Oppenheim-Schur の不等式と RKHS

山田 陽 *

概要

2012 年に Aronszajn 流の再生核の手法で半正定値行列に関して Oppenheim の不等式の等号条件を得た. ここではその続きとしてブロック行列版 Oppenheim-Schur 不等式の再生核的証明と, 正定値の場合にその等号条件を得たことについて報告する.

1 導入

$M_{m,n}(V)$ を複素ベクトル空間 V の元を要素とする $m \times n$ 行列とする. $M_{m,n}(\mathbb{C})$ は $M_{m,n}$, また $M_{n,n}$ は M_n と略記し, M_n^+ を M_n の半正定値行列からなる部分集合とする. 行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_n^+$ の *Hadamard* **積**は $(a_{ij}b_{ij}) \in M_n$ で定義され, これを $A \circ B$ で表す. このとき Schur の積定理により $A \circ B \in M_n^+$ であるが, 次の事実はよく知られている.

定理 1.1 (e.g. [9])**.** 次の不等式が成り立つ.

(i) *Hadamard* の不等式*:*

$$|A| \leq a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}. \tag{1}$$

(ii) *Oppenheim* の不等式*:*

$$|A \circ B| \geq |A| b_{11} \cdots b_{nn}. \tag{2}$$

(iii) *Oppenheim-Schur* の不等式*:*

$$|A \circ B| + |A||B| \geq |A| b_{11} \cdots b_{nn} + |B| a_{11} \cdots a_{nn}. \tag{3}$$

$B = I$ とすると (2) $\Longrightarrow$ (1) であり, また (3)+(1) $\Longrightarrow$ (2) が分かる.

注意. Oppenheim が論文 [9] の中で述べているが, Pólya が Oppenheim の不等式を Schur に伝えたところ, それを Schur が改良してできた不等式が Oppenheim-Schur の不等式だそうだ.

筆者は論文 [14] の続きとして, 包含空間が Hilbert 空間の直和になる場合に, Schwartz 流の再生核理論を用いて Oppenheim-Schur の不等式のブロック行列への拡張及びその等号条件を得た [15]. 本稿では行列式を再生核流に扱うための概念構成等のおおまかな流れについて説明したいと思う. 証明の多くは省略するが, 等号条件の本質的部分である初等的不等式については記載した.

* Akira Yamada, E-mail: yamada@u-gakugei.ac.jp

2 内積補間問題と RKHS

RKHS における内積に関する補間問題を用いると, 行列に関する Oppenheim の不等式や Oppenheim-Schur の不等式 [9] 等の簡単な証明と等号条件, 及びそのブロック行列への拡張が得られる (cf. [14], [16]). そのために少し準備する.

通常の $n \times n$ 半正定値行列は $\mathbb{C}^n$ 上の再生核空間 (*reproducing kernel Hilbert space, RKHS*) の再生核として取り扱うことができるが, ブロック行列に対しては包含空間が有限次元の Hilbert 空間の直和であるような再生核空間 (Hilbert 型 RKHS) を考える必要がある. そのため, 先ず Schwartz の再生核理論 [12] を復習する.

Hilbert 空間の内積及び共役空間の概念と適合させるために, 局所凸空間 C の連続反線形汎函数全体の空間を C の**反双対** *(antidual)* と言い C^* で表す. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ では Riesz の表現定理より $\mathcal{H}^*$ を $\mathcal{H}$ と同一視できる. $C \times C^*$ 上の**標準的反双対** *(canonical anti-duality)* $\langle C, C^* \rangle$ を (**半双線形形式** *(sesquilinear form)*, i.e., 第一変数に関して線形, 第二変数に関して反線形) の形で内積のように

$$\overline{y(x)} = \langle x, y \rangle_{C,C^*}, \quad x \in C,\ y \in C^*$$

と表す. C を準完備な Hausdorff 局所凸空間で, C^* には反双対対 $\langle C, C^* \rangle$ に関する弱位相 $\sigma(C^*, C)$ を入れる. C の線形部分空間である Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に対して包含作用素 $i\colon \mathcal{H} \hookrightarrow C$ が連続なとき, $\mathcal{H}$ を *C-RKHS* と言い, $ii^* \in \mathcal{L}(C^*, C)$ を $\mathcal{H}$ の**再生核**または *Schwartz* **再生核**, C を $\mathcal{H}$ の**包含空間**と言う. 包含空間が Hilbert 空間であるような RKHS を *Hilbert* **型** *RKHS* と言う. $i^*\colon C^* \to \mathcal{H}$ だから $\operatorname{ran} ii^* \subset \mathcal{H}$ であることに注意する. C-RKHS の再生核 $k \in \mathcal{L}(C^*, C)$ は次の再生性を持つ: $\forall x \in \mathcal{H}$, $\forall c \in C$,

$$\langle x, kc \rangle_{\mathcal{H}} = \langle x, c \rangle_{C,C^*}. \tag{4}$$

再生性より $\|kc\|^2 = \langle kc, c \rangle_{C,C^*}$ であるから,

$$\langle kc, c \rangle_{C,C^*} \geq 0, \quad \forall c \in C^*$$

が成り立つ. これを再生核 k は**正値**であると言い, $k \geq 0$ と表す. Schwartz [12] により, 逆に $k \in \mathcal{L}^+(C^*, C)$ (i.e. k は正値) ならば k を再生核にもつ C-RKHS $\mathcal{H}$ が唯一つ存在する. 正値核 $k \in \mathcal{L}^+(C^*, C)$ に対して k を再生核にもつ C-RKHS を $\mathcal{H}_k$ と表す.

定義 2.1. $\mathcal{H}$ は Hilbert 空間, C は線形空間とする. 線形写像 $A\colon \mathcal{H} \to C$ に対して, $\ker A$ が閉ならば線形写像 $A\colon \mathcal{H} \to \operatorname{ran} A$ が余等長 (i.e. $A|_{(\ker A)^\perp}$ が等長作用素) になるような A の像 $\operatorname{ran} A = A(\mathcal{H})$ の上の Hilbert 空間構造が一意的に定まる. この Hilbert 空間を $\mathcal{M}(A)$ で表し, 作用素 A の**作用素域** *(operator range)* という. また $\mathcal{M}(A)$ のノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{M}(A)}$ を A の**値域ノルム** *(range norm)* という.

作用素域の定義より, $f, g \in \mathcal{H}$ のどちらか一方が $(\ker A)^\perp$ に属せば,

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \langle Af, Ag \rangle_{\mathcal{M}(A)}$$

であることに注意する.

定義 2.2 (再生核空間の像)**.** 弱連続作用素 $T \in \mathcal{L}(C, D)$ による C-RKHS $\mathcal{H}$ の作用素域 $\mathcal{M}(T|_{\mathcal{H}})$ を T による $\mathcal{H}$ の**像** *(image)* または**像再生核空間** *(image RKHS)* といい $T_*\mathcal{H}$ と表す.

次の定理は Aronszajn [2] の定義した古典的再生核理論における**積分変換**に対応するものである. 古典的な積分変換の理論 (cf. Saitoh [11, p. 83, Theorem 3.2]) では Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ への任意の**特徴写像** *(feature map)* $\phi\colon E \to \mathcal{H}$ から集合 E 上の RKHS $\{f\colon f(x) = \langle f, \phi(x)\rangle,\ x \in E\}$ とその再生核 k が, $k(x, y) = \langle \phi(y), \phi(x)\rangle$, として簡単に得られる. 一方 Schwartz 流再生核理論では任意の C-RKHS $\mathcal{H}$ と局所凸空間 D に対して連続作用素 $T\colon C \to D$ から, $\mathcal{H}$ の像として像再生核空間 D-RKHS $T_*\mathcal{H}$ とその再生核 TkT^* が得られる.

