ に対して以下が成立する．

$$\int_{\mathbf{R}^N} fe^{p\theta}(p\nabla\theta\cdot\overrightarrow{h}+\nabla\cdot\overrightarrow{h}-(p-1)k^{-1}|\overrightarrow{h}|^{p/(p-1)})|u|^p dx \le k^{p-1}\int_{\mathbf{R}^N} e^{p\theta}|\nabla u|^p dx. \tag{3}$$

この補題についてはヤングの補題やグリーンの定理などを用いて証明される．この Lemma 2.1 に対して $\theta(x)$ の仮定を課すことにより下記のポアンカレ型の不等式を得ることが出来る．

Lemma 2.2. $p>1$ として $(\theta.1)$ を仮定する．このとき任意の元 $u \in D^{1,p}(\theta,\mathbf{R}^N)$ に対してある正定数 $C_1^*>0$ が取れて下記の不等式を満たす．

$$C_1^*\int_{\mathbf{R}^N} e^{p\theta(x)}(1+|\nabla\theta(x)|^p)|u(x)|^p dx \le \int_{\mathbf{R}^N} e^{p\theta(x)}|\nabla u(x)|^p dx. \tag{4}$$

埋め込み連続性を証明するには (4) の評価が本質的である．またコンパクト性を示すには $\theta(x)$ の無限遠方での振る舞いが欠かせず，(3) の評価から $(\theta.2)$ の仮定を利用することが必須となる．詳しい証明については [5] を参照のこと．

3　補助関数の決定と埋め込みについて（具体例）

本稿の定理において一般的な $\theta(x) \in C^1(\mathbf{R}^N)$ に対して補助関数 G に対する仮定を満たせば（仮定を満たすような $\vec{h}$ や定数 k が存在すれば）埋め込み連続性やコンパクト性が示されることを述べてきたが，より具体的な関数 $\theta(x)$ に対して仮定を満たすような $\vec{h}$ や定数 k が存在するかは明記されていない．具体的には $\theta(x)=|x|^\alpha$ $(\alpha \ge 1)$ に対して補助関数 G に対する下記の評価を得るように適切な $\vec{h}_0$ や定数 k_0 をどのように選べばよいか言及する．

$$G(\vec{h}_0,k_0) \ge C^*\left(1+|x|^{(\alpha-1)p}\right), \quad x \in \mathbf{R}^N$$

実際には α の値により $\vec{h}$ の設定を調整をする必要がある．

$\alpha > p/(p-1)$ に関しては $\vec{h}_0 = c_1x + c_2|x|^{(\alpha-1)(p-1)-1}x$ $(c_1, c_2$ は正定数) を採用する．$\vec{h}_0$ の第 1 項により G の正値性を、第 2 項により G の $|\nabla\theta(x)|^p$ による下からの評価を保証する．なお、$\vec{h}_0$ の第二項は $|\nabla\theta(x)|^{p-2}\nabla\theta(x)$ に相当する．次に $\alpha = p/(p-1)$ に関しては指数の関係から $\vec{h}_0 = c_1x$ $(c_1$ は正定数) となる．最後に $1<\alpha<p/(p-1)$ に関しては原点での微分可能性ならびに無限遠方での振る舞いを考慮すると $\vec{h}_0$ のそれぞれの関数の「いいところ取り」をする必要が出てくる.（第 1 項の方が第 2 項よりも「早く」発散をするため調整が必要となる）具体的には原点付近では G の正値性を確保するため $\vec{h}=x$ の方を利用し，無限遠方では $\vec{h}=|x|^{(\alpha-1)(p-1)-1}x$ の方を利用する．それぞれの関数に対してある種のカットオフ関数を掛けることにより G の下からの評価を得ることが出来る．

なお $\theta(x)=|x|$ $(\alpha=1)$ については埋め込みコンパクト性が期待できないが，G の下からの評価（G の正値性）は確認できる．ここでは $|x| \notin C^1(\mathbf{R}^N)$ であるため，原点での微分可能性を確保できるよう $\theta^*(x)=|x|^2/(1+|x|)$ として補助関数 G の評価を行う．

4 未解決問題

本稿では $\theta(x)$ の無限遠方への発散が「強い」場合は重み付きソボレフ空間の埋め込み連続性やコンパクト性について保証されることを言及してきた．現時点で興味がある未解決問題としては下記の 3 点である．

第 1 は固有値問題である．具体的には

$$\lambda_* := \inf_{u\in D^{1,p}(\theta,\mathbf{R}^N)\setminus\{0\}} \int_{\mathbf{R}^N} e^{p\theta(x)}|\nabla u(x)|^p\,dx \bigg/ \int_{\mathbf{R}^N} e^{p\theta(x)}|u(x)|^p\,dx$$

の厳密な値である．一般的な関数 $\theta(x)$ に対して固有値を厳密に求めることは難しいが，より具体的な関数での固有値

$$\lambda_{p,c|x|^\alpha} := \inf_{u\in D^{1,p}(c|x|^\alpha,\mathbf{R}^N)\setminus\{0\}} \int_{\mathbf{R}^N} e^{pc|x|^\alpha}|\nabla u(x)|^p\,dx \bigg/ \int_{\mathbf{R}^N} e^{pc|x|^\alpha}|u(x)|^p\,dx$$

