可積分タイヒミュラー空間の理論
— ヴェイユ・ピーターソン曲線上の解析 — *

早稲田大学　教育・総合科学学術院　松崎克彦
Katsuhiko Matsuzaki
Department of Mathematics, School of Education, Waseda University †

概要

可積分タイヒミュラー空間はヴェイユ・ピーターソン曲線のパラメータ空間として近年関心がもたれている．可積分性の指数を一般化することなども含めて理論の拡張が試みられてきたが，曲線族の表現とそれを定義する関数空間上の作用素に関する従来からある調和解析的な議論に技術的に依存する部分があった．この論文では，複素解析的なタイヒミュラー空間論の視点である曲線の同時一意化の方法により，これまでの理論を見通しよく整備できる研究のある方向性について解説する．

1　序：研究の周辺

はじめに，この論文に関連する最近の研究，これまでの研究，およびその中での本研究の位置について述べる．なお，本稿は「関数空間を中心とした実解析・複素解析・函数解析の総合的研究」（京都大学数理解析研究所，2023 年 10 月 18 日）および「拡大複素解析セミナー」（東京工業大学，2024 年 2 月 14 日）における講演の内容をまとめた研究成果の予報である．

1.1　ヴェイユ・ピーターソン曲線の最近

平面上の求長可能な閉曲線 Γ（弧長 $\ell(\Gamma) < \infty$）が**ヴェイユ・ピーターソン曲線**であることを初等的に定義すると，始点 $z \in \Gamma$ から出発し弧長に関する n 等分点を結んでつくる n 角形 $\Gamma_{n,z}$ の周の長さを $\ell(\Gamma_{n,z})$ として，

$$\sup_{z\in\Gamma} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n(\ell(\Gamma) - \ell(\Gamma_{n,z})) < \infty$$

をみたすことである．これは Bishop [4] による結果であるが，彼はこの平面幾何的な特徴付けおよび複素解析的なものの他に，Γ が張る上半空間内の凸核の双曲幾何，Γ を境界とする極小曲面の曲率，結び目の場合と同様に定義したメビウスエネルギーなど合計 20 以上の同値な条件を与えた．

上半平面 $\mathbb{H}$ 内で 0 から ∞ へ向かう単純曲線を $\eta : (0, \infty) \to \mathbb{H}$ とする．SLE (Stochastic Loewner equation) の設定では，$t > 0$ に対して等角写像 $g_t : \mathbb{H} \setminus \eta(0, t] \to \mathbb{H}$ で正規化条件 $g_t(z) = z + 2t/z + O(1/z^2)$ $(z \to \infty)$ をみたす等角写像族 $\{g_t\}_{t\geq 0}$ を考える．$\lambda_t = g_t(\eta(t))$ をその駆動関数という．$\{g_t\}_{t\geq 0}$ はレブナー

* 本研究は科学研究費課題 23H01078 および 23K17656 の補助，京都大学数理解析研究所共同研究への参加による．
† E-mail address: matsuzak@waseda.jp

鎖とよばれ，レブナー方程式

$$\dot{g}_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \lambda_t}, \quad g_0(z) = z$$

をみたす．**レブナー鎖のディリクレエネルギー**を

$$I(\eta) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\dot{\lambda}_t)^2 dt$$

により定義して，Wang [25] は η がヴェイユ・ピーターソン曲線弧であることの同値条件としてエネルギー $I(\eta)$ の有限性を与えた．

1.2 可積分タイヒミュラー空間の研究

コンパクトリーマン面のタイヒミュラー空間上の**ヴェイユ・ピーターソン計量**を拡張して定義できる普遍タイヒミュラー空間 T の部分空間として可積分タイヒミュラー空間 T_p が定式化された．これがヴェイユ・ピーターソン曲線の複素解析的な理論の基礎となる．ヴェイユ・ピーターソン曲線全体の集合を可積分タイヒミュラー空間と同一視することができる．代表的な研究としては，Cui [7] による可積分タイヒミュラー空間の複素構造の研究，Takhtajan–Teo [24] によるヴェイユ・ピーターソン計量の曲率の研究，Shen [18] による複素解析的なタイヒミュラー空間論の研究がある．

普遍タイヒミュラー空間 T は擬等角写像の複素歪曲度から定義することができるが，可積分タイヒミュラー空間 T_p はそれに双曲計量に関する **p 乗可積分性**を課して定義される．元々は $p = 2$ の場合の理論であったが，指数を一般化する研究も進んでいる．$p \geq 2$ への拡張は Tang–Shen [23], $p > 1$ への拡張は Wei–Matsuzaki [27] によりされた．また，[29, 30] では $p \geq 1$ において T_p に複素構造が与えられている．本研究では，$p = 1$ への拡張の方法にも議論の力点が置かれる．

1.3 絶対連続タイヒミュラー空間と実解析的研究

普遍タイヒミュラー空間 T は擬対称写像全体の集合および擬円周全体の集合と適切な正規化のもとで同一視できる．ここで，向きを保つ自己同相写像 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が**擬対称写像** であるとは，次の doubling 条件をみたすことである：任意の有界区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対して $|h(I)| \leq M|h(\frac{1}{2}I)|$ が成り立つような定数 $M > 1$ が存在する．ここで，$|\cdot|$ は $\mathbb{R}$ のルベーグ測度，$\frac{1}{2}I$ は I と同じ中心をもつ長さ半分の区間を表す．擬対称写像は絶対連続とは限らない．また，複素平面 $\mathbb{C}$ 上の ∞ に延びる閉曲線 Γ が**擬円周**であるとは，それが $\mathbb{C}$ の擬等角自己同相写像による実軸 $\mathbb{R}$ の像であることである．擬円周は局所求長可能であるとは限らない．擬等角自己同相写像の $\mathbb{R}$ への制限 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を擬対称埋め込みという．

BMO タイヒミュラー空間 T_B は強擬対称写像全体の集合と同一視でき，弦弧（chord-arc）曲線全体の集合を含んでいる．ここで，向きを保つ自己同相写像 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が**強擬対称写像** であるとは，任意の有界区間 $I \subset \mathbb{R}$ と可測集合 $E \subset I$ で $|E| = |I|/2$ をみたすものに対して $|h(I)| \leq M|h(E)|$ が成り立つような定数 $M > 1$ が存在することである．とくに h は局所絶対連続である．また，$\mathbb{C}$ 上の ∞ に延びる閉曲線 Γ が**弦弧曲線** であるとは，それが $\mathbb{C}$ の双リプシッツ自己同相写像による $\mathbb{R}$ の像であることである．弦弧曲線は局所求長可能である．像が弦弧曲線である位相的埋め込み $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が弦弧埋め込みであるとは，γ が局所絶対連続で $|\gamma'|$ が A_∞ 荷重であることである．

普遍タイヒミュラー空間の中で，それを定義する擬対称写像が局所絶対連続であるものからなるタイヒミュラー空間を総称して**絶対連続タイヒミュラー空間**と呼ぶことにする．Astala–Zinsmeister [3] による BMO タ

イヒミュラー空間は，現在研究されている様々な絶対連続タイヒミュラー空間を含んでいて，Shen–Wei [20] の研究を通じて理論の整備ができている空間である．可積分タイヒミュラー空間 T_p は絶対連続タイヒミュラー空間で T_B に含まれている．

絶対連続タイヒミュラー空間の理論では，擬対称写像 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対する $\log h'$ や擬対称埋め込み $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対する $\log \gamma'$ の属する関数空間の解析が研究される．

$\mathbb{R}$ 上の BMO 関数空間と弦弧埋め込みの実解析的な研究を概説している文献として Coifman–Meyer [8] および Semmes [17] は本研究の全般にわたって関連する．前者は調和解析的な手法で弦弧埋め込みの研究がされるのに対し，後者はそれに擬等角写像の理論を援用している．現在の研究の潮流としては，それをタイヒミュラー空間論の枠組みの中で発展させるものがあるが，可積分タイヒミュラー空間 T_p の研究にもその手法を適用することができる．