定理 2.3 ([12, Proposition 21])**.** *C, D は準完備 Hausdorff 局所凸空間, $\mathcal{H}$ は C-RKHS で再生核 k をもつとする. 弱連続作用素 $T \in \mathcal{L}(C, D)$ による C-RKHS $\mathcal{H}$ の像 $T_*\mathcal{H}$ は D-RKHS で再生核 TkT^* をもつ. $\forall x \in T_*\mathcal{H}$ のノルムは次の等式を満たす.*

$$\|x\|_{T_*\mathcal{H}} = \inf\{\|y\|_{\mathcal{H}}\colon Ty = x,\ y \in \mathcal{H}\}.$$

制限 $T|_{\mathcal{H}}\colon \mathcal{H} \to T_*\mathcal{H}$ は余等長であり,

$$\|Tx\|_{T_*\mathcal{H}} = \|x\|_{\mathcal{H}} \iff x \in (\ker T)^{\perp}.$$

特に, $T|_{\mathcal{H}}$ が単射ならば $\mathcal{H}$ と $T_*\mathcal{H}$ は等長同型である.

再生核の像は一般に再生核空間の中で稠密であるが, 再生核空間と一致するための条件は包含空間が局所凸の場合に Schwartz [12, Proposition 7 bis] が一般的に示している. 特に Hilbert 型再生核空間の場合には, そのような条件として閉値域定理と同値な多数の条件があるが, ここではその内の一部を挙げる. 以下の補題の条件 (v) が同値なことは [3] にある. 条件 (iii) は再生核の像空間と再生核空間が一致する条件と見做せて, Hilbert 型 RKHS では重要な意味をもつ.

補題 2.4. *$\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ は Hilbert 空間で $A \in \mathcal{L}(H, K)$ のとき, 次は同値.*

(i) $\operatorname{ran} A$ は閉.
(ii) $\operatorname{ran} A^*$ は閉.
(iii) $\operatorname{ran} A = \operatorname{ran} AA^*$.
(iv) $\operatorname{ran} AA^*$ は閉.
(v) $\exists X \in \mathcal{L}(K, H)$ *s.t.* $AXA = A$.

次の補題は Hilbert 型 RKHS の再生核 A が閉値域を持つとき, 内積が簡単な表示を持つことを意味する. 証明は補題 2.4 より容易である.

補題 2.5. *C は Hilbert 空間で $A \in \mathcal{L}^+(C)$ は閉値域をもつと仮定する. このとき, C-RKHS $\mathcal{H}_A$*

はベクトル空間として $\mathcal{H}_A = \operatorname{ran} A$. $\mathcal{H}_A$ の内積は次で与えられる: $\forall x, y \in C$,

$$\langle Ax, Ay \rangle_{\mathcal{H}_A} = \langle Ax, y \rangle_C = \langle x, Ay \rangle_C$$

C が有限次元 Hilbert 空間であれば $A \in \mathcal{L}^+(C)$ は閉値域をもつので補題の系として次の命題を得る (cf. [14, Proposition 2.1]).

命題 2.6. *n 次半正定値行列 $A = (a_{ij}) = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \dots\ \boldsymbol{a}_n)$ を再生核とする集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上の RKHS $\mathcal{H}_A$ は, 列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ の張る $\mathbb{C}^n$ の部分空間 $\operatorname{ran} A$ に, 次の内積を与えたものである:*

$$\langle Ax, Ay \rangle_{\mathcal{H}_A} = \langle Ax, y \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle x, Ay \rangle_{\mathbb{C}^n}.$$

特に, $\dim \mathcal{H}_A = \operatorname{rank} A$. また点 i における再生核は行列 A の第 i 列 $\boldsymbol{a}_i$ であり, $\langle \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_i \rangle = a_{ij}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ が成り立つ, i.e. 行列 A は RKHS $\mathcal{H}_A$ の再生核 $\boldsymbol{a}_i$ に関する Gram 行列 $G(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ と一致する.

次の補題は包含空間が有限次元の Hilbert 型 RKHS においては, 和のノルム不等式の等号条件が通常より簡単な形で得られることを意味する.

補題 2.7. *C は Hilbert 空間で $A, B \in \mathcal{L}^+(C)$ とする. このとき次が成り立つ.*

(i) ベクトル空間として $\mathcal{H}_{A+B} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_B$ であり, $\forall f \in \mathcal{H}_A$, $\forall g \in \mathcal{H}_B$ に対して

$$\|f + g\|^2_{\mathcal{H}_{A+B}} \le \|f\|^2_{\mathcal{H}_A} + \|g\|^2_{\mathcal{H}_B}. \tag{5}$$

等号 $\iff \langle f, h \rangle_{\mathcal{H}_A} = \langle g, h \rangle_{\mathcal{H}_B}$, $\forall h \in \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_B$.

(ii) C が有限次元ならば $\operatorname{ran}(A + B) = \operatorname{ran} A + \operatorname{ran} B$ である. また不等式 (5) で等号が成り立つ $\iff \exists z \in C$ *s.t.* $f = Az$ かつ $g = Bz$.

古典的な積分変換の理論を用いると Hilbert 空間における内積に関する補間問題の解に関する結果が容易に得られる.

定理 2.8. *Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の任意の点列 $\{a_i\}_{i=1}^n$ の Gram 行列を $G = (\langle a_j, a_i \rangle) \in M_n$ とする. $b = (b_j) \in \mathbb{C}^n$ が与えられた時, $f \in \mathcal{H}$ に関する補間問題*

$$\langle f, a_i \rangle = b_i, \quad i = 1, \dots, n \tag{6}$$

に関して次が成り立つ.

(i) (6) の解 $f \in \mathcal{H}$ が存在するようなベクトル $b \in \mathbb{C}^n$ 全体の集合は集合 $\{1, \dots, n\}$ 上の RKHS $\mathcal{H}_G$ をなし, その再生核は行列 G である. ベクトル空間として $\mathcal{H}_G = \operatorname{ran} G$.

(ii) $\mathcal{H}_G$ のノルムは作用素 $f \in \mathcal{H} \mapsto (\langle f, a_i \rangle) \in \mathbb{C}^n$ の値域ノルムである: $\forall b \in \mathcal{H}_G$,

$$\|b\|_{\mathcal{H}_G} = \inf\{\|f\| \colon \langle f, a_i \rangle = b_i,\ i = 1, \dots, n\}.$$

(iii) $b=(b_i)$ に関する補間問題 (6) の解 $f\in\mathcal{H}$ が存在するとき, 最小ノルム解は一意的に存在する. 解 f が最小ノルム解 $\iff$ $f\in\operatorname{span}\{a_i\}_{i=1}^n$. これを f_n とすると, 行列 G の *Moore-Penrose* 逆行列を $G^+=(G_{ij}^+)\in M_n$ としたとき, 次が成り立つ:

$$\|f_n\|^2=\sum_{i,j=1}^n G_{ij}^+\bar{b}_i b_j.$$

点列 $\{a_i\}$ が線形独立の場合, 行列式を用いた最小ノルム解の具体的表示が得られる.

