# Koopman operators on Orlicz-Morrey spaces


一橋大学・大学院経済学研究科・川澄亮太 [*],
理化学研究所・革新知能統合研究センター・池田正弘 [†],
愛媛大学・データサイエンスセンター・石川勲 [‡]

Ryota Kawasumi,
Graduate School of Economics, Hitotsubashi University,
2-1 Naka, Kunitachi, 186-8601, Tokyo, Japan.
Masahiro Ikeda,
Center for Advanced Intelligence Project, RIKEN,
1-4-1 Nihonbashi, Chuo, 103-0027, Tokyo, Japan.
Isao Ishikawa,
Center for Data Science, Ehime University,
2-5, Bunkyo-cho, Matsuyama, 790-8577, Ehime, Japan.



Mathematics Subject Classification 2020 : 46E30,42B35,42B20,42B25.
Keywords : Koopman operator, Boundedness, Orlicz-Morrey space.



**Abstract**

本研究では，Orlicz-Morrey 空間上での Koopman 作用素の特徴づけを与えることを目標にする．そこで，先行研究である波多野氏らの Morrey 空間上での Koopman 作用素で得られた結果を述べ，Orlicz-Morrey 空間に拡張できるかを考える．今回は，Orlicz-Morrey 空間上での有界性の十分条件を求めることができたので，本稿にて予報として報告する．


## 1 はじめに

$n \in \mathbb{N}$ とする．$L^0(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数全体の空間，$\psi$ を可測写像とする．特に，任意の零集合の逆像が再び零集合となる写像を nonsingular と呼び，以降は $\psi$ はすべて，nonsingular な可測写像とする．

Koopman 作用素 $C_\psi$ とは任意の $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ に対して $C_\psi f \equiv f \circ \psi$ (すなわち，$f$ と $\psi$ の合成) で定義する線形作用素である．Koopman 作用素は，B.O. Koopman 氏らによってハミルトン力学系に対して作用素のスペクトルに基づいた状態の時間発展を特徴付けることが示された [10, 11]．以降，力学系に関しての性質は Koopman 作用素を用いて多くの解析がなされてきた．また近年では機械学習にも Koopman 作用素が取り扱われてきた．(例えば， [1, 8] など)．Koopman 作用素 (特に力学系) を扱う利点は，(直接導くことが困難な) 系の特性に取り扱いやすい関数空間を導入し，その関数空間に作用する線形作用素から解析し，系の特性へ帰着する点にある [14, 15]．そして，Koopman 作用素の有界性の特徴づけを与えることは，系の出力が扱う空


[*] E-mail address: **a241010y@r.hit-u.ac.jp** or **rykawasumi@gmail.com**
[†] E-mail address: **masahiro.ikeda@riken.jp**
[‡] E-mail address: **ishikawa.isao.zx@ehime-u.ac.jp**

間内に存在するかを考える際に有効である．さらに，広い空間であればあるほど多くの系で扱うことが可能になると考えられるため，Lebesgue 空間 [13] をはじめとする様々な関数空間上の研究 (例えば，[2, 3, 4, 6, 7]) は力学系の研究への応用が期待される．そこで，本稿では，Morrey 空間をさらに一般化した Orlicz-Morrey 空間について取り上げる．

本稿の構成は以下の通りである．2 章では，Lebesgue 空間および Morrey 空間上での Koopman 作用素の有界性の結果について述べる．3 章では Orlicz-Morrey 空間についての定義を述べ，4 章で Orlicz-Morrey 空間上での Koopman 作用素の有界性の主結果を与える．5 章では主結果の証明を行い，最後の 6 章で Orlicz-Morrey 空間上での Koopman 作用素の有界性に関する今後課題について言及する．

以降，集合 $A$ に対しての特性関数を $\chi_A$ と定義する．すなわち $x \in A$ の場合は $\chi_A(x) = 1$, $x \notin A$ の場合は $\chi_A(x) = 0$ とする．また，$C > 0$ を正の定数として $f \le Cg$ を $f \lesssim g$ と明記する．