について評価が出来ればベストである．現状は仮定 $(\theta.1)$ による定数 C_1 による下からの評価 $\lambda_{p,c|x|^\alpha} \geq C_1$ のみであり，C_1 の評価を含め，固有値に対する厳密な評価には至っていない．

例えば [1] においては $p=2$, $\theta(x)=|x|^2/8$ において $\lambda_1 = N/2$ がわかっている．これは

$$\lambda_{2,|x|^2/8} := \inf_{u\in D^{1,2}(|x|^2/8,\mathbf{R}^N)\setminus\{0\}} \int_{\mathbf{R}^N} e^{|x|^2/4}|\nabla u(x)|^2\,dx \bigg/ \int_{\mathbf{R}^N} e^{|x|^2/4}|u(x)|^2\,dx$$

とした場合、次のような簡単な計算でも第 1 固有値の値は予想される．仮に $u_0(x) = e^{-c|x|^2}$ $(c > 1/8)$ として上記に代入してみると分子が

$$\int_{\mathbf{R}^N} e^{|x|^2/4}|\nabla u_0(x)|^2\,dx = \int_{\mathbf{R}^N} 4c^2|x|^2 e^{(1/4-2c)|x|^2}\,dx = \int_{\mathbf{R}^N} \frac{8Nc^2}{8c-1} e^{(1/4-2c)|x|^2}\,dx$$

であることから，これにより

$$\int_{\mathbf{R}^N} e^{|x|^2/4}|\nabla u_0(x)|^2\,dx \bigg/ \int_{\mathbf{R}^N} e^{|x|^2/4}|u_0(x)|^2\,dx = \frac{8Nc^2}{8c-1} \geq \frac{N}{2} \quad \left(c > \frac{1}{8}\right)$$

として $u_0(x) = e^{-|x|^2/4}$ の時に最小値を達成することからも予想される.（より厳密な証明については [1] を参照のこと）さらに注意としては，得られる固有値 λ_1 の値は真に $\inf \eta(\theta)(x)$ とはならないことである.（この例では $\inf \eta(\theta)(x) = N/4$ である）

第 2 点は，今回の埋め込みの議論において凡そ無限遠方での振る舞いが $\theta(x) = |x|$ の場合が埋め込みコンパクト性を考える境目であることが予想できる．先ほどの章で $\theta(x) = |x|^\alpha$ $(\alpha > 1)$ に対して仮定 $(\theta.1)$, $(\theta.2)$ を満たすように補助関数 G に対する適切な $\vec{h}$ や定数 k を選ぶことが出来たが，例えば $\theta(x) = |x|\log(1+|x|^\beta)$ $(\beta > 0)$ などの場合，埋め込みコンパクト性が期待できるが現時点では補助関数 G に対する適切な $\vec{h}$ や定数 k について探しきれていない状況である．

最後に一般の $p > 1$ に対して $\theta(x) = |x|$ の場合に埋め込み $D^{1,p}(|x|,\mathbf{R}^N) \subset L^p(|x|,\mathbf{R}^N)$ がコンパクトでない事も未解決問題である．$p = 2$ の場合についてはやはり [1] によって非コンパクト性が証明されている．これについては一般の $p > 1$ に対しての非コンパクト性も大いに期待される．簡単なアイディアとしては以下の通りである．$u \in D^{1,p}(|x|,\mathbf{R}^N)$ に対しては凡そ $e^{|x|}u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ が予想され，一方で $w \in L^p(|x|,\mathbf{R}^N)$ に対しては $e^{|x|}w \in L^p(\mathbf{R}^N)$ であることが確認できる．一般的に $W^{1,p}(\mathbf{R}^N) \subset L^p(\mathbf{R}^N)$ が領域の非有界性により非コンパクト性が示されていることを踏まえると $D^{1,p}(\theta,\mathbf{R}^N) \subset L^p(\theta,\mathbf{R}^N)$ が非コンパクトであることが予想される．

References

[1] M. Escobedo and O. Kavian, *Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation,* Nonlinear Anal. **11** (1987), 1103-1133.

[2] M. F. Furtado, O. H. Myiagaki and J. P. P. da Silva, *On a class of nonlinear elliptic equations with fast increasing weight and critical growth,* J. Differential Equations **249** (2010), 1035-1055.

[3] A. Haraux and F. B. Weissler, *Nonuniqueness for a semilinear initial value problem,* Indiana Univ. Math. J. **31** (1982), 167-189.

[4] N. Muramoto, Y. Naito and K. Yoshida, *Existence of self-similar solutions to a parabolic system modelling chemotaxis,* Japan J. Indust. Appl. Math. **17** (2000), 427-451.

[5] H. Ohya, *Exponentially decaying solutions of quasilinear elliptic equations in* $\mathbf{R}^N$*,* Adv. Math. Sci. Appl. **2** **13** (2003) 287-299.

[6] H. Ohya, *Simple approach for some weighted Sobolev spaces with growing weight function,* preprint.

[7] S. Kawashima, *Self-similar solutions of a convection-diffusion equation,* Lecture Notes Numer. Appl. Anal. **12** (1993), 123-136.

[8] F. B. Weissler, *Asymptotic analysis of an ordinary differential equation and nonuniqueness for a semilinear partial differential equation,* Arch. Rational. Mech. Anal. **91** (1985) 231-245.