定理 2.9 (cf. [1, p. 13], [14])**.** $\{a_i\}_{i=1}^n$ は *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ の線型独立な部分集合とする. このとき, 任意の $(b_i)_{i=1}^n\in\mathbb{C}^n$ に対し, 補間問題 (6) を満たす $f\in\mathcal{H}$ でノルムが最小のもの f_n がただ一つ存在し, $\{a_i\}_{i=1}^n$ の *Gram* 行列を $G_n=G(a_1,\dots,a_n)$, その行列式を $|G_n|$ とすると次が成り立つ:

$$f_n=-\frac{1}{|G_n|}\begin{vmatrix}0 & a_1 & \cdots & a_n\\ b_1 & \langle a_1,a_1\rangle & \cdots & \langle a_n,a_1\rangle\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_n & \langle a_1,a_n\rangle & \cdots & \langle a_n,a_n\rangle\end{vmatrix},$$

$$\|f_n\|^2=-\frac{1}{|G_n|}\begin{vmatrix}0 & \bar{b}_1 & \cdots & \bar{b}_n\\ b_1 & \langle a_1,a_1\rangle & \cdots & \langle a_n,a_1\rangle\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_n & \langle a_1,a_n\rangle & \cdots & \langle a_n,a_n\rangle\end{vmatrix}.$$

我々の正定値行列の行列式不等式への応用のためには, 以下 $\{a_i\}\subset\mathcal{H}$ が線形独立で,

$$b_1=\cdots=b_{n-1}=0,\ b_n=1$$

とした場合の補間問題 (6) を考えることになる. その最小ノルム解を f_n, 最小ノルムを $\lambda_n=\|f_n\|$ とする. 定理 2.9 より, この場合に得られる最小ノルム解の点列 $\{f_n\}$ は, 点列 $\{a_i\}$ から Gram-Schmidt の直交化法で得られる正規直交系 $\{F_n\}$ と定数倍を除いて一致することが分かる, i.e. $f_n=(|G_{n-1}|/|G_n|)^{1/2}F_n$, $n=1,2,\dots$. これより直ちに次の系を得る.

系 2.10. $\{a_i\}_{i=1}^n\subset\mathcal{H}$ が線形独立のとき, $\lambda_n=\sqrt{|G_{n-1}|/|G_n|}$. ただし, $G_k=G(a_1,\dots,a_k)$, $k=1,\dots,n$, $G_0=1$ とする.

3 ベクトル値 RKHS における Hadamard 積と内積補間

ここでは Hilbert 型 RKHS の包含空間が直和であるような場合を考える. 直和 $C=\bigoplus_{x\in E}C_x$ の元を点 $x\in E$ で Hilbert 空間 C_x の値を取る集合 E 上のベクトル値函数とみなし, C **値函数**と呼ぶことにする. このとき点 $x\in E$ における**評価作用素** $\mathrm{ev}_x\colon f\in\mathcal{H}\mapsto f(x)\in C_x$ は有界である. 評価作用素の共役作用素 $k_x=\mathrm{ev}_x^*\in\mathcal{L}(C_x,\mathcal{H})$ を**点** x **における** $\mathcal{H}$ **の再生核**と言う. $\forall f\in\mathcal{H}$, $\forall c\in C_x$ に関して k_x の再生性

$$\langle f,k_x(c)\rangle_{\mathcal{H}}=\langle f(x),c\rangle_{C_x}$$

が成り立つ．また $K(x,y)=k_x^*k_y\in\mathcal{L}(C_y,C_x)$ とおいて C-RKHS $\mathcal{H}$ の**再生核函数**と言う．C-RKHS $\mathcal{H}$ の Schwartz 再生核 $K\in\mathcal{L}^+(C)$ と点 x における再生核 k_x 及び再生核函数 $K(x,y)$ とは

$$\mathrm{ev}_x\, Ki_y = K(x,y), \quad k_y = Ki_y$$

の関係がある．ただし，$i_y\colon C_y\to C$ は標準的入射である．C-RKHS $\mathcal{H}$ の再生核函数 $K(x,y)$ は次の正定値性をもつ: $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_n\in E$, $\forall c_i\in C_i$,

$$\sum\langle K(a_i,a_j)c_j,c_i\rangle_{C_{a_i}}\geq 0.$$

特に $\forall x\in E$, $K(x,x)\in\mathcal{L}(C_x)$ で $K(x,x)\geq 0$ となる．直積 $\prod_{(x,y)\in E^2}\mathcal{L}(C_y,C_x)$ の元 K が上の意味で正定値なとき，K を C-**正定値核**といい $K\gg 0$ と表す．Hilbert 空間 $H_1,\dots,H_m$ のテンソル積 Hilbert 空間 $\bigotimes_{p=1}^m H_i$ の内積は $f_i\in H_i$, $g_i\in H_i$, $p=1,\dots,m$ のとき

$$\langle f_1\otimes\cdots\otimes f_m,\, g_1\otimes\cdots\otimes g_m\rangle_{\otimes H_i}=\prod_{p=1}^m\langle f_i,g_i\rangle_{H_i} \tag{7}$$

を満たす (See, e.g. [10, p. 49])

以下，自然数 m と s を固定し，$E=\{1,\dots,s\}$, $C^p=\bigoplus_{j=1}^s C_j^p$ で，各 C_j^p は有限次元 Hilbert 空間とする．また，記述を簡単にするため直和因子の元とその直和への標準的入射の像を同一視する．この同一視の下で直和因子 C_j^p は直和 C^p の部分空間であり，C^p は C_j^p の直和として直交分解される．このとき，

$$\bigotimes_{p=1}^m C^p\cong\bigoplus_{(j_1,\dots,j_m)\in E^m}C_{j_1}^1\otimes\cdots\otimes C_{j_m}^m.$$

$\mathcal{H}^p$ $(p=1,\dots,m)$ を集合 E 上の C^p-RKHS で，点 $j\in E$ における再生核を $k_j^p\in\mathcal{L}(C^p,\mathcal{H}^p)$ とする．$\mathcal{H}^p$, $p=1,\dots,m$, の元は集合 E 上の C^p 値函数であるが，元 $f_p\in\mathcal{H}^p$, $p=1,\dots,m$ から作った単純テンソル $f_1\otimes\cdots\otimes f_m$ を，直積集合 E^m 上のベクトル値函数として，点 $(j_1,\dots,j_m)\in E^m$ における値を

$$(f_1\otimes\cdots\otimes f_m)(j_1,\dots,j_m)=f_1(j_1)\otimes\cdots\otimes f_m(j_m)\in\bigotimes_{p=1}^m C^p$$

と定義すると，このような単純テンソルの有限和全体のなすベクトル空間は $\{\mathcal{H}^p\}_{p=1}^m$ の (代数的) テンソル積 $\bigotimes_{p=1}^m\mathcal{H}^p$ になり (7) を満たす内積をもつ内積空間になるが，有限次元の仮定より Hilbert 空間になる．したがって，$\bigotimes_{p=1}^m\mathcal{H}^p$ は**テンソル積** *Hilbert* **空間**であり，直積 E^m 上の $\bigotimes_{p=1}^m C^p$-RKHS になる．等式 (7) より，任意の $\otimes_{p=1}^m f_p\in\bigotimes\mathcal{H}^p$ と $c_{j_p}^p\in C^p$ に対して

$$\begin{aligned}\langle\otimes_{p=1}^m f_p,\otimes_{p=1}^m k_{j_p}^p(c_{j_p}^p)\rangle_{\otimes\mathcal{H}^p}&=\prod_{p=1}^m\langle f_p(j_p),c_{j_p}^p\rangle_{C_j^p}=\langle\otimes_{p=1}^m f_p(j_p),\otimes_{p=1}^m c_{j_p}^p\rangle_{\otimes_{p=1}^m C_{j_p}^p}\\&=\langle(\otimes_{p=1}^m f_p)(j_1,\dots,j_m),\otimes_{p=1}^m c_{j_p}^p\rangle_{\otimes_{p=1}^m C_{j_p}^p}\end{aligned}$$