## 2 Lebesgue 空間および Morrey 空間上での結果

ここでは，Lebesgue 空間および Morrey 空間上での Koopman 作用素の有界性の結果について述べる．まず Lebesgue 空間上での Koopman 作用素の有界性の結果について述べる．以降，指数 $p > 0$ に関する Lebesgue 空間を $L^p(\mathbb{R}^n)$ と記載する．

**Proposition 2.1** ([13])**.** $C_\psi$ が $L^p(\mathbb{R}^n)$( ただし $p > 0$) 上で有界であることと，ある定数 $K > 0$ が存在して任意の可測集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して $|\psi^{-1}(A)| \le K|A|$ が成り立つことは必要十分である．

*Proof.* 必要性については，$f = \chi_A$ としてノルム不等式 $\|C_\psi f\|_{L^p} \le K\|f\|_{L^p}$ を評価することにより $|\psi^{-1}(A)| \le K|A|$ が導かれる．

十分性については，分布等式を用いた方法 ([2] の証明で使われた方法) で示す．すると以下のように評価できる．

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |C_\psi f(x)|^p dx &= p\int_0^\infty t^{p-1}|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(\psi(x))| > t\}|dt \\
&= p\int_0^\infty t^{p-1}|\psi^{-1}(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\})|dt \\
&\le pK\int_0^\infty t^{p-1}|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}|dt \\
&\le K\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx.
\end{aligned}$$

□

**Remark 2.2.** 文献 [13] では十分性の証明は，Radon-Nikodym の微分を用いている．

次に Morrey 空間について定義する．以降，可測集合 $A$ の測度を $|A|$，$B(a, r)$ を中心 $a \in \mathbb{R}^n$, 半径 $r > 0$ の開球とする．

**Definition 2.3** (Morrey 空間)**.** $0 < q \le p < \infty$ とする．Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ を

$$\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \equiv \{f \in L^0(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{M}^p_q} < \infty\}$$

と定義し，ノルムは以下の通りである．

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \equiv \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a, r)|^{1/p-1/q} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^q dx\right)^{1/q},$$

ただし，球上で積分平均をして球上の中心および半径で上限をとった．特に $p = q$ の場合は，$\mathcal{M}_p^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ となる．

**Remark 2.4.** 文献 [7] では Morrey ノルムの定義として立方体が用いられている．しかし，以下の関係式が成り立つため Morrey ノルムの定義に球上を用いてもノルム同値となるため，同じようにノルム評価しても問題ない．

$$B(a,r) \subset Q(a,r) \subset B(a,\sqrt{n}r).$$

ここで，$Q(a,r)$ を中心 $a \in \mathbb{R}^n$，長さ $r > 0$ の立方体とした．すなわち， $a = (a_1,\dots,a_n)$, $x = (x_1,\dots,x_n)$ として以下のように定義した．

$$Q(a,r) \equiv \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \max_{i=1,\dots,n} |x_i - a_i| < r\}$$

以下，Morrey 空間上での Koopman 作用素上での先行結果を述べる．

その前に Lipschitz 条件およびヤコビ行列を導入する．

**Definition 2.5** (Lipschitz 条件)**.** $\psi$ が Lipschitz 条件を満たすとは，ある $L > 0$ に対して任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して以下の不等式が成り立つことと定義する．

$$|\psi(x) - \psi(y)| \le L|x-y|.$$

**Definition 2.6** (ヤコビ行列)**.** $\psi$ が 1 回微分可能な写像で，$\psi = (\psi_1,\dots,\psi_n)^T$ とするとヤコビ行列 $D\psi$ を以下のように定義する．

$$D\psi \equiv \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}\right)_{1\le i\le j\le n}.$$