2　可積分タイヒミュラー空間の擬対称写像とベゾフ空間

普遍タイヒミュラー空間のなかに可積分タイヒミュラー空間を定義し，その各点を表す擬対称写像が属する関数空間を与える．

2.1　普遍タイヒミュラー空間

定義 1. 実軸 $\mathbb{R}$ の向きを保つ自己同相写像 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が**擬対称写像**であるとは，ある $M \geq 1$ が存在して，任意の $x \in \mathbb{R}$ と $t > 0$ に対して

$$\frac{1}{M} \leq \frac{h(x+t) - h(x)}{h(x) - h(x-t)} \leq M$$

が成り立つことである．また，平面領域上で定義された向きを保つ同相写像 H が**擬等角写像**であるとは，H が局所可積分な偏導関数 $H_z, H_{\bar{z}}$ をもち，複素歪曲度 $\mu(z) = H_{\bar{z}}/H_z$ が $\|\mu\|_\infty < 1$ をみたすことである．

半平面 $\mathbb{H}$ の任意の擬等角写像 $H : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ は擬対称写像 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に連続に拡張する．逆に，任意の擬対称写像 h はこのような擬等角写像 H の連続拡張である．

定義 2. 半平面 $\mathbb{H}$ 上の複素数値可測関数 μ で $\|\mu\|_\infty < 1$ をみたすものを**ベルトラミ係数**という．$\mathbb{H}$ 上のベルトラミ係数全体の空間を $M(\mathbb{H})$ で表す．

ベルトラミ係数 $\mu \in M(\mathbb{H})$ に対して，それを複素歪曲度としてもつ正規化条件をみたす $\mathbb{H}$ の擬等角写像 $H(\mu) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ が一意的に存在する **（可測型リーマン写像定理）**．よって，このような擬等角写像の全体は $M(\mathbb{H})$ と同一視できる．

正規化条件（$0, 1, \infty$ を固定）をみたす擬対称写像 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 全体の集合 T を**普遍タイヒミュラー空間**という．$\mathbb{H}$ の擬等角写像から $\mathbb{R}$ の擬対称写像への境界拡張による対応により，タイヒミュラー射影

$$\pi : M(\mathbb{H}) \to T \quad (\mu \mapsto h = H(\mu)|_{\mathbb{R}})$$

が定まる．π に関するベルトラミ係数 μ の同値類 $[\mu]$ を**タイヒミュラー同値類**という．

普遍タイヒミュラー空間 T の位相はタイヒミュラー射影により $M(\mathbb{H})$ から定まる．さらに複素構造，計量も以下の T の埋め込みを通して $M(\mathbb{H})$ から誘導される．タイヒミュラー計量（距離）は $M(\mathbb{H})$ の L_∞ ノルムから定義される T 上の計量である．

$\mu \in M(\mathbb{H}^+)$ に対して，F^μ を正規化条件をみたす $\mathbb{C}$ の擬等角自己同相写像で上半平面 $\mathbb{H}^+$ で複素歪曲度 μ をもち，下半平面 $\mathbb{H}^-$ で等角なものとする．$F = F^\mu|_{\mathbb{H}^-}$ のシュワルツ微分 $(\log F')'' - \frac{1}{2}((\log F')')^2$ を用いて，T を $\mathbb{H}$ 上の正則関数 Ψ からなる関数空間

$$\mathcal{A}(\mathbb{H}) = \{\Psi \mid \sup_{z\in\mathbb{H}} |(\operatorname{Im} z)^2 \Psi(z)| < \infty\}$$

に位相的に埋め込むことができる．この写像 $\alpha : T \to \mathcal{A}(\mathbb{H})$ を**ベアス埋め込み**という．

T は正規化された擬対称写像の合成を演算として群の構造をもつ．この演算をタイヒミュラー同値類では $[\mu] * [\nu]$ のように表す．任意の $[\nu] \in T$ による右変換 $r_{[\nu]} : T \to T$ は $[\mu] \mapsto [\mu] * [\nu]$ で定義され，T の双正則自己同相を与える．しかし，T は位相群にはならない．

擬等角写像と普遍タイヒミュラー空間に関する文献には代表的なものとして [1, 13] がある．

2.2 可積分タイヒミュラー空間

定義 3. $p \geq 1$ に対して，ベルトラミ係数 $\mu \in M(\mathbb{H})$ が

$$\|\mu\|_p = \left(\int_{\mathbb{H}} |\mu(z)|^p \frac{dxdy}{|\operatorname{Im} z|^2}\right)^{1/p} < \infty$$

をみたすとき，p 乗可積分ベルトラミ係数といい，その全体を $M_p(\mathbb{H})$ で表す．

***p* 乗可積分タイヒミュラー空間**（ヴェイユ・ピーターソンタイヒミュラー空間とも呼ばれる）を $T_p = \pi(M_p(\mathbb{H}))$ により定義する．T_p の構造はタイヒミュラー射影 π により $M_p(\mathbb{H})$ から誘導される．とくに L_p ノルムから定義される p-ヴェイユ・ピーターソン計量をもつ．正確には，ベアス埋め込み α により T_p を正則関数のなすバナッハ空間

$$\mathcal{A}_p(\mathbb{H}) = \{\Psi \in \mathcal{A}(\mathbb{H}) \mid \left(\int_{\mathbb{H}} |(\operatorname{Im} z)^2 \Psi(z)|^p \frac{dxdy}{|\operatorname{Im} z|^2}\right)^{1/p} < \infty\}$$

に埋め込んで議論する．$p \geq 1$ に対してそれが可能である（[29]）．

T の群構造に関して T_p は部分群を成し，さらに $[\nu] \in T_p$ が定める右変換 $r_{[\nu]}$ が T_p の双正則自己同相であることも任意の $p \geq 1$ で示される．また，T_p は位相群になる（[30]）．

可積分タイヒミュラー空間 T_p に属する擬対称写像 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は局所絶対連続である．この写像の $\log h'$ が属する関数空間を決定する問題を考える．[18], [23], [27] の結果を一般化し，$p = 1$ の場合も含めて，次の定理が証明できる．

定理 1. $p \geq 1$ とする．擬対称写像 $h \in T_p$ に対して，$\log h'$ は $\operatorname{Re} \widehat{B}_p(\mathbb{R})$ に属する．

ここで，$\widehat{B}_p(\mathbb{R})$ は以下で定義する複素数値関数からなる複素バナッハ空間であり，$\operatorname{Re} \widehat{B}_p(\mathbb{R})$ でそのうち実数値関数からなる実部分空間を表す．

2.3 ベゾフ空間

$m \in \mathbb{N}$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{R}$ 上の関数 ϕ の m 階差分を

$$\Delta_t^1 \phi(x) = \phi(x+t) - \phi(x); \quad \Delta_t^{m+1} \phi(x) = \Delta_t^m \phi(x+t) - \Delta_t^m \phi(x)$$

により定める．$s \in \mathbb{R}, 0 < p, q \leq \infty$ に対して，$\mathbb{R}$ 上の局所可積分複素数値関数 ϕ のセミノルムを

$$\|\phi\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |t|^{-sq} \, \|\Delta_t^{\lfloor s \rfloor + 1} \phi\|_{L_p(\mathbb{R})}^q \frac{dt}{|t|} \right)^{1/q}$$

で与える．$\|\phi\|_{\dot{B}^s_{p,q}} < \infty$ となるような ϕ 全体を**等質的ベゾフ空間**とよぶ．

これはベゾフ空間の古典的な定義であるが，可積分タイヒミュラー空間に関連しては $p = q = 1/s$ の場合のみを扱うため，とくに以下の定義を与える．

定義 4. $p > 1$ の場合，$\mathbb{R}$ 上の局所可積分複素数値関数 ϕ でセミノルム

$$\|\phi\|_{B_p} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\phi(x+t) - \phi(x)|^p}{t^2} dx dt \right)^{1/p}$$

が有限となる関数全体の集合を**ベゾフ空間** $B_p(\mathbb{R})$ と定義する．さらに $p \geqq 1$ に対しては，

$$\|\phi\|_{B_p^\#} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\phi(x+2t) - 2\phi(x+t) + \phi(x)|^p}{t^2} dx dt \right)^{1/p}$$