となるので, $\bigotimes_{p=1}^{m} \mathcal{H}^p$ の点 $(j_1, \ldots, j_m) \in E^m$ における再生核は $\otimes_{p=1}^{m} k_{j_p}^p$ で与えられる. また,

$$\bigodot_{p=1}^{m} C^p = \bigoplus_{j \in E} C_j^1 \otimes \cdots \otimes C_j^m$$

とおいて, 対角線写像 $\phi\colon j \in E \mapsto (j, \ldots, j) \in E^m$ による Hilbert 空間 $\bigotimes_{p=1}^{m} \mathcal{H}^p$ の引戻し ϕ^*

$$\phi^*\colon f \in \bigotimes_{p=1}^{m} \mathcal{H}^p \mapsto \phi^* f = f \circ \phi \in \bigodot_{p=1}^{m} C^p$$

による作用素域を $\bigodot_{p=1}^{m} \mathcal{H}^p$ で表すと, $\bigodot_{p=1}^{m} \mathcal{H}^p$ は集合 E 上の $\bigodot_{p=1}^{m} C^p$-RKHS であり $\{\mathcal{H}^p\}_{p=1}^{m}$ の *Hadamard* **積** *RKHS* という. ベクトル値函数 $f_p \in \mathcal{H}^p$, $p = 1, \ldots, m$, に対してその Hadamard 積を $\phi^*(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m)$ で定義して $\bigodot_{p=1}^{m} f_i$ または $f_1 * \cdots * f_m$ と表す. $\bigodot_{p=1}^{m} f_i \in \bigodot_{p=1}^{m} \mathcal{H}^p$ である. テンソル積 $\bigotimes_{p=1}^{m} k_j^p$ の再生性より $\bigotimes_{p=1}^{m} k_j^p \in (\ker \phi^*)^\perp$ だから, 作用素域の内積の定義より $\bigodot_{p=1}^{m} \mathcal{H}^p$ の点 $i \in E$ における再生核は $\bigodot_{p=1}^{m} k_i^p \in \bigodot_{p=1}^{m} \mathcal{H}^p$ となることが分かる. Hadamard 積 RKHS $\bigodot_{p=1}^{m} \mathcal{H}^p$ の作用素域としての定義より直ちに, 任意の $f \in \bigotimes_{p=1}^{m} \mathcal{H}^p$ に対して不等式

$$\|\phi^* f\|_{\bigodot_{p=1}^{m} \mathcal{H}^p} \le \|f\|_{\bigotimes_{p=1}^{m} \mathcal{H}^p}$$

が成り立つ.

定義 3.1. $m \ge 2$ であって上の不等式で等号が成り立つとき, $f \in \bigotimes_{p=1}^{m} \mathcal{H}^p$ は**極値的** *(extremal)* であるという ([13, p. 378]).

作用素域の定義より f が極値的である条件は $f \in (\ker \phi^*)^\perp$ である. $f, g \in \bigotimes_{p=1}^{m} \mathcal{H}^p$ のとき, f と g の少なくとも一方が極値的ならば

$$\langle \phi^* f, \phi^* g \rangle_{\bigodot_{p=1}^{m} \mathcal{H}^p} = \langle f, g \rangle_{\bigotimes_{p=1}^{m} \mathcal{H}^p}$$

に注意する.

命題 3.2 (cf. [14])**.** *C^p は Hilbert 空間, $\mathcal{H}^p$ は集合 E 上の C^p-RKHS とする $(p = 1, \ldots, m)$. $f \in \bigotimes_{p=1}^{m} \mathcal{H}^p$ が極値的である必要十分条件は, f が集合 $\bigcup_{j \in E} \operatorname{ran} k_j^1 \otimes \cdots \otimes \operatorname{ran} k_j^m$ の閉線形包に入ることである. ただし, k_j^p は点 j における $\mathcal{H}^p$ の再生核である.*

包含空間が有限次元の場合には, 極値的な単純テンソルの簡単な特徴付けが得られる.

命題 3.3. *$m \ge 2$ とする. $C^p = \bigoplus_{i=1}^{s} C_i^p$ は有限次元 Hilbert 空間の有限個の直和, $A^p \in \mathcal{L}(C^p)$ は正定値で, A^p を再生核とする集合 $E = \{1, \ldots, s\}$ 上の C^p-RKHS を $\mathcal{H}^p$, 点 i における $\mathcal{H}^p$ の再生核を k_i^p とする $(p = 1, \ldots, m)$. $f_p \in \mathcal{H}^p \setminus \{0\}$, $p = 1, \ldots, m$ のとき, $f_1 \otimes \cdots \otimes f_m$ が極値的 $\iff$ $\exists i \in E$ s.t. $f_p \in \operatorname{ran} k_i^p$, $p = 1, \ldots, m$.*

以下, この報告では有限次元 Hilbert 空間 C を包含空間とする Hilbert 型 RKHS における内積補間が重要になるので, その設定といくつかの補題について述べる. 作用素 $A \in \mathcal{L}^+(C)$ 及び C の

CONS $\{u_j\}_{j\in J}$ が与えられた時, $j \in J$ に対して,

$$\langle f, Au_i\rangle_{\mathcal{H}_A} = 0\ (\forall i < j),\ \langle f, Au_j\rangle_{\mathcal{H}_A} = 1$$

を満たす $f \in \mathcal{H}_A$ を求める問題を, C-RKHS $\mathcal{H}_A$ の CONS $\{u_j\}$ に関する**位数** *(order)* j の**内積補間問題**といい, その解集合を P_j^A とする．ただし CONS $\{u_j\}_{j\in J}$ の添字集合 J には全順序を入れておくものとする．$P_j^A \neq \emptyset$ のとき最小のノルムをもつ P_j^A の元を f_j^A, そのノルムを λ_j^A とする．また, C が Hilbert 空間の直和 $C = \bigoplus_{i=1}^s C_i$, $\dim C_i = n_i$ のときは, C-RKHS $\mathcal{H}_A$ は集合 $E = \{1, \ldots, s\}$ 上のベクトル値函数からなる RKHS とみなせるが, 簡単のため C の CONS の表記を $\{u_{ij} \colon i = 1, \ldots, s;\ j = 1, \ldots, n_i\}$ のように 2 重添字で表し, $\{u_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ が C_i の CONS になるように定める．u_{ij} の添字 ij の順序としては (i, j) に関する辞書式順序を入れておく．また C_i を C への標準的入射と同一視して常に C の部分空間とみなす．この約束の下で $k_i^A(u_{ij}) = Au_{ij}$ が成り立つ．このとき,

$$f_{ij}^A(l) = 0, \quad l = 1, \ldots, i-1,\ j = 1, \ldots, n_i$$

に注意する．これは f_{ij}^A の定義と k_{ij}^A の再生性から明らかである．この事実は不等式の等号問題において, ブロック行列がブロック対角行列になることを示す際などに利用され重要である．証明は Schwarz の不等式から容易である．

補題 3.4. *$C = \bigoplus_{i=1}^s C_i$ は Hilbert 空間族 $\{C_i\}$ の直和で有限次元で, $\{u_{ij}\}$ は C の CONS とする．$A \in \mathcal{L}(C)$ を作用素行列として $A = (A_{ij})$, $A_{ij} \in \mathcal{L}(C_j, C_i)$ と表す．A が正定値のとき, C-RKHS $\mathcal{H}_A$ における C の CONS $\{u_{ij}\}$ に関する内積補間問題は解をもち, 次の不等式が成り立つ:*

$$\lambda_{ij}^A \geq 1/\langle A_{ii}u_{ij}, u_{ij}\rangle_{C_i}^{1/2}.$$

等号 $\iff$ f_{ij}^A が $k_i^A(u_{ij})$ の定数倍 $\iff$ $k_{i'}^A(u_{i'j'}) \perp k_i^A(u_{ij})$, $\forall i'j' < ij$ in $\mathcal{H}_A$. 特に, 等号ならば $Au_{ij} \in C$ の $C_1, \ldots, C_{i-1}$ 成分は 0.