**Proposition 2.7** ([7])**.** $0 < q \le p < \infty$ とする．もし，$\psi$ がある定数 $K > 0$ が存在して任意の可測集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して $|\psi^{-1}(A)| \le K|A|$ かつ *Lipschitz* 条件を満たすならば，*Koopman* 作用素は $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ 上で有界である．

**Remark 2.8.** 上記の命題の証明は，$L^q$ 空間上での Koopman 作用素の有界性を使用して示すことができる．また，Lipschitz 条件を使用しているのは，Morrrey 空間のノルムで定義したときの積分平均が起因していると考えられる．

**Proposition 2.9** ([7])**.** $0 < q \le p < \infty$ とする．$\psi$ は $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ 上で有界な微分同相写像とする．そのとき，ある定数 $K > 0$ が存在して任意の $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ に対して以下の不等式が成り立つ．

$$\|f(D\psi(x_0)\cdot)\|_{\mathcal{M}_q^p} \le K\|f\|_{\mathcal{M}_q^p}.$$

**Remark 2.10.** 上記の命題の証明は，ノルム不等式 $\|f\|_{L^p} \le \|f\|_{\mathcal{M}_q^p}$ が成り立つことと $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上の稠密性を使用して証明している．

本稿では，上記の 2 つの命題 (Proposition 2.7 および Proposition 2.9) に関して Morrey 空間から Orlicz-Morrey 空間へ拡張ができるか検討をしていく．

## 3　Orlicz-Morrey 空間 $\mathcal{M}_\Phi^\varphi(\mathbb{R}^n)$ の定義

Orlicz-Morrey 空間の定義に入る前に Young 関数 $\Phi$ および関数 $\varphi$ のクラスについての定義を述べる．

**Definition 3.1** (Young 関数)**.** $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ が Young 関数とは，$\Phi(0)=0$, $\lim_{t\to\infty}\Phi(t)=\infty$ で凸を満たす増加関数と定義する．

Young 関数の例として $\Phi(t)=t^p$(ただし $p \geq 1$)，$\exp(t)-t-1$，$t\log(e+t)$ などが挙げられる．

**Definition 3.2.** (i) $\mathcal{G}_1^{\mathrm{dec}}$ は以下の条件を満たす関数 $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ 全体の集合である．ある定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して，任意の $r, s \in (0,\infty)$ について以下の不等式が成り立つ．

$$C_1\varphi(r) \geq \varphi(s), \quad \text{ただし} \quad r < s, \tag{1}$$

$$\varphi(rs) \leq C_2\varphi(r)\varphi(s). \tag{2}$$

(ii) $\mathcal{G}_2^{\mathrm{dec}}$ は以下の条件を満たす関数 $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ 全体の集合である．ある定数 $C_3 > 0$ が存在して，任意の $r \in (0,\infty)$ について以下の不等式が成り立つ

$$\varphi\left(\frac{1}{r}\right) \leq C_3\frac{1}{\varphi(r)}.$$

以降，特に断りがない場合，$\Phi$ は Young 関数，$\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ を単調減少関数とする．

さて，Orlicz-Morrey 空間を定義する．ここでの Orlicz-Morrey 空間とは，澤野嘉宏氏ら [12] の定義に基づく空間とする．

**Definition 3.3** (Orlicz-Morrey 空間)**.** Orlicz-Morrey 空間 $\mathcal{M}_\Phi^\varphi(\mathbb{R}^n)$ とは

$$\mathcal{M}_\Phi^\varphi(\mathbb{R}^n) \equiv \{f \in L^0(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{M}_\Phi^\varphi} < \infty\}$$

で定義する．ただし

$$\|f\|_{\Phi,B(a,r)} \equiv \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)dx \leq 1\right\}.$$

とおきノルムを

$$\|f\|_{\mathcal{M}_\Phi^\varphi} \equiv \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0}\frac{1}{\varphi(r)}\|f\|_{\Phi,B(a,r)}$$