が有限となる関数全体の集合を $B_p^\#(\mathbb{R})$ とする．

注意 1. $p = 1$ のとき，$\|\phi\|_{B_p} < \infty$ となるような ϕ は定数関数に限られる．

$\mathbb{R}$ 上の局所可積分複素数値関数 ϕ が **BMO** であるとは，

$$\|\phi\|_{\mathrm{BMO}} = \sup_{I \subset \mathbb{R}} \frac{1}{|I|} \int_I |\phi(x) - \phi_I| dx < \infty$$

をみたすことである．ここで上限は $\mathbb{R}$ の有界区間 I にわたってとり，ϕ_I は ϕ の I 上での積分平均を表す．BMO 関数全体を $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ とする．

定義 5. $p \geqq 1$ に対して，関数空間 $\widehat{B}_p(\mathbb{R})$ を

$$\widehat{B}_p(\mathbb{R}) = B_p^\#(\mathbb{R}) \cap \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$$

により定義し，セミノルム $\|\phi\|_{\widehat{B}_p} = \|\phi\|_{B_p^\#} + \|\phi\|_{\mathrm{BMO}}$ を与える．

$p > 1$ のとき，$\|\phi\|_{B_p}$ と $\|\phi\|_{\widehat{B}_p}$ は同値なセミノルムになる．BMO ノルムを加える理由は 2 点ある．第一に，不定性を定数関数の差のみにすること，第二に，単位円周 $\mathbb{S}$ 上の関数に同じ形でベゾフノルムを定義したとき，ケーリー変換で同型に対応するようにすることである．

定数関数の差を無視することにより $\|\cdot\|_{B_p}, \|\cdot\|_{\widehat{B}_p}$ をノルムとし，それぞれ $B_p(\mathbb{R}), \widehat{B}_p(\mathbb{R})$ を複素バナッハ空間とみなすことができる．

2.4 等角接合（conformal welding）の方法

定理 1 の証明の方針は，与えられた擬対称写像を**等角接合**により等角写像の境界値として表現することである．

一般に，擬対称写像 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は 2 つの等角写像 F, G の境界値 $f = F|_{\mathbb{R}}$，$g = G|_{\mathbb{R}}$ の差違として表せる．すなわち，擬対称写像 h の擬等角拡張 $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の複素歪曲度を $\mu \in M(\mathbb{H}^+)$，$\bar{\mu} \in M(\mathbb{H}^-)$（$\bar{\mu}(z) = \overline{\mu(\bar{z})}$

は μ の反転）としたとき，$F=F^{\mu}$ を上半平面 $\mathbb{H}^+$ で複素歪曲度 μ，下半平面 $\mathbb{H}^-$ で複素歪曲度 0（等角）をもつ $\mathbb{C}$ の擬等角自己同相写像とし，$G=G_{\bar{\mu}^{-1}}$ を $\mathbb{H}^-$ で複素歪曲度 $\bar{\mu}^{-1}$，$\mathbb{H}^+$ で等角な $\mathbb{C}$ の擬等角自己同相写像とする．ここで $\bar{\mu}^{-1}$ は，$H^{-1}|_{\mathbb{H}^-}$ の複素歪曲度である．このとき，正規化条件を与えれば，$\mathbb{C}$ 上で $H=G^{-1}\circ F$ となり，$\mathbb{R}$ 上で $h=g^{-1}\circ f$ と表せる．絶対連続性があれば

$$\log g'\circ h+\log h'=\log f' \tag{$*$}$$

が成り立つ．

これにより，まず等角写像 F, G に対して，その境界値の $\log f', \log g'$ がベゾフ空間に属すること（命題 3）をみる．正則関数 $\log F', \log G'$ は次に定義する解析的ベゾフ空間というものに属すること（補題 2）からこれがわかる．次に $\log g'\circ h$ を考えるが，これはベゾフ関数 $\log g'$ に h が合成されている形である．これが再びベゾフ空間に属すること（補題 5，6）をみるためには，h によって定まる合成作用素の性質をみなければならない．

2.5 解析的ベゾフ空間

定義 6. $p>1$ の場合，$\mathbb{H}$ 上の正則関数 Φ でセミノルム

$$\|\Phi\|_{\mathcal{B}_p}=\left(\int_{\mathbb{H}}|(\operatorname{Im} z)\Phi'(z)|^p\frac{dxdy}{|\operatorname{Im} z|^2}\right)^{1/p}$$

が有限となるもの全体の集合を**解析的ベゾフ空間** $\mathcal{B}_p(\mathbb{R})$ と定義する．さらに $p\geqq 1$ に対しては，

$$\|\Phi\|_{\mathcal{B}_p^{\#}}=\left(\int_{\mathbb{H}}|(\operatorname{Im} z)^2\Phi''(z)|^p\frac{dxdy}{|\operatorname{Im} z|^2}\right)^{1/p}$$

が有限となるもの全体の集合を $\mathcal{B}_p^{\#}(\mathbb{R})$ とする．

注意 2. $p=1$ のとき，$\|\phi\|_{\mathcal{B}_p}<\infty$ となるような Φ は定数関数に限られる．

$\mathbb{H}$ 上の正則関数 Φ が **BMOA** であるとは，

$$\|\Phi\|^2_{\mathrm{BMOA}}=\sup_{I\subset\mathbb{R}}\frac{1}{|I|}\int_{\widehat{I}\subset\mathbb{H}}|(\operatorname{Im} z)\Phi'(z)|^2\frac{dxdy}{|\operatorname{Im} z|}<\infty$$

をみたすことである．ここで，上限は $\mathbb{R}$ の有界区間 I にわたってとり，$\widehat{I}$ は I を一辺とする $\mathbb{H}$ 内の正方形を表す．BMOA 関数全体を $\mathrm{BMOA}(\mathbb{H})$ とする．

上記の関数空間の性質についてはたとえば [31] で調べられる．

定義 7. $p\geqq 1$ に対して，関数空間 $\widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H})$ を

$$\widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H})=\mathcal{B}_p^{\#}(\mathbb{H})\cap\mathrm{BMOA}(\mathbb{H})$$

により定義し，セミノルム $\|\Phi\|_{\widehat{\mathcal{B}}_p}=\|\Phi\|_{\mathcal{B}_p^{\#}}+\|\Phi\|_{\mathrm{BMOA}}$ を与える．

$p>1$ のとき，$\|\Phi\|_{\mathcal{B}_p}$ と $\|\Phi\|_{\widehat{\mathcal{B}}_p}$ は同値なセミノルムになる．BMOA ノルムを加える理由はベゾフ空間のノルムの場合と同様である．

定数関数の差を無視することにより $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_p}, \|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{B}}_p}$ をノルムとし，$\mathcal{B}_p(\mathbb{H}), \widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H})$ を複素バナッハ空間とみなすことができる．

可積分ベルトラミ係数と解析的ベゾフ空間の関係は以下のとおりである．

補題 2. $\mathbb{H}^+$ で複素歪曲度 μ をもち $\mathbb{H}^-$ で等角な $\mathbb{C}$ の擬等角写像自己同相写像 F^μ について，$\mu \in M_p(\mathbb{H}^+)$ であることと $\log(F^\mu|_{\mathbb{H}^-})' \in \widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}^-)$ であることは同値である．

これより，**前ベアス埋め込み** $\beta : T_p \to \widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H})$ が定まり，β は像の上への双正則写像となる．証明にはベアス埋め込み $\alpha : T_p \to \mathcal{A}_p(\mathbb{H})$ も利用する．対応 $\Psi = \Phi'' - (\Phi')^2/2$ で定まる写像 $\widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}) \to \mathcal{A}_p(\mathbb{H})$ は $\beta(T_p)$ から $\alpha(T_p)$ の上への双正則写像を与える．

2.6 トレース作用素とセゲー射影

次に，解析的ベゾフ空間の $\mathbb{R}$ 上でのトレースはベゾフ空間の閉部分空間となることをみる．以下の主張は，実解析的には [22, Chap.V], 複素解析的には [15] にある議論より示すことができる．

命題 3. 任意の $\Phi \in \widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H})$ は $\mathbb{R}$ 上ほとんど至る所で角極限をもち，その境界値関数は $\widehat{B}_p(\mathbb{R})$ に属する．この対応 $\iota : \widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}) \to \widehat{B}_p(\mathbb{R})$ は像の上へのバナッハ同型である．