$\{u_j\}_{j=1}^n$ を n 次元 Hilbert 空間 C の正規直交基底とすると, Parseval の定理より作用素 $\phi\colon f \in C \mapsto (\langle f, u_j\rangle)_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$ は等長同型である．ϕ を CONS $\{u_j\}_{j=1}^n$ の**誘導する**等長同型と言うことにする．次は包含空間が有限次元のベクトル値 RKHS からそれと等長同型な古典的 RKHS を作る補題である．

補題 3.5. *n 次元 Hilbert 空間 C の CONS $\{u_j\}_{j=1}^n$ の誘導する等長同型を $\phi\colon C \to \mathbb{C}^n$ として, 基底 $\{u_j\}$ に関する作用素 $T \in \mathcal{L}^+(C)$ の表現行列を $A \in M_n$ とする．$A = \phi T \phi^{-1}$ は半正定値であり, 作用素 T を再生核とする C-RKHS を $\mathcal{H}_T$, 行列 A を再生核とする集合 $\{1, \ldots, n\}$ 上の RKHS を $\mathcal{H}_A$ とすると, ベクトル空間として $\mathcal{H}_T = \operatorname{ran} T$, $\mathcal{H}_A = \operatorname{ran} A$ であり, $\forall x, y \in \mathcal{H}_T$,*

$$\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_T} = \langle \phi x, \phi y\rangle_{\mathcal{H}_A}.$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{C}^n \\ \mathcal{H}_T \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed, "\phi|_{\mathcal{H}_T}"] & \mathcal{H}_A \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

すなわち, $\phi|_{\mathcal{H}_T} : \mathcal{H}_T \to \mathcal{H}_A$ は等長同型.

注意. ϕ_* が等長同型になる所に「閉値域」の仮定が必要になる!

定義 3.6. 包含空間 C の CONS から上のように作った集合 $\{1, \ldots, n\}$ 上の RKHS $\mathcal{H}_A$ を C-RKHS $\mathcal{H}_T$ の**スカラー化** *(scalarization)* という.

補題 3.5 より有限次元 Hilbert 型 RKHS の再生核の行列式が内積補間問題の最小ノルム $\{\lambda_i^T\}$ で表される.

補題 3.7. *C は有限次元 Hilbert 空間で, $T \in \mathcal{L}(C)$ が正定値ならば, C の CONS $\{u_j\}_{j=1}^n$ に関する $\mathcal{H}_T$ の内積補間問題に対して,*

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i^T = |T|^{-1/2}.$$

更に C が Hilbert 空間 $C_1, \ldots, C_s$ の直和 $C = \bigoplus_{i=1}^s C_i$ で $i = 1, \ldots, s$ に対して $\{c_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ が C_i の CONS であるならば, 作用素行列 $T = (T_{jk})_{j,k=1}^s$ の i 次主座小行列を $T_i = (T_{jk})_{j,k=1}^i$ としたとき, C の CONS $\bigcup_{i=1}^s \{c_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ に関して, $i = 1, \ldots, s$ に対して,

$$\prod_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij}^T = \frac{|T_{i-1}|^{1/2}}{|T_i|^{1/2}}. \quad (|T_0| = 1 \text{ とする})$$

4 和の不等式と Minkowski の行列式不等式

半正定値行列 A に対して補題 3.7 を用いて最小ノルム λ_i^A の評価から行列式 $|A|$ の値を評価する手法を**内積補間の方法**と呼ぶことにする. 内積補間の方法を簡単な例で説明するため, 半正定値行列の和の行列式に関する Minkowski の行列式不等式を導いてみる. $A, B \in M_n^+$ とする. これらを再生核とする集合 $E = \{1, \ldots, n\}$ 上の $\mathbb{C}^n$-RKHS を $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B, \mathcal{H}_{A+B}$ として, $\mathbb{C}^n$ の CONS として標準基底 $\{e_i\}_{i=1}^n$ をとる. $\mathcal{H}_A$ の点 j における再生核 k_j^A は行列 A の第 j 列であることを思い出すと, $\mathcal{H}_{A+B}$ の点 j における再生核は $k_j^A + k_j^B$ であることに注意する.

命題 4.1. *$A, B \in M_n$ が正定値ならば上記の設定において次の不等式が成り立つ $(j = 1, \ldots, n)$:*

$$\lambda_j^{A+B} \leq \frac{\lambda_j^A \lambda_j^B}{\sqrt{(\lambda_j^A)^2 + (\lambda_j^B)^2}}.$$

等号 $\iff \exists z \in \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_j\}$ s.t. $(\lambda_j^B)^2 f_j^A = Az$ かつ $(\lambda_j^A)^2 f_j^B = Bz$.

証明. $h = (\lambda_j^B)^2 f_j^A + (\lambda_j^A)^2 f_j^B$ とおくと, $\{(\lambda_j^A)^2 + (\lambda_j^B)^2\}^{-1} h \in P_j^{A+B}$ である.

$(\because)$ $f_j^A \in \mathcal{H}_A$, $f_j^B \in \mathcal{H}_B$ だから $h \in \mathcal{H}_{A+B}$ は明らか. $k_i^A + k_i^B$ は $\mathcal{H}_{A+B}$ の点 i における再生核だから, $i < j$ ならば

$$\langle h, k_i^A + k_i^B \rangle_{\mathcal{H}_{A+B}} = (\lambda_j^B)^2 f_j^A(i) + (\lambda_j^A)^2 f_j^B(i) = 0.$$

同様にして $\langle h, k_j^A + k_j^B \rangle_{\mathcal{H}_{A+B}} = (\lambda_j^A)^2 + (\lambda_j^B)^2$. よって, $\{(\lambda_j^A)^2 + (\lambda_j^B)^2\}^{-1} h \in P_j^{A+B}$. //

不等式 (5) より,

$$\|h\|^2_{\mathcal{H}_{A+B}} \le (\lambda_j^B)^4 \|f_j^A\|^2 + (\lambda_j^A)^4 \|f_j^B\|^2 = (\lambda_j^A \lambda_j^B)^2 \{(\lambda_j^A)^2 + (\lambda_j^B)^2\}.$$

定義より $\lambda_j^{A+B} \le \{(\lambda_j^A)^2 + (\lambda_j^B)^2\}^{-1} \|h\|_{\mathcal{H}_{A+B}}$. これらを合わせて求める不等式を得る.