とした．

Orlicz-Morrey 空間は様々な関数空間を含むことが知られているので，以下に $\varphi$，$\Phi$ に具体的な関数を導入し主要な関数空間の例を述べる．

**Remark 3.4.** (i) $\varphi(r)=r^{-n/p}$ の場合，$\mathcal{M}_\Phi^\varphi(\mathbb{R}^n)$ は $\mathcal{M}_\Phi^p(\mathbb{R}^n)$(例えば，[5] に基づく定義) になる．具体的には，以下のノルムが有限となる $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ 全体の集合である．

$$\|f\|_{\mathcal{M}_\Phi^p} \equiv \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{n/p}\inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)dx \leq 1\right\}.$$

(ii) $\Phi = t^q$(ただし $q \geq 1$) の場合は，$\mathcal{M}_\Phi^\varphi(\mathbb{R}^n)$ は一般的な Morrey 空間 $\mathcal{M}_q^\varphi(\mathbb{R}^n)$ となる．具体的には，以下のノルムが有限となる $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ 全体の集合である．

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^\varphi} \equiv \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0}\frac{1}{\varphi(r)}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(x)|^q dx\right)^{1/q}.$$

(iii) $\Phi(t)=t^q$, $\varphi(r)=r^{-n/q}$ の場合は，$\mathcal{M}_\Phi^\varphi(\mathbb{R}^n)$ は Morrey 空間 $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ となり，特に $p=q$ の場合は $L^p(\mathbb{R}^n)$ 空間となる．

# 4 主定理

まずは Koopman 作用素の有界性の十分性について述べる．

**Theorem 4.1.** $\varphi \in \mathcal{G}_1^{\mathrm{dec}}$ および $\psi$ は *Lipschitz* 条件を満たすとする．ある $K>0$ が存在して任意の可測集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して以下の不等式が成り立つと仮定する．

$$|\psi^{-1}(A)| \le K|A|.$$

そのとき，任意の $f \in \mathcal{M}_\Phi^\varphi(\mathbb{R}^n)$ に対して以下のノルム不等式が成り立つ．

$$\|C_\psi f\|_{\mathcal{M}_\Phi^\varphi} \lesssim K \|f\|_{\mathcal{M}_\Phi^\varphi} . \tag{3}$$

次に，ヤコビ行列を含む Koopman 作用素の有界について述べる．

**Theorem 4.2.** $\varphi \in \mathcal{G}_2^{\mathrm{dec}}$ で，任意の $r>0,\ t \ge 1$ で $\Phi(t) \lesssim t^p$ で $r^{-n/p} \lesssim \varphi(r)$ が成り立つと仮定する．また，任意の $f \in \mathcal{M}_\Phi^\varphi(\mathbb{R}^n)$ に対して $\|C_\psi f\|_{\mathcal{M}_\Phi^\varphi} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}_\Phi^\varphi}$ も仮定するとき，ある定数 $K>0$ が存在して任意の $x_0 \in \mathbb{R}^n$，$f \in \mathcal{M}_\Phi^\varphi(\mathbb{R}^n)$ に対して以下の不等式が成り立つ．

$$\|f(D\psi(x_0)\cdot)\|_{\mathcal{M}_\Phi^\varphi} \lesssim K \|f\|_{\mathcal{M}_\Phi^\varphi} . \tag{4}$$

**Remark 4.3.** Theorem 4.2 の証明の方針は $f$ がコンパクトサポートをもつ連続関数の場合に (4) を求め，次に $f$ がコンパクトサポートをもつ有界関数の場合に (4) を求め，最後に $f \in \mathcal{M}_\Phi^\varphi(\mathbb{R}^n)$ の場合に (4) を示す．詳細は，投稿予定の論文 [9] を参照してください．

# 5 Theorem 4.1 の証明

Theorem 4.1 の証明をする前に以下の命題を与える．

**Proposition 5.1** ([4])**.** ある定数 $K>0$ に対して，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|)dx < \infty$ を満たす任意の可測関数 $f$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|C_\psi f(x)|)dx \le K \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(x)|)dx \tag{5}$$