これにより，以下では ι を省略して $\widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}) \subset \widehat{B}_p(\mathbb{R})$ とみなす．
ベゾフ空間から解析的ベゾフ空間への射影も具体的に与えられる．

定義 8. $\mathbb{R}$ 上の急減少関数 ϕ に対して，特異積分

$$\mathcal{H}(\phi)(x) = \mathrm{p.v.}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{x-t}dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

を定義する．それを $\widehat{B}_p(\mathbb{R})$ 上の作用素に拡張して $\mathcal{H}$ を**ヒルベルト変換**という．また $P^\pm = \frac{1}{2}(I \pm i\mathcal{H})$ を**セゲー射影**という．

$\pm$ は上半平面 $\mathbb{H}^+$ と下半平面 $\mathbb{H}^-$ に対応し，それぞれへのセゲー射影が考えられる．ヒルベルト変換の有界性は [11], セゲー射影の有界性は [16] にある．

命題 4. $p \geq 1$ とする．ヒルベルト変換 $\mathcal{H} : \widehat{B}_p(\mathbb{R}) \to \widehat{B}_p(\mathbb{R})$ はバナッハ自己同型で $\mathcal{H} \circ \mathcal{H} = -I$ をみたす．セゲー射影 $P^\pm : \widehat{B}_p(\mathbb{R}) \to \widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}^\pm)$ は有界な射影で $P^+ + P^- = I$，$\mathrm{Ker}\, P^\pm = \widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}^\mp)$ をみたす．

とくに，**位相的直和分解** $\widehat{B}_p(\mathbb{R}) = \widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}^+) \oplus \widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}^-)$ が成り立つ．

2.7 合成作用素（composition operator）

擬対称写像 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ による $\mathbb{R}$ 上の関数 ϕ の変数変換 $C_h(\phi) = \phi \circ h$ を**合成作用素** C_h として定義する．

補題 5. $p > 1$ のとき，任意の擬対称写像 h に対して $C_h : B_p(\mathbb{R}) \to B_p(\mathbb{R})$ はバナッハ自己同型である．逆も成り立つ．作用素ノルム $\|C_h\|$ は h の擬対称定数のみによる．

補題 6. $\log h' \in \dot{W}_1^1(\mathbb{R})$ ならば，$C_h : \widehat{B}_1(\mathbb{R}) \to \widehat{B}_1(\mathbb{R})$ はバナッハ自己同型である．$\|C_h\|$ は $\|\log h'\|_{\dot{W}_1^1}$ により評価できる．

ここで $\dot{W}_1^1$ のようにソボレフ空間にドットをつけるのは，微分の最高階の可積分ノルムだけを使ったセミノルムで空間を考えていることを意味する．
証明には，以下で述べるバナッハ空間の補間を用いる．補題 5 は [5, 6] に説明されている．$p > 1$ に対して

は，$B_p(\mathbb{R})$ を 2 次元 BMO 関数空間 $\mathrm{BMO}(\mathbb{H})$ との補間で表現できる $\mathbb{H}$ 上のある関数空間のトレースであるとみなす．$\mathbb{H}$ の擬等角自己同相写像による合成作用素は $\mathrm{BMO}(\mathbb{H})$ に有界に作用するという性質が本質的な役割を果たす．この議論は $p=1$ には適用できない．補題 6 には実補間 $B_1^{\#}(\mathbb{R})=(\dot{W}_1^2(\mathbb{R}),L_1(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2},1}$ を用いる（[14, Chap.17] を参照）．

2.8 補間（interpolation）

バナッハ空間 $(X_0,\|\cdot\|_{X_0})$, $(X_1,\|\cdot\|_{X_1})$ がある共通の位相ベクトル空間に連続的に埋め込まれているとする．$t>0$ に対して，

$$K(x,t)=\inf\{\|x_0\|_{X_0}+t\|x_1\|_{X_1}\mid x=x_0+x_1,\ x_0\in X_0,\ x_1\in X_1\}$$

を $x\in X_0+X_1$ のノルムとする．$\sigma\in(0,1)$ と $q\geq 1$ に対して，

$$(X_0,X_1)_{\sigma,q}=\{x\in X_0+X_1\mid \|x\|_{\sigma,q}=\left(\int_0^\infty K(x,t)^q\frac{dt}{t^{1+\sigma q}}\right)^{\frac{1}{q}}<\infty\}$$

を X_0 と X_1 の**実補間** と定義する．

命題 7. 実補間 $(X_0,X_1)_{\sigma,q}$ は $\|\cdot\|_{\sigma,q}$ をノルムとしてバナッハ空間となる．また，線形変換 $C:X_0+X_1\to X_0+X_1$ が X_0 および X_1 上に制限すればそれぞれの有界線形変換であるとき，$C:(X_0,X_1)_{\sigma,q}\to(X_0,X_1)_{\sigma,q}$ も有界となる．

2.9 定理 1 の証明の概略

等角接合の方法を用いた議論より続く．

$p=1$ の場合には，まず補題 6 の仮定の条件 $\log h'\in\dot{W}_1^1(\mathbb{R})$ を確かめる．補題 2 より $\log F',\log G'\in\widehat{\mathcal{B}}_1(\mathbb{H})$ であり，命題 3 より $\log f',\log g'\in\widehat{B}_1(\mathbb{R})$ である．等角接合の関係式 $(*)$ において $\log g'\in\widehat{B}_1(\mathbb{R})\subset\dot{W}_1^1(\mathbb{R})$ を用いて $\log g'\circ h\in\dot{W}_1^1(\mathbb{R})$ を得る．また同様に $\log f'\in\widehat{B}_1(\mathbb{R})\subset\dot{W}_1^1(\mathbb{R})$ である．これにより，絶対連続な h は $\log h'\in\dot{W}_1^1(\mathbb{R})$ に自己改良されので補題 6 が適用できる．

補題 6 の証明．1 次元空間の特殊性が適用され，$\log h'\in\dot{W}_1^1(\mathbb{R})$ ならば $h\in\dot{W}_1^2(\mathbb{R})$ かつ $h',(h')^{-1}\in L_\infty(\mathbb{R})$ である．これより実補間 $B_1^{\#}(\mathbb{R})=(\dot{W}_1^2(\mathbb{R}),L_1(\mathbb{R}))_{\frac{1}{2},1}$ の各成分について，C_h が $\dot{W}_1^2(\mathbb{R})$ および $L_1(\mathbb{R})$ から自分自身への有界線形作用素であることが示せる．よって命題 7 より C_h は $B_1^{\#}(\mathbb{R})$ に対しても有界線形作用素である．また，この作用素ノルムは $\|\log h'\|_{\dot{W}_1^1}$ で評価できる．

$\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ を用いるかわりに $\widehat{B}_1(\mathbb{R})=B_1^{\#}(\mathbb{R})\cap\dot{W}_1^1(\mathbb{R})$ であることが示せる．セミノルム $\|\phi\|_{\widehat{B}_p}$ も $\|\phi\|_{B_p^{\#}}+\|\phi\|_{\dot{W}_1^1}$ と同値である．これより，C_h の有界性は $\widehat{B}_1(\mathbb{R})$ に対しても成り立つ． □

定理 1 の証明．$p=1$ の場合，補題 6 より等角接合の関係式 $(*)$ において $\log g'\circ h\in\widehat{B}_1(\mathbb{R})$ を得る．よって $\log f'\in\widehat{B}_1(\mathbb{R})$ と合わせて $\log h'\in\widehat{B}_1(\mathbb{R})$ が結論できる．$p>1$ の場合は補題 5 により同じ議論を行う． □

2.10 Teichmüller–Wittich–Belinskiĭ の定理

$p=1$ の場合，定理 1 の結論は $\log h'$ が

$$\widehat{B}_1(\mathbb{R})\subset\dot{W}_1^1(\mathbb{R})\subset C^0(\mathbb{R})\cap L_\infty(\mathbb{R})$$