$\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ の点 j における再生核はそれぞれ $k_j^A = Ae_j$, $k_j^B = Be_j$ だから, 補題 2.7 より等号条件は, $\exists z \in \mathbb{C}^n$ s.t. $(\lambda_j^B)^2 f_j^A = Az$, $(\lambda_j^A)^2 f_j^B = Bz$. ここで $f_j^A \in \operatorname{span}\{k_i^A\}_{i=1}^j$ より $z \in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_j\}$. □

命題 4.2 (Minkowski の行列式不等式, cf. [5, p. 510])**.** 行列 $A, B \in M_n$ が正定値ならば,

$$|A+B|^{1/n} \ge |A|^{1/n} + |B|^{1/n}.$$

等号条件は A と B が比例することである.

証明. 命題 4.1 と補題 3.7 より,

$$|A+B| = \prod_{j=1}^n (\lambda_j^{A+B})^{-2} \ge \prod_{j=1}^n \big\{(\lambda_j^A)^{-2} + (\lambda_j^B)^{-2}\big\}.$$

ここで $a_j, b_j \ge 0$ のとき, 次の形の Hörder の不等式 ([4, p. 21])

$$\prod_{j=1}^n a_j^{1/n} + \prod_{j=1}^n b_j^{1/n} \le \prod_{j=1}^n (a_j + b_j)^{1/n}$$

が成り立ち, 等号はベクトル $(a_j), (b_j) \in \mathbb{R}^n$ が線形従属な場合であることを使うと,

$$|A+B|^{1/n} \ge \prod_{j=1}^n (\lambda_j^A)^{-2/n} + \prod_{j=1}^n (\lambda_j^B)^{-2/n} = |A|^{1/n} + |B|^{1/n}.$$

これで Minkowski の行列式不等式が示された. 等号条件は命題 4.1 から得られるが省略する. □

5 Hadamard 積不等式

以下, 表記の都合で A^p 等の上付き文字 (superscript) を使うが, これは $\mathbb{C}^n$ 等の場合を除き, べき乗の記号ではないので注意する. 次の設定を考える: $C = \bigoplus_{p=1}^m C^p$, $C^p = \bigoplus_{i=1}^s C_i^p$ は有限次元 Hilbert 空間の直和として, C^p の直和成分 C_i^p は標準的入射により C^p の部分空間と同一視する. C_i^p の次元を n_i^p, その CONS を $\{c_{ij}^p\}_{j=1}^{n_i^p}$ として, その添字の集合

$$J^p = \{ij \colon 1 \le i \le s;\ 1 \le j \le n_i^p\}$$

には $ij \mapsto (i,j)$ の対応で $\mathbb{N}^2$ の部分集合とみなして辞書式順序を入れ, それらの直積集合

$$J = \prod_{p=1}^m J^p$$

にも J^p の順序から定まる辞書式順序を入れておく．各 $i=1,\dots,s$ に対して J の部分集合 J_i を

$$J_i=\{(ij_1,\dots,ij_m)\colon 1\le j_p\le n_i^p,\ 1\le p\le m\}$$

で定める．このとき $\{c_{ij}^p\}_{ij\in J^p}$ は C^p の CONS であり, $\gamma=(ij_1,\dots,ij_m)\in J_i$, $i=1,\dots,s$, に対して

$$c_\gamma=c_{ij_1}^1\otimes\cdots\otimes c_{ij_m}^m\in\bigotimes_{p=1}^m C_i^p$$

とおくと $c=\{c_\gamma\}_{\gamma\in\bigcup_{i=1}^s J_i}$ は $C^1,\dots,\ C^m$ の Hadamard 積 $\bigodot_{p=1}^m C^p=\bigoplus_{i=1}^s\bigotimes_{p=1}^m C_i^p$ の CONS である．$A^p=(A_{ij}^p)_{i,j=1}^s\in\mathcal{L}(C^p)$, $p=1,\dots,m$, が半正定値のとき, $E=\{1,\dots,s\}$ とすると集合 E 上の C^p-RKHS $\mathcal{H}_{A^p}$ の Hadamard 積 RKHS $\bigodot_{p=1}^m\mathcal{H}_{A^p}=\mathcal{H}_{A^1}*\cdots*\mathcal{H}_{A^m}$ は E 上の $\bigodot_{p=1}^m C^p$-RKHS であり, 再生核 $\bigodot_{p=1}^m A^p=A^1*\cdots*A^m=(A_{ij}^1\otimes\cdots\otimes A_{ij}^m)_{i,j=1}^s\in\mathcal{L}\big(\bigodot_{p=1}^m C^p\big)$ をもつ．このとき, 最小ノルム函数 $f_{ij}^{A^p}$ は $i'<i$ である任意の点 $i'\in E$ で 0 となる．なぜなら, $f_{ij}^{A^p}$ は $i'j'<ij$ より $k_{i'j'}^{A^p}(c_{i'j'}^p)$ と直交するが, $\{c_{i'j'}^p\}_{j'}$ は $C_{i'}^p$ を張るので, $k_{i'j'}^{A^p}$ の再生性より $f_{ij}^{A^p}(i')=0$ であるから.

定理 5.1. *$m\ge 2$ とする．上記の設定の下, $A^p\in\mathcal{L}(C^p)$, $p=1,\dots,m$, が全て正定値で $\forall i=1,\dots,s$, $\forall p=1,\dots,m$ に対して $\{k_i^{A^p}(c_{ij}^p)\}_{j=1}^{n_i^p}$ が C^p-RKHS $\mathcal{H}_{A^p}$ の直交系と仮定する．$\bigodot_{p=1}^m C^p$ の CONS c をとったとき, Hadamard 積 RKHS $\bigodot_{p=1}^m\mathcal{H}_{A^p}$ における位数 $\gamma=(ij_1,\dots,ij_m)\in J_i$ の内積補間問題に関する最小ノルム $\lambda_\gamma^{\bigodot_{p=1}^m A^p}$ は次の不等式を満たす:*

$$\lambda_\gamma^{\bigodot_{p=1}^m A^p}\le\frac{\prod_{p=1}^m\lambda_{ij_p}^{A^p}}{\Big\{\prod_{p=1}^m(\lambda_{ij_p}^{A^p})^2\langle A_{ii}^p c_{ij_p}^p,c_{ij_p}^p\rangle_{\mathcal{H}_{A^p}}-\prod_{p=1}^m\big[(\lambda_{ij_p}^{A^p})^2\langle A_{ii}^p c_{ij_p}^p,c_{ij_p}^p\rangle_{\mathcal{H}_{A^p}}-1\big]\Big\}^{1/2}}.$$

等号条件は $\exists l\le i$ s.t. $p=1,\dots,m$ に対して $f_{ij_p}^{A^p}$ が $k_i^{A^p}(c_{ij_p}^p)$ と $\{k_l^{A^p}(c_{lj'}^p)\}_{lj'\le ij_p}$ との線形結合であることである．等号が成り立つ時, 最小ノルム解は次で与えられる:

$$f_\gamma^{\bigodot_{p=1}^m A^p}=\frac{\bigodot_{p=1}^m(\lambda_{ij_p}^{A^p})^2k_i^{A^p}(c_{ij_p}^p)-\bigodot_{p=1}^m\{(\lambda_{ij_p}^{A^p})^2k_i^{A^p}(c_{ij_p}^p)-f_{ij_p}^{A^p}\}}{\prod_{p=1}^m(\lambda_{ij_p}^{A^p})^2\langle A_{ii}^p c_{ij_p}^p,c_{ij_p}^p\rangle_{\mathcal{H}_{A^p}}-\prod_{p=1}^m\big[(\lambda_{ij_p}^{A^p})^2\langle A_{ii}^p c_{ij_p}^p,c_{ij_p}^p\rangle_{\mathcal{H}_{A^p}}-1\big]}.$$

注意. $i=1$ のときは定理の等号条件が満たされるので, 常に等号が成り立つ.