が成り立つことと任意の可測集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$|\psi^{-1}(A)| \le K|A|$$

が成り立つことは必要十分である．

Theorem 4.1 の証明. $\varphi \in \mathcal{G}_1^{\mathrm{dec}}$，$B_0 = B(a,r)$ とおく．$x, y \in B_0$ と固定する．すると $\psi(B_0)$ の直径 $\mathrm{diam}(\psi(B_0))$ は，Lipschitz 条件を満たすことで以下のようになる．

$$\mathrm{diam}(\psi(B_0)) \equiv \sup_{x,y \in B_0} |\psi(x) - \psi(y)| \le L \sup_{x,y\in B_0} |x-y| \le 2Lr$$

すなわち，

$$B_1 \supset \psi(B_0) \quad \text{and} \quad |B_1| = L^n |B_0|$$

を満たすような開球 $B_1 \equiv B(\psi(a), Lr)$ が存在する．(5) を満足する $K > 1$ を持ってくる．そこで，$M = \max(1, L^n)$ と置くと Proposition 5.1 を用いると，以下の評価が得られる．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B_0|}\int_{B_0} \Phi\left(\frac{|C_\psi(x)|}{KM\,\|f\|_{\Phi,B_1}}\right)dx \\
&\le \frac{1}{|B_0|}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(\psi(x))|\chi_{\psi(B_0)}(\psi(x))}{KM\,\|f\|_{\Phi,B_1}}\right)dx \\
&\le \frac{1}{|B_0|}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|\chi_{B_1}(x)}{M\,\|f\|_{\Phi,B_1}}\right)dx \\
&\le \frac{L^n}{|B_1|}\int_{B_1} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{M\,\|f\|_{\Phi,B_1}}\right)dx \\
&\le \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi,B_1}}\right)dx \le 1.
\end{aligned}$$

つまり $\|C_\psi f\|_{\Phi,B_0} \lesssim K\|f\|_{\Phi,B_1}$ が成り立つので両辺に関数 $\varphi \in \mathcal{G}_1^{\mathrm{dec}}$ をかけると以下の通りになる．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi(r)}\|C_\psi f\|_{\Phi,B_0} &\le \frac{\varphi(Lr)}{\varphi(r)}\frac{1}{\varphi(Lr)}KM\,\|f\|_{\Phi,B_1} \\
&\le K(C_1 + C_2\varphi(L)L^n)\,\|f\|_{\mathcal{M}_\Phi^\varphi}.
\end{aligned}$$

以上より求めたい不等式 (3) が得られた． □

## 6 今後の課題

Morrey 空間 $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ に関して以下の命題が成り立つことが知られている．

**Theorem 6.1** ([7])**.** *$n \in \mathbb{N}$ で $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が微分同相写像，つまり $\psi$, $\psi^{-1}$ がそれぞれ微分可能であるとする．$0 < q < p < \infty$ または $q = p$ かつ $n = 1$ と仮定する．もし $C_\psi, C_\psi^{-1}$ が Morrey 空間上で有界ならば，$\psi$ および $\psi^{-1}$ は Lipschitz である．*

そして，上記の命題を Orlicz-Morrey 空間へ拡張すると以下のように成り立つことが予想される．

**予想：**$n \in \mathbb{N}$ で $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が微分同相写像とする．$\varphi \in \mathcal{G}_2^{\mathrm{dec}}$ で，任意の $r > 0$, $t \ge 1$ で $\Phi(t) \lesssim t^p$ かつ $r^{-n/p} \lesssim \varphi(r)$ が成り立つと仮定する．もし $C_\psi, C_\psi^{-1}$ が Orlicz-Morrey 空間上で有界ならば，$\psi$ および $\psi^{-1}$ は Lipschitz である．