に属することであった．これより，次の結果が従う．

系 8. 擬対称写像 $h \in T_1$ は $\widehat{\mathbb{R}}$（∞ も含み単位円周と微分同相）の C^1 級微分同相写像である．

この結果は Alberge–Brakalova [2] により示された．証明では **Teichmüller–Wittich–Belinskiĭ の定理**（[21] を参照）を用いている．この定理は，一般に擬等角写像 H の複素歪曲度 μ の 1 点 z_0 でのある局所可積分性が等角性を導くこと，すなわち，ある $r > 0$ が存在して

$$\int_{|z-z_0|<r} \frac{|\mu(z)|}{|z-z_0|^2} dxdy < \infty$$

であるならば, H は z_0 において複素微分 $H'(z_0) \neq 0$ をもつことを主張している．擬等角写像 $H : \mathbb{H}^+ \to \mathbb{H}^+$ の複素歪曲度 μ が $M_1(\mathbb{H}^+)$ に属するならば，$\mathbb{R}$ に関する鏡像で H を $\mathbb{C}$ の擬等角写像に拡張したもの（$\mathbb{H}^-$ 上での複素歪曲度は $\bar{\mu}$）は任意の $z_0 \in \mathbb{R}$ において上の条件をみたしている．

3　ヴェイユ・ピーターソン埋め込みのベアス座標

ヴェイユ・ピーターソン曲線を $\mathbb{R}$ の埋め込み γ の像としてとらえ，そのような埋め込み全体をタイヒミュラー空間を用いて座標付けする．ベゾフ空間への対応 $\log \gamma'$ が双正則であるという関係が示される．

3.1　ヴェイユ・ピーターソン埋め込み

定義 9. $\mu^+ \in M_p(\mathbb{H}^+)$，$\mu^- \in M_p(\mathbb{H}^-)$ に対して, それを複素歪曲度としてもつ正規化された $\mathbb{C}$ の擬等角自己同相写像 $G(\mu^+, \mu^-)$ の $\mathbb{R}$ への制限を ***p*-ヴェイユ・ピーターソン埋め込み**という．また，その像を p-ヴェイユ・ピーターソン曲線という．

$G(\mu^+, \mu^-)|_{\mathbb{R}}$ は $([\mu^+], [\mu^-]) \in T_p^+ \times T_p^-$ により定まり，これを $\gamma([\mu^+], [\mu^-])$ と表す．なお，$M_p(\mathbb{H}^+)$, $M_p(\mathbb{H}^-)$ からのタイヒミュラー射影で定義される空間をそれぞれ T_p^+，T_p^- で表している．

直積空間 $T_p^+ \times T_p^-$ の**対称軸**を

$$\mathrm{Sym}\,(T_p^+ \times T_p^-) = \{([\mu], [\bar{\mu}]) \mid [\mu] \in T_p\}$$

とする．$[\mu] \in T_p$ に対応する擬対称写像 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$（すなわち $\pi(\mu) = h$）は $h = \gamma([\mu], [\bar{\mu}])$ とかける．

定理 1 は次のように一般化される．証明は同様にして等角接合の方法を用いる．$\mathrm{Sym}\,(T_p^+ \times T_p^-)$ の擬対称写像に $[\mu^+]$ と $[\mu^-]$ の差違から定まる等角写像の境界値を合成したものが γ と考えればよい．

系 9. p-ヴェイユ・ピーターソン埋め込み $\gamma = \gamma([\mu^+], [\mu^-]) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は局所絶対連続であり，$\log \gamma'$ は $\widehat{B}_p(\mathbb{R})$ に属する．

3.2　ベアス座標

ベアスの同時一意化により，擬フックス群全体の空間はタイヒミュラー空間の直積で座標付けができる．同様にして，p-ヴェイユ・ピーターソン埋め込み全体の空間は $T_p^+ \times T_p^-$ で座標付けできる．これを**ベアス座標**という．系 9 より，ヴェイユ・ピーターソン埋め込み γ の $\log \gamma'$ を通じてベアス座標からベゾフ空間への写像が定まる．

主定理. $p \geq 1$ とする．写像 $\Lambda : T_p^+ \times T_p^- \to \widehat{B}_p(\mathbb{R})$ を

$$\Lambda([\mu^+], [\mu^-]) = \log \gamma' \quad (\gamma = \gamma([\mu^+], [\mu^-]))$$

により定めると，像 $\mathrm{Ran}\,\Lambda$ は $\widehat{B}_p(\mathbb{R})$ の開集合であり，Λ は $\mathrm{Ran}\,\Lambda$ の上への双正則写像である．さらに，$\Lambda(\mathrm{Sym}\,(T_p^+ \times T_p^-)) = \mathrm{Re}\,\widehat{B}_p(\mathbb{R})$ である．

3.3 定理 1 の逆：原点での微分

主定理の後半の主張は，以下のような定理 1 の逆の主張に対応している．

定理 10. $p \geq 1$ に対して，擬対称写像 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が局所絶対連続で $\log h' \in \mathrm{Re}\,\widehat{B}_p(\mathbb{R})$ となるならば，h は T_p に属する．

この結果の証明は，主定理の証明の易しい部分に相当する．なお，$p > 1$ のときは，擬対称写像に対する Beurling–Ahlfors 擬等角拡張の定義において，畳込み積の核をガウス関数に取り替えた Fefferman–Kenig–Pipher の拡張（[10], [26]）を適用しても示せる（[27]）．

T_p の群構造に関して $[\nu] \in T_p$ が定める右変換 $r_{[\nu]}$ を $T_p^+ \times T_p^-$ に拡張して，**並行移動** $R_{[\nu]}([\mu^+], [\mu^-]) = (r_{[\nu]}([\mu^+]), r_{[\bar{\nu}]}([\mu^-]))$ を定義する．$R_{[\nu]}$ は $T_p^+ \times T_p^-$ の双正則自己同相写像で対称軸 $\mathrm{Sym}\,(T_p^+ \times T_p^-)$ を保つ．

命題 11. $\pi(\nu) = h \in T_p$ のとき，$\Lambda \circ R_{[\nu]} = C_h \circ \Lambda$ が成り立つ．

定理 10 の証明. Λ は単射正則写像になる．その原点 $([0], [0]) \in T_p^+ \times T_p^-$ における微分を考える．前ベアス埋め込みより $T_p^+ \times T_p^-$ の $([\mu^+], [\mu^-]) \in T_p^+ \times T_p^-$ における接空間を

$$\mathscr{T}_{([\mu^+],[\mu^-])}(T_p^+ \times T_p^-) = \mathscr{T}_{[\mu^+]}(T_p^+) \oplus \mathscr{T}_{[\mu^-]}(T_p^-) \cong \widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}^-) \oplus \widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}^+) = \widehat{B}_p(\mathbb{R})$$

のように同一視すれば，原点での微分 $d_{([0],[0])}\Lambda$ は恒等写像であることがわかる．とくに原点の近傍で Λ は全射で Λ^{-1} は正則である．よって $\widehat{B}_p(\mathbb{R})$ の原点の近傍にある $\log h'$ について，h はヴェイユ・ピーターソン埋め込みからくる．

任意の $\log h' \in \mathrm{Re}\,\widehat{B}_p(\mathbb{R})$ について $h \in T_p$ であることを示すためには，実解析的な関数のクラス $C^\omega(\mathbb{R})$ の $\widehat{B}_p(\mathbb{R})$ における稠密性を用いる．$\log h' \in C^\omega(\mathbb{R})$ ならば，擬対称写像 h の擬等角拡張で複素歪曲度が可積分性をもつものが標準的な方法で構成できる．この h と $[\nu]$ に対応する双正則な並行移動 $R_{[\nu]}$ と合成作用素 C_h（補題 5, 6 よりバナッハ同型）により，原点の近傍を $\log h'$ の近傍に移せば，命題 11 より，対応する移動が $\mathrm{Sym}\,(T_p^+ \times T_p^-)$ 上で起こる．これより $\mathrm{Sym}\,(T_p^+ \times T_p^-)$ から $\mathrm{Re}\,\widehat{B}_p(\mathbb{R})$ への Λ の全射性が示される． □

3.4 主定理の証明の概略：微分の全射性

主定理の前半の主張の証明は，以下の 2 点を示すことからなる．

(1) Λ の単射正則性.