6 初等的不等式と行列式

最小ノルム λ_n の不等式から行列式に関する不等式を導こう．行列式を評価するには積の順序交換が必要になるが, その際に次の初等的不等式とその等号条件が必要になる．$m=2$ の場合は [8, Prop. 2.1] にある．この不等式は Oppenheim-Schur 不等式の本質的部分だと思われる.

補題 6.1. *$m,n\in\mathbb{N}$ で $\forall a_{ij}\ge 1$ のとき, 次の不等式が成り立つ.*

$$\prod_{i=1}^n\Big\{\prod_{j=1}^m a_{ij}-\prod_{j=1}^m(a_{ij}-1)\Big\}\ge\prod_{j=1}^m\prod_{i=1}^n a_{ij}-\prod_{j=1}^m\Big(\prod_{i=1}^n a_{ij}-1\Big).\tag{8}$$

等号条件は次の *(i)–(iii)* のいずれか *1* つが成り立つことである*:*

(i) $n=1$ または $m=1$,

(ii) 行列 (a_{ij}) のある列の全ての成分が *1, i.e* $\exists j \forall i,\ a_{ij}=1$,

(iii) 行列 (a_{ij}) のある行以外の全ての成分が *1, i.e.* $\exists i_0$ *s.t.* $\forall i \neq i_0, \forall j,\ a_{ij}=1$.

証明. $p_{ij}=a_{ij}-1$ とおく. $p_{ij}\geq 0$ である. 非負行列 $p=(p_{ij})\in M_{n,m}(\mathbb{R}_+)$ の第 i 行, 第 j 列をそれぞれ $p_{i\bullet}=(p_{i1},\dots,p_{im})\in\mathbb{R}^m_+$, $p_{\bullet j}=(p_{1j},\dots,p_{nj})\in\mathbb{R}^n_+$ とおく. 多重指数表記を用いて行列 $\alpha=(\alpha_{ij})\in M_{n,m}(\{0,1\})$ に対して $p^\alpha=\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^m p_{ij}^{\alpha_{ij}}$ とおき, 成分が全て 1 の行列を $\mathbb{1}$ で表す. 行列の大小関係は成分の直積順序とする. このとき,

$$\prod_{j=1}^m a_{ij}=\prod_{j=1}^m(1+p_{ij})=\sum_{\alpha_{i\bullet}}p_{i1}^{\alpha_{i1}}\cdots p_{im}^{\alpha_{im}}=\sum_{\alpha_{i\bullet}}p_{i\bullet}^{\alpha_{i\bullet}},$$

$$\prod_{j=1}^m(a_{ij}-1)=p_{i1}\dots p_{im}=p_{i\bullet}^{\mathbb{1}}.$$

よって,

$$\prod_{j=1}^m a_{ij}-\prod_{j=1}^m(a_{ij}-1)=\sum_{\alpha_{i\bullet}<\mathbb{1}}p_{i\bullet}^{\alpha_{i\bullet}},$$

$$\prod_{i=1}^n\Big\{\prod_{j=1}^m a_{ij}-\prod_{j=1}^m(a_{ij}-1)\Big\}=\sum_{\forall i,\ \alpha_{i\bullet}<\mathbb{1}}p_{1\bullet}^{\alpha_{1\bullet}}\dots p_{n\bullet}^{\alpha_{n\bullet}}=\sum_{\forall i,\ \alpha_{i\bullet}<\mathbb{1}}p^\alpha,$$

$$\prod_{j=1}^m\prod_{i=1}^n a_{ij}=\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^m a_{ij}=\sum_\alpha p_{1\bullet}^{\alpha_{1\bullet}}\dots p_{n\bullet}^{\alpha_{n\bullet}}=\sum_\alpha p^\alpha,$$

$$\prod_{j=1}^m\Big(\prod_{i=1}^n a_{ij}-1\Big)=\prod_{j=1}^m\sum_{\alpha_{\bullet j}>0}p_{\bullet j}^{\alpha_{\bullet j}}=\sum_{\forall j,\ \alpha_{\bullet j}>0}p_{\bullet 1}^{\alpha_{\bullet 1}}\dots p_{\bullet m}^{\alpha_{\bullet m}}=\sum_{\forall j,\ \alpha_{\bullet j}>0}p^\alpha.$$

したがって, 集合 $M_{n,m}(\{0,1\})$ の部分集合 $E,\ F$ を

$$E=\{\alpha\in M_{n,m}(\{0,1\})\colon \exists i \text{ s.t. } \alpha_{i\bullet}=\mathbb{1}\},$$
$$F=\{\alpha\in M_{n,m}(\{0,1\})\colon \forall j,\ \alpha_{\bullet j}>0\},$$

で定めると, 示すべき不等式は次の不等式になる:

$$\sum_{\alpha\in E}p^\alpha\leq\sum_{\alpha\in F}p^\alpha.$$

しかし明らかに $E\subset F$ であり, $p^\alpha\geq 0$ だから, 不等式 (8) が成り立つことが示された.

次に等号が成り立つ場合を考える. 等号条件は $\forall\alpha\in F\setminus E$, $p^\alpha=0$ となるが,

$$F\setminus E=\{\alpha\in M_{n,m}(\{0,1\})\colon \forall i\forall j,\ \alpha_{i\bullet}<\mathbb{1},\ \alpha_{\bullet j}>0\}$$

である. 等号条件を具体的に定めよう. 場合分けする.

(a) $\exists j$ s.t. $p_{\bullet j}=0$ の場合: $\forall\alpha\in F$ に対して $p^\alpha=0$ だから $\sum_{\alpha\in E}p^\alpha=\sum_{\alpha\in F}p^\alpha=0$ となり等号が成り立つ.

(b) $\forall j$, $p_{\bullet j}\neq 0$ の場合: 更に場合分けする.

1. $m=1$: このとき (8) は等号で成り立つ.
2. $\exists i_0$ s.t. $\forall j$ に対して第 j 列で非零な成分が $p_{i_0 j}$ のみの場合: 行列 p は第 i_0 行以外の行が全て 0 となるので不等式 (8) は $n=1$ の場合に帰着する. この場合明らかに等号が成り立つ.
3. 上の 1., 2. 以外: $\forall j\exists i(j)$, $p_{i(j)j}\neq 0$ であり, $m\geq 2$ より集合 $\{i(j)\}_{j=1}^m$ の濃度は 2 以上になるようにできる. このとき, 行列 $\alpha=(\alpha_{ij})$ を

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}1, & (i=i(j))\\ 0, & (i\neq i(j))\end{cases}$$

で定めると, $\alpha\in F\setminus E$ であり, $p^\alpha\neq 0$ となる. したがって, この場合には等号は成り立たない.