この予想を証明するには，Morrey 空間に関しては特異値分解の手法を用いた以下の命題が重要になる．

**Proposition 6.2** ([7])**.** *$0 < p \le q < \infty$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ とし，$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が微分同相写像とする．もし $C_\psi, C_\psi^{-1}$ が Morrey 空間上で有界ならば，*

$$\prod_{k=1}^n \alpha_k(x_0) \sim 1,$$

*ただし，$\alpha_1(x_0), \ldots, \alpha_n(x_0)$ は $D\psi(x_0)$ の特異値である．*

この命題を Morrey 空間から Orlicz-Morrey 空間へ拡張して上記の命題が成り立ちかつ $C_\psi, C_\psi^{-1}$ が Orlicz-Morrey 空間上で有界であるような関数 $f \in \mathcal{M}_\Phi^\varphi(\mathbb{R}^n)$ を与えれば，上記の予想が成立する．しかし，予想を導くためには，Orlcz-Morrey 空間内に現れる減少関数 $\varphi$ および Young 関数 $\Phi$ がどのような特徴をもつ関数であれば成り立つのかを考える必要がある．

## 謝辞

発表の機会および会場の提供をして頂いた京都大学に深く感謝いたします．また，研究集会の運営をして頂いた中央大学の澤野嘉宏氏および防衛大学校の瀬戸道夫氏にも感謝いたします．

## References

[1] Y. Enoch, S. Kundu, and N. Hodas, Learning deep neural network representations for Koopman operators of nonlinear dynamical systems, In 2019 American Control Conference (ACC), IEEE, 2019, 4832-4839.

[2] S. C. Arora, G. Datt, and S. Verma, Composition operators on Lorentz spaces, Bull. Aust. Math. Soc. 76(2), (2007), 205–214.

[3] G. Bourdaud, and W. Sickel, Changes of variable in Besov spaces, Math. Nachr. 198 (1999), 19–39.

[4] Y. Cui, H. Hudzik, R. Kumar, and L. Maligranda, Composition operators in Orlicz spaces. J. Aust. Math. Soc, 76(2), (2004), 189–206.

[5] T. Iida, Orlicz-fractional maximal operators in Morrey and Orlicz–Morrey spaces, Positivity, 25(1), (2021), 243-272.

[6] M. Ikeda, I. Ishikawa, and K. Taniguchi, Boundedness of composition operators on higher order Besov spaces in one dimension, Math. Ann. (2023), 1–24.

[7] N. Hatano, M. Ikeda, I. Ishikawa, and Y. Sawano, Boundedness of composition operators on Morrey spaces and weak Morrey spaces. J. Inequal. Appl, No. 69, (2021), 1–15.

[8] Y. Hashimoto, I. Ishikawa, M. Ikeda, and Y. Matsuo, and Y. Kawahara, Krylov subspace method for nonlinear dynamical systems with random noise, The Journal of Machine Learning Research, 21(1), (2020), 6954-6982.

[9] R. Kawasumi, M. Ikeda, and I. Ishikawa, Boundedness of compositon operators on Orlicz-Morrey spaces, in preparation

[10] B. O. Koopman, Hamiltonian systems and transformation in Hilbert space. Proceedings of the National Academy of Sciences, 17(5), (1931), 315-318.

[11] B. O. Koopman, and J. V. Neumann, Dynamical systems of continuous spectra. Proceedings of the National Academy of Sciences, 18(3), (1932), 255-263.

[12] Y. Sawano, S. Sugano, and H. Tanaka, Orlicz-Morrey spaces and fractional operators. Potential Anal. 36, (2012), 517–556.

[13] R. K. Singh, Composition operators induced by rational functions, Proc. Am. Math. Soc. 59(2), (1976), 329–333 .

[14] 薄 良彦，非線形システムのクープマン作用素—最近の研究から，システム／制御／情報, 65(8), (2021), 324-329.

[15] 薄 良彦，力学系のクープマン作用素: 入門と制御への応用, ながれ 41,（2022）, 342 – 347.