(2) Λ の微分 $d_{([\mu^+],[\mu^-])}\Lambda : \mathscr{T}_{([\mu^+],[\mu^-])}(T_p^+ \times T_p^-) \to \widehat{B}_p(\mathbb{R})$ の全射性.

正則性はタイヒミュラー空間論においては通常想定できる事実である．それにより，逆写像の正則性は逆写像定理より微分を考えて処理できるようになる．微分の全射性の証明はさらに次のステップからなる．

• 接空間の像：$\mathscr{T}_{([\mu^+],[\mu^-])}(T_p^+ \times T_p^-) \cong \widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}^-) \oplus \widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}^+)$ の微分 $d\Lambda$ による像は

$$\mathrm{Ran}\, d_{([\mu^+],[\mu^-])}\Lambda = C_{h^-}\widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}^-) + C_{h^+}\widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}^+)$$

となる．ただし，$h^+ = \pi(\mu^+)$，$h^- = \pi(\mu^-)$ とする．

• $Z_p = i\,\mathrm{Re}\,\widehat{B}_p(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ran}\,\Lambda$ での考察：Z_p 上では $C_{h^-}\widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}^-) + C_{h^+}\widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}^+) = \widehat{B}_p(\mathbb{R})$ が成り立つ．これより Z_p 上では $d\Lambda$ が全射である．

• 並行移動および合成作用素による移動：$\Lambda([\mu^+],[\mu^-]) = \log h' \in Z_p$ をとり，並行移動で $([\mu^+],[\mu^-])$ を，合成作用素で $\log h'$ を移して考えれば，命題 11 より $T_p^+ \times T_p^-$ の任意の点での $d\Lambda$ の全射性が証明できる．□

3.5 可積分タイヒミュラー空間の実解析的構造

主定理の双正則写像 Λ を実解析的な部分多様体である対称軸 $\mathrm{Sym}\,(T_p^+ \times T_p^-)$ に制限する（定理 10 の設定と同じ）．自明な実解析的な埋め込み $\iota : T_p \to \mathrm{Sym}\,(T_p^+ \times T_p^-)$ と合成することにより次を得る．p に制限をつけた場合の結果は [19], [30] にある．

系 12. $p \geq 1$ に対して，$h \mapsto \log h'$ で定義される写像 $\Lambda \circ \iota : T_p \to \mathrm{Re}\,\widehat{B}_p(\mathbb{R})$ は実解析的な微分同相写像である．

これにより，可積分タイヒミュラー空間 T_p は実バナッハ空間 $\mathrm{Re}\,\widehat{B}_p(\mathbb{R})$ 全体と実解析的に同値である．すなわち，T_p の複素構造が定める実解析的構造が $\mathrm{Re}\,\widehat{B}_p(\mathbb{R})$ である．

4 双正則対応による曲線上の解析

ヴェイユ・ピーターソン埋め込みのベアス座標からベゾフ空間への双正則な対応は，可積分タイヒミュラー空間の構造を記述するのみならず，古典的な実解析の問題に対するヴェイユ・ピーターソン曲線上での解析の方法を与える．

4.1 コーシー変換とコーシー射影

p-ヴェイユ・ピーターソン埋め込み $\gamma = \gamma([\mu^+],[\mu^-])$ に対して，曲線 $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$ 上でコーシー積分を考える．Ω^+, Ω^- を Γ で分けられる $\mathbb{C}$ の 2 つの部分領域とする．関数空間は $\gamma : \mathbb{R} \to \Gamma$ および正規化されたリーマン写像 $F^{\pm} : \mathbb{H}^{\pm} \to \Omega^{\pm}$ による押し出しで定義する：

$$\widehat{B}_p(\gamma(\mathbb{R})) := \{\gamma_*\phi \mid \phi \in \widehat{B}_p(\mathbb{R})\}, \quad \|\gamma_*\phi\|_{\widehat{B}_p} := \|\phi\|_{\widehat{B}_p};$$
$$\widehat{\mathcal{B}}_p(\Omega^{\pm}) := \{(F^{\pm})_*\Phi^{\pm} \mid \Phi^{\pm} \in \widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}^{\pm})\}, \quad \|(F^{\pm})_*\Phi^{\pm}\|_{\widehat{\mathcal{B}}_p} := \|\Phi^{\pm}\|_{\widehat{\mathcal{B}}_p}.$$

$\widehat{\mathcal{B}}_p(\Omega^{\pm})$ に属する正則関数の Γ 上での境界値は $\widehat{B}_p(\gamma(\mathbb{R}))$ に属する．さらに，境界値をとる写像 $\widehat{\mathcal{B}}_p(\Omega^{\pm}) \hookrightarrow \widehat{B}_p(\gamma(\mathbb{R}))$ はバナッハ同型な埋め込みで，ノルムは $\|C_{h^{\pm}}\|$ で評価できる．ここで，$h^{\pm} = \pi(\mu^{\pm})$ は擬対称写像であり，以後この対応を用いる．

定義 10. p-ヴェイユ・ピーターソン曲線 $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$ 上（向きは $\mathbb{R}$ の向きから定めて $\pm$ で同じ）の関数

$\psi \in \widehat{B}_p(\gamma(\mathbb{R}))$ の**コーシー変換**を特異積分

$$(\mathcal{H}_\Gamma \psi)(\xi) = \mathrm{p.v.}\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \frac{\psi(\tau)}{\xi - \tau} d\tau \quad (\xi \in \Gamma)$$

で定義する．また，コーシー積分による $\Omega^\pm$ 上の正則関数を

$$(P_\Gamma^\pm \psi)(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \frac{\psi(\tau)}{\zeta - \tau} d\tau \quad (\zeta \in \Omega^\pm)$$

で表し，**コーシー射影**とよぶ.

コーシー射影 $P_\Gamma^\pm \psi$ の Γ における境界値も同じ記号で表す.

4.2 Calderón の定理

まず，**Plemelj の公式**（ヒルベルト変換とセゲー射影の関係の一般化）より次が成り立つ：

命題 13. p-ヴェイユ・ピーターソン曲線 $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$ 上の関数 $\psi \in \widehat{B}_p(\gamma(\mathbb{R}))$ のコーシー変換 $\mathcal{H}_\Gamma$ とコーシー射影 $P_\Gamma^\pm$ は

$$P_\Gamma^+ \psi = \frac{1}{2}(\psi + i\mathcal{H}_\Gamma \psi), \quad P_\Gamma^- \psi = \frac{1}{2}(\psi - i\mathcal{H}_\Gamma \psi)$$

をみたす．言い換えれば

$$\psi = P_\Gamma^+ \psi + P_\Gamma^- \psi, \quad i\mathcal{H}_\Gamma \psi = P_\Gamma^+ \psi - P_\Gamma^- \psi$$

が成り立つ.

接空間 $\mathscr{T}_{([\mu^+],[\mu^-])}(T_p^+ \times T_p^-) = \mathscr{T}_{[\mu^+]} T_p^+ \oplus \mathscr{T}_{[\mu^-]} T_p^-$ の全単射な微分 $d_{([\mu^+],[\mu^-])}\Lambda$ による像は

$$\widehat{B}_p(\mathbb{R}) = C_{h^-}(\widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}^-)) \oplus C_{h^+}(\widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}^+))$$

であった．また，この直和分解による $\phi \in \widehat{B}_p(\mathbb{R})$ の一意的な分解 $\phi = \phi^+ + \phi^-$ に対応する有界な射影を

$$P^+_{([\mu^+],[\mu^-])} : \widehat{B}_p(\mathbb{R}) \to C_{h^+}(\widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}^+)), \quad \phi \mapsto \phi^+;$$
$$P^-_{([\mu^+],[\mu^-])} : \widehat{B}_p(\mathbb{R}) \to C_{h^-}(\widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}^-)), \quad \phi \mapsto \phi^-$$

と定義する.