以上より, 等号が成り立つのは (a) または (b)-1, (b)-2 の場合であることが分かった. これで求める等号条件が得られた. $\square$

ブロック行列版の Oppenheim-Schur の不等式を得るために少し準備する. $p=1,\ldots,m$ に対して A^p を対称区分けの $s\times s$ の正定値複素ブロック行列として次の設定をする:

- $C^p=\bigoplus_{i=1}^s\mathbb{C}^{n_{ip}}$, $n_p=\sum_{i=1}^s n_{ip}$ (C^p の次元), $n=\sum_{i=1}^s\prod_{p=1}^m n_{ip}$ ($\bigodot_{p=1}^m C^p$ の次元),
- $A^p=(A^p_{ij})_{i,j=1}^s\in M_{n_p}$, $A^p_{ij}\in M_{n_{ip},n_{jp}}$,
- $\{c^p_{ij}\}_{j=1}^{n_{ip}}\subset\mathbb{C}^{n_{ip}}$: $A^p_{ii}>0$ の固有ベクトルからなる CONS ($i=1,\ldots,s$).

正定値ブロック行列 $A^p\in\mathcal{L}(C^p)$ を再生核にもつ集合 $E=\{1,\ldots,s\}$ 上の C^p-RKHS を $\mathcal{H}_{A^p}$ ($p=1,\ldots,m$) とする. 各 $i=1,\ldots,s$ に対して $\{\bigotimes_{p=1}^m c^p_{ij_p}: j_p=1,\ldots,n_{ip}\}$ は行列 $\bigotimes_{p=1}^m A^p_{ii}$ の固有ベクトルからなる CONS である ([6, p. 245]). 以下, ブロック行列 X の i 次主座ブロック小行列 ($i\times i$ leading principal block submatrix) を括弧を使って $(X)_i$ と表す.

定理 6.2. *上記の設定においてブロック行列 $A^p=(A^p_{ij})\in\mathcal{L}(C^p)$ $(p=1,\ldots,m)$ が全て正定値のとき, 任意の $i=1,\ldots,s$ に対して Hadamard 積 $\bigodot_{p=1}^m A^p$ の行列式に関して次の不等式が成り立つ:*

$$\frac{|(\bigodot_{p=1}^m A^p)_i|}{|(\bigodot_{p=1}^m A^p)_{i-1}|}\geq\prod_{p=1}^m|A^p_{ii}|^{\sigma_{ip}}-\prod_{p=1}^m\Big\{|A^p_{ii}|^{\sigma_{ip}}-\Big(\frac{|(A^p)_i|}{|(A^p)_{i-1}|}\Big)^{\sigma_{ip}}\Big\}.$$

ただし, $\sigma_{ip}=n_{ip}^{-1}\prod_{q=1}^m n_{iq}$ である. この不等式の等号条件は次の条件のいずれかが成り立つことである:

(a) $m=1$ または $i=1$.

(b) ある p に対して A^p_{li} と A^p_{il} が 0 $(\forall l < i)$ である.

(c) 任意の p に対して $n_{ip} = 1$, かつ $\exists i_0 < i$ s.t. $\forall l < i$, $\forall p$ に対して $A^p_{li} = A^p_{li_0}(A^p_{i_0i_0})^{-1}A^p_{i_0i}$.

特に行列 A^p が $s \times s$ のブロック行列で $A^p \in M_s(M_{t_p})$, $p = 1, \ldots, m$, の形であるとき, 次のような Oppenheim-Schur 不等式の拡張が得られる. $m = 2$, $t_1 = t_2 = 1$ の場合が通常の Oppenheim-Schur の不等式である.

定理 6.3. ブロック行列 $A^p = (A^p_{ij}) \in M_s(M_{t_p})$, $p = 1, \ldots, m$, が全て半正定値ならば, *Hadamard* 積 $\bigodot_{p=1}^m A^p$ の行列式に対して次の不等式が成り立つ:

$$|\bigodot_{p=1}^m A^p| \geq \prod_{p=1}^m \prod_{i=1}^s |A^p_{ii}|^{\sigma_p} - \prod_{p=1}^m \Big\{ \prod_{i=1}^s |A^p_{ii}|^{\sigma_p} - |A^p|^{\sigma_p} \Big\}.$$

ただし, $\sigma_p = t_p^{-1} \prod_{q=1}^m t_q$ である. A^p が全て正定値のとき, この不等式の等号条件は次の条件のいずれかが成り立つことである:

(a) $m = 1$ または $s = 1$.

(b) ある p に対して A^p が, ブロック対角行列である.

(c) 任意の $p = 1, \ldots, m$ に対して $t_p = 1$ (i.e. $A^p \in M_s$) であり, $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ が存在して行列 A^p の対角線及び (i, j) 成分と (j, i) 成分以外は全て 0 である.

注意. A^p が全て正定値の場合, 定理 6.3 の証明の途中で次の不等式が得られる:

$$\begin{aligned} |\bigodot_{p=1}^m A^p| \geq \prod_{p=1}^m |A^p|^{\sigma_p} \prod_{i=1}^s \Big\{ \prod_{p=1}^m \Big(\frac{|A^p_{ii}||(A^p)_{i-1}|}{|(A^p)_i|} \Big)^{\sigma_p} \\ - \prod_{p=1}^m \Big[\Big(\frac{|A^p_{ii}||(A^p)_{i-1}|}{|(A^p)_i|} \Big)^{\sigma_p} - 1 \Big] \Big\}. \end{aligned} \tag{9}$$

$A^p_{11} = (A^p)_1$, $(A^p)_0 = 1$ に注意すると乗積 $\prod_{i=1}^s$ は $\prod_{i=2}^s$ に変更してもよいから, 不等式 (9) は $m \geq 3$ のとき, Li-Feng [7, Theorem 2.5] よりシャープであることが容易にわかる.

7 謝辞

この研究は京都大学の補助で行われた.

参考文献

[1] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space*, Dover Publications, Inc., New York, 1993. Translated from the Russian and with a preface by Merlynd Nestell, Reprint of the 1961 and 1963 translations, Two volumes bound as one.

[2] N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404.

[3] C. W. Groetsch, *Generalized inverses of linear operators. Representation and approximation*, Pure Appl. Math., Marcel Dekker, vol. 37, Marcel Dekker, Inc., New York, NY, 1977.

[4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1988. Reprint of the 1952 edition.

[5] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[6] ______, *Topics in matrix analysis*, Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1991.

[7] Y. Li and L. Feng, *An Oppenheim type determinantal inequality for the Khatri-Rao product*, Oper. Matrices **15** (2021), no. 2, 693–701.

[8] M. Lin, *An Oppenheim type inequality for a block Hadamard product*, Linear Algebra Appl. **452** (2014), 1–6.

[9] A. Oppenheim, *Inequalities connected with definite Hermitian forms.*, J. London Math. Soc. **5** (1930), no. 2, 114–119.

[10] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*, Academic Press, New York-London, 1972.

[11] S. Saitoh, *Theory of reproducing kernels and its applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 189, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1988.

[12] L. Schwartz, *Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés (noyaux reproduisants)*, J. Analyse Math. **13** (1964), 115–256.

[13] A. Yamada, *Equality conditions for norm inequalities in reproducing kernel Hilbert spaces*, Math. Inequal. Appl. **12** (2009), no. 2, 377–390.

[14] ______, *Oppenheim's inequality and RKHS*, Math. Inequal. Appl. **15** (2012), no. 2, 449–456.

[15] ______, *Oppenheim-Schur's inequality and RKHS*, Submitted (2023).

[16] X.-D. Zhang and C.-X. Ding, *The equality cases for the inequalities of Oppenheim and Schur for positive semi-definite matrices*, Czechoslovak Math. J. **59(134)** (2009), no. 1, 197–206.