単調欠測データの下でのスフェリシティ検定における検定統計量の帰無分布に対する漸近展開

東京理科大学大学院理学研究科　佐藤 哲也
東京理科大学理学部　八木 文香　瀬尾 隆
Department of Applied Mathematics, Tokyo University of Science

1　導入

単調欠測データの下で，分散共分散行列の検定の 1 つである以下のような 1 標本問題におけるスフェリシティ検定について議論する．

$$H_0 : \mathbf{\Sigma} = \sigma^2 \boldsymbol{I}_p \text{ vs. } H_1 : \mathbf{\Sigma} \neq \sigma^2 \boldsymbol{I}_p$$

ただし σ^2 は未知であり，$\sigma^2 > 0$ とする．Box (1949) では尤度比における一般的な分布理論を紹介しており，完全データの下では，Muirhead (1982) が Box (1949) の方法を用いて，スフェリシティ検定における修正尤度比検定統計量の帰無分布に対する漸近展開を与えている．2-step 単調欠測データの下では，Choi (2005) が尤度比検定統計量の極限帰無分布つまり χ^2 分布の自由度を，Chang and Richards (2010) が尤度比やその帰無モーメントを導出している．また，一般的な k-step 単調欠測データの下では，Batsidis and Zografos (2006) が楕円分布の下で尤度比を導出している．さらに，単調欠測データの下での平均ベクトルと分散共分散行列の最尤推定量 (MLE) に関しては Kanda and Fujikoshi (1998) で与えられている．そして，Chang and Richards (2009) では 2-step 単調欠測データの下で平均ベクトルの検定におけるホテリングの T^2 型検定統計量を提案しており，Romer and Richards (2013) はその検定統計量がアフィン不変であることを示している．
本研究では，基本的に 2-step 単調欠測データと k-step 単調欠測データの下でそれぞれ議論する．ただし，$k \geq 2$ とする．最初にスフェリシティ検定における尤度比を導出し，尤度比検定統計量と修正尤度比検定統計量の帰無分布に対する漸近展開を導出する．また，2 つの検定統計量の上側パーセント点の漸近展開を与え，その上側パーセント点から近似上側パーセント点をいくつか提案する．次に未知パラメータである σ^2 の不偏推定量やその平均二乗誤差 (MSE) について与え，k-step 単調欠測データの下でのみ H_0 の下での σ^2 の MLE と σ^2 の不偏推定量を MSE の観点から比較する．さらに，モンテカルロ・シミュレーションを用いて検定統計量や近似上側パーセント点に対する Type I error，2 つの推定量の期待値や MSE について数値的評価を行う．最後に数値例を紹介し，結論と今後の課題を示す．

2　スフェリシティ検定における尤度比

2.1　2-step の場合

2-step 単調欠測データの下で，以下のようなデータ行列 $\boldsymbol{X}$ について考える．

$$
\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix}
x_{11} & \cdots & x_{1p_1} & x_{1,p_1+1} & \cdots & x_{1p} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{N_1 1} & \cdots & x_{N_1 p_1} & x_{N_1,p_1+1} & \cdots & x_{N_1 p} \\
x_{N_1+1,1} & \cdots & x_{N_1+1,p_1} & * & \cdots & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{N1} & \cdots & x_{Np_1} & * & \cdots & *
\end{pmatrix}.
$$

ただし $N = N_1 + N_2$, $p = p_1 + p_2$, $N_1 > p$ であり，“$*$”は欠測部分を表す．このデータ行列 $\boldsymbol{X}$ をベクトル表現すると次のようになる．

$$
\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix}
\multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{x}_1'} \\
\multicolumn{3}{c}{\vdots} \\
\multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{x}_{N_1}'} \\
\boldsymbol{x}_{1,N_1+1}' & * \ \cdots \ * \\
\vdots & \vdots \quad\ \ \vdots \\
\boldsymbol{x}_{1N}' & * \ \cdots \ *
\end{pmatrix}
= \begin{pmatrix}
\boldsymbol{x}_{11}' & \boldsymbol{x}_{21}' \\
\vdots & \vdots \\
\boldsymbol{x}_{1N_1}' & \boldsymbol{x