定理 14. p-ヴェイユ・ピーターソン曲線 $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$ 上の関数空間 $\widehat{B}_p(\gamma(\mathbb{R}))$ におけるコーシー射影 $P_\Gamma^\pm$ は

$$P_\Gamma^\pm = \gamma_* \circ P^\pm_{([\mu^+],[\mu^-])} \circ \gamma_*^{-1}$$

をみたす．よって $P_\Gamma^\pm : \widehat{B}_p(\gamma(\mathbb{R})) \to \widehat{\mathcal{B}}_p(\Omega^\pm)$ は有界線形作用素でそのノルムは $\|C_{h^\pm}\|$ により評価できる.

これより，ヴェイユ・ピーターソン曲線に関する **Calderón の定理**が従う．弦弧曲線に関して $\log \gamma'$ が原点に近い場合の結果については [8] にある．任意の弦弧曲線についても，[28] にある弦弧埋め込みに関するベアス座標の議論にここでの手法を用いれば示すことができる.

系 15. p-ヴェイユ・ピーターソン曲線 $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$ におけるコーシー射影 $P_\Gamma^\pm$ は，位相的な直和分解

$$\widehat{B}_p(\gamma(\mathbb{R})) = \widehat{\mathcal{B}}_p(\Omega^+) \oplus \widehat{\mathcal{B}}_p(\Omega^-)$$

を与える.

4.3 コーシー変換の正則依存性

p-ヴェイユ・ピーターソン曲線 $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$ に関するコーシー変換とコーシー射影の関係 $\mathcal{H}_\Gamma = -i(P_\Gamma^+ - P_\Gamma^-)$ を γ_* による共役で $\mathbb{R}$ 上に戻して（これを**標準化**とよぶことにする），

$$\mathcal{H}_{([\mu^+],[\mu^-])} = -i(P^+_{([\mu^+],[\mu^-])} - P^-_{([\mu^+],[\mu^-])})$$

と定義する．より具体的に書くと

$$\mathcal{H}_{([\mu^+],[\mu^-])}(\phi)(x) = \mathrm{p.v.}\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \frac{\phi \circ \gamma^{-1}(\tau)}{\gamma(x) - \tau} d\tau \quad (x \in \mathbb{R})$$

となる．これは $\widehat{B}_p(\mathbb{R})$ のバナッハ自己同型である．

$\mathcal{H}_{([0],[0])}$ はヒルベルト変換 $\mathcal{H}$ と一致する．$([\mu],[\bar{\mu}]) \in \mathrm{Sym}\,(T_p^+ \times T_p^-)$ に対しては，$\gamma([\mu],[\bar{\mu}]) = H(\mu)|_\mathbb{R} = h$（あるいは $\pi(\mu) = h$）は $\mathbb{R}$ の擬対称写像で，$\Gamma = h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ となり，

$$\mathcal{H}_{([\mu],[\bar{\mu}])} = -ih_*^{-1}(P^+ - P^-)h_* = C_h \circ \mathcal{H} \circ C_h^{-1}$$

は合成作用素 C_h による $\mathcal{H}$ の共役である．

有界線形作用素 $\widehat{B}_p(\mathbb{R}) \to \widehat{B}_p(\mathbb{R})$ 全体からなるバナッハ空間を $\mathcal{L}(\widehat{B}_p(\mathbb{R}))$ とすると次が成り立つ．

定理 16. 対応 $([\mu^+],[\mu^-]) \mapsto \mathcal{H}_{([\mu^+],[\mu^-])}$ で定義される写像 $T_p^+ \times T_p^- \to \mathcal{L}(\widehat{B}_p(\mathbb{R}))$ は正則である．

証明. $T_p^+ \times T_p^-$ の接空間の直和分解による各成分への射影を

$$J^\pm : \mathscr{T}_{([\mu^+],[\mu^-])}(T_p^+ \times T_p^-) \to \mathscr{T}_{[\mu^\mp]}(T_p^\mp)$$

とすると，コーシー射影の標準化は

$$P^\pm_{([\mu^+],[\mu^-])} = d_{([\mu^+],[\mu^-])}\,\Lambda \circ J^\pm \circ d_{\Lambda([\mu^+],[\mu^-])}\,(\Lambda^{-1})$$

となることがわかる．Λ は双正則より，これは $([\mu^+],[\mu^-])$ に正則に依存する． □

弦弧埋め込みの場合の対応する結果は [8] にある．ただし，双正則写像 Λ は介さず，原点の近傍のみでの正則依存性が示されている．これについても完全な拡張が可能である．

4.4 Coifman–Meyer の定理

$Z_p = i\widehat{B}_p(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ran}\,\Lambda$ を純虚数値ベゾフ関数からなる $\mathrm{Ran}\,\Lambda$ の実解析的部分多様体とする（主定理の証明で用いた）．$\psi \in Z_p$ に対して

$$\gamma_0(x) = \int_0^x \exp\psi(t)dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

はある p-ヴェイユ・ピーターソン曲線の**弧長パラメータ**となる．

一般に，$\phi \in \mathrm{Ran}\,\Lambda$ から定まる任意の p-ヴェイユ・ピーターソン埋め込み

$$\gamma(x) = \int_0^x \exp\phi(t)dt$$

に対して，擬対称写像

$$h(x)=\int_0^x \exp(\mathrm{Re}\,\phi(t))dt$$

をとると，$\psi=i\,\mathrm{Im}\,\phi\circ h^{-1}\in Z_p$ による弧長パラメータを γ_0 とすれば，γ は γ_0 の h による**パラメータ変更** $\gamma=\gamma_0\circ h$ として表せる．

$Y_p=\widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{H}^+)\cap\mathrm{Ran}\,\Lambda$ を $\mathbb{H}^+$ の解析的ベゾフ関数からなる $\mathrm{Ran}\,\Lambda$ の複素部分多様体とする．$\varphi\in Y_p$ から定まる p-ヴェイユ・ピーターソン埋め込み

$$f(x)=\int_0^x \exp\varphi(t)dt \quad (x\in\mathbb{R})$$

に対して上記を適用すれば，弧長パラメータ γ_0 の擬対称写像 h によるパラメータ変更 $f=\gamma_0\circ h$ として表せる．

この f と γ_0 との対応は全単射であり，これより写像 $Z_p\to Y_p$ が定義される．これは同相写像であることがわかる．一方，f と γ_0 の組から，その間のパラメータ変更 h への対応も考えられ，写像 $Z_p\to\mathrm{Re}\,\widehat{B}_p(\mathbb{R})$ が定義できる．

この 2 つの写像を $T_p^+\times T_p^-$ で考えるために，

$$\rho: T_p^+\times T_p^-\to\{[0]\}\times T_p^-,\quad ([\mu^+],[\mu^-])\mapsto([0],[\mu^-]*\overline{[\mu^+]}^{-1});$$
$$\delta: T_p^+\times T_p^-\to\mathrm{Sym}\,(T_p^+\times T_p^-),\quad ([\mu^+],[\mu^-])\mapsto([\mu^+],\overline{[\mu^+]})$$

とおく．T_p が位相群であることより ρ は連続である．また，δ は対称軸への射影であるので実解析的である．一意的な分解

$$([\mu^+],[\mu^-])=\rho([\mu^+],[\mu^-])*\delta([\mu^+],[\mu^-])$$

は p-ヴェイユ・ピーターソン埋め込み $g=\gamma([\mu^+],[\mu^-])$ の分解 $g=f\circ h$ に対応する．ここで，$f=\gamma(\rho([\mu^+],[\mu^-]))$ は $\mathbb{H}^+$ の等角写像の $\mathbb{R}$ への拡張，$h=\gamma(\delta([\mu^+],[\mu^-]))$ は $\mathbb{R}$ の擬対称写像である．

上で定義した $\widehat{B}_p(\mathbb{R})$ 上の写像を双正則写像 Λ による共役で $T_p^+\times T_p^-$ 上に変換する：

$$Z_p\to Y_p \Longleftrightarrow \rho_0:=\rho|_{\Lambda^{-1}(Z_p)}:\Lambda^{-1}(Z_p)\to\{[0]\}\times T_p^-,$$
$$Z_p\to\mathrm{Re}\,\widehat{B}_p(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \delta_0:=\delta|_{\Lambda^{-1}(Z_p)}:\Lambda^{-1}(Z_p)\to\mathrm{Sym}\,(T_p^+\times T_p^-).$$

Coifman–Meyer [9] の弦弧埋め込みに関する結果をヴェイユ・ピーターソン埋め込みの場合に翻訳して以下のように定式化する．証明は既に示されていることから直ちに従う．部分的な結果は [30] にある．

定理 17. $\delta_0:\Lambda^{-1}(Z_p)\to\mathrm{Sym}\,(T_p^+\times T_p^-)=\Lambda^{-1}(\mathrm{Re}\,\widehat{B}_p(\mathbb{R}))$ は像の上への実解析的微分同相写像である．

証明. δ_0 は実解析的単射であるので，逆写像 δ_0^{-1} が実解析的であることを示す．Λ による共役

$$\Lambda\circ\delta_0^{-1}\circ\Lambda^{-1}:\mathrm{Re}\,\widehat{B}_p(\mathbb{R})\cap\mathrm{Ran}\,(\Lambda\circ\delta_0)\to Z_p$$

は $\Lambda\circ\delta_0^{-1}\circ\Lambda^{-1}(\phi)=-i\mathcal{H}_{\Lambda^{-1}(\phi)}\phi$ で与えられることがわかる．コーシー変換の標準化 $\mathcal{H}_{\Lambda^{-1}(\phi)}$ は定理 16 により $\phi\in\mathrm{Re}\,\widehat{B}_p(\mathbb{R})$ に対して実解析的に依存するので，$\Lambda\circ\delta_0^{-1}\circ\Lambda^{-1}$ もそうである． □

4.5 Kerzman–Stein の公式

Kerzman–Stein の公式（[12]）はセゲー射影とコーシー射影の関係を滑らかな曲線 Γ 上の L_2 空間に対して与えるものである．これをヴェイユ・ピーターソン曲線 Γ 上で考える．

ベゾフ空間 $B_2(\mathbb{R})$ は複素ヒルベルト空間である．2-ヴェイユ・ピーターソン埋め込み $\gamma = \gamma([\mu^+],[\mu^-])$ に対して，$\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$ を境界とする領域のひとつを $\Omega = \Omega^+$ とし，Ω^+ 上の正則関数へのコーシー射影を $P_\Gamma = P_\Gamma^+$ とする．この標準化 $P_{([\mu^+],[\mu^-])}$ を $B_2(\mathbb{R})$ に作用させると，$C_{h^+}(\mathcal{B}_2(\mathbb{H}^+))$ への射影になる．この共役作用素を $P^*_{([\mu^+],[\mu^-])}$ とする．一方，$B_2(\mathbb{R})$ におけるセゲー射影 P は自己共役的な射影（$P^* = P$）である．よって $C_{h^+} \circ P \circ C_{h^+}^{-1}$ も $C_{h^+}(\mathcal{B}_2(\mathbb{H}^+))$ への自己共役的な射影である．

定理 18. $([\mu^+],[\mu^-]) \in T_2 \times T_2$ に対して，$B_2(\mathbb{R})$ における $C_{h^+}(\mathcal{B}_2(\mathbb{H}^+))$ へのセゲー射影（の共役）とコーシー射影（の標準化）は次の関係をみたす：

$$C_{h^+} \circ P \circ C_{h^+}^{-1} = P_{([\mu^+],[\mu^-])} \circ (I + P_{([\mu^+],[\mu^-])} - P^*_{([\mu^+],[\mu^-])})^{-1}.$$

参考文献

[1] L.V. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, 2nd ed., Univ. Lect. Ser. 38, Amer. Math. Soc., 2006.

[2] V. Alberge and M. Brakalova, *On smoothness of the elements of some integrable Teichmüller spaces*, Math. Rep. (Bucur.) **23** (2021), 95–105.

[3] K. Astala and M. Zinsmeister, *Teichmüller spaces and BMOA*, Math. Ann. **289** (1991), 613–625.

[4] C.J. Bishop, *Function theoretic characterizations of Weil–Petersson curves*, Rev. Mat. Iberoam. **38** (2022), 2355–2384.

[5] G. Bourdaud and W. Sickel, *Changes of variable in Besov spaces*, Math. Nachr. **198** (1999), 19–39.

[6] G. Bourdaud, *Changes of variable in Besov spaces II*, Forum Math. **12** (2000), 545–563.

[7] G. Cui, *Integrably asymptotic affine homeomorphisms of the circle and Teichmüller spaces*, Sci. China Ser. A **43** (2000), 267–279.

[8] R.R. Coifman and Y. Meyer, *Une généralisation du théorème de Calderón sur l'intégrale de Cauchy*, Fourier analysis (Proc. Sem., El Escorial, 1979), pp.87–116, Asoc. Mat. Española, 1980.

[9] R.R. Coifman and Y. Meyer, *Lavrentiev's curves and conformal mappings*, Institute Mittag–Leffler, Report No.5, 1983.

[10] R.A. Fefferman, C.E. Kenig and J. Pipher, *The theory of weights and the Dirichlet problems for elliptic equations*, Ann. of Math. **134** (1991), 65–124.

[11] K. Gröchenig and M. Piotrowski, *Molecules in coorbit spaces and boundedness of operators*, Studia Math. **192** (2009), 61–77.

[12] N. Kerzman and E.M. Stein, *The Cauchy kernel, the Szegö kernel, and the Riemann mapping function*, Math. Ann. **236** (1978), 85–93.

[13] O. Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Grad. Texts in Math. 109, Springer, 1987.

[14] G. Leoni, *A First Course in Sobolev Spaces*, 2nd ed., Grad. Studies in Math. 181, Amer. Math. Soc., 2017.

[15] M. Pavlović, *On the moduli of continuity of H_p-functions with* $0 < p < 1$, Proc. Edinburgh Math. Soc. **35** (1992), 89–100.

[16] V.V. Peller, *Hankel operators of class $\mathfrak{S}_p$ and their applications (rational approximation, Gaussian processes, the problem of majarizing operators)*, Math. USSR-Sbornik **41** (1982), 443–479.

[17] S. Semmes, *The Cauchy integral, chord-arc curves, and quasiconformal mappings*, The Bieberbach conjecture (West Lafayette, Ind., 1985), pp.167–183, Math. Surveys Monogr., 21, Amer. Math. Soc., 1986.

[18] Y. Shen, *Weil–Petersson Teichmüller space*, Amer. J. Math. **140** (2018), 1041–1074.

[19] Y. Shen and S. Tang, *Weil–Petersson Teichmüller space II: smoothness of flow curves of $H^{\frac{3}{2}}$-vector fields*, Adv. Math. **359** (2020), 106891.

[20] Y. Shen and H. Wei, *Universal Teichmüller space and BMO*, Adv. Math. **234** (2013) 129–148.

[21] M. Shishikura, *Conformality of quasiconformal mappings at a point, revisited*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **43** (2018), 981–990.

[22] E. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, 1970.

[23] S. Tang and Y. Shen, *Integrable Teichmüller space*, J. Math. Anal. Appl. **465** (2018), 658–672.

[24] L. Takhtajan and L.P. Teo, *Weil-Petersson metric on the universal Teichmüller space*, Mem. Amer. Math. Soc. **183** (861), 2006.

[25] Y. Wang, *Equivalent descriptions of the Loewner energy*, Invent. Math. **218** (2019), 573–621.

[26] H. Wei and K. Matsuzaki, *Beurling–Ahlfors extension by heat kernel,* A_∞*-weights for VMO, and vanishing Carleson measures*, Bull. London Math. Soc. **53** (2021), 723–739.

[27] H. Wei and K. Matsuzaki, *The p-Weil–Petersson Teichmüller space and the quasiconformal extension of curves*, J. Geom. Anal. **32** (2022), 213.

[28] H. Wei and K. Matsuzaki, *BMO embeddings, chord-arc curves, and Riemann mapping parametrization*, Adv. Math. **417** (2023), 108933.

[29] H. Wei and K. Matsuzaki, *The p-integrable Teichmüller space for* $p \geqslant 1$, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **99** (2023), 37–42. arXiv:2210.04720.

[30] H. Wei and K. Matsuzaki, *Parametrization of the p-Weil–Petersson curves: holomorphic dependence*, J. Geom. Anal. **33** (2023), 292.

[31] K. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces*, Math. Surveys Mono. 138, Amer. Math. Soc., 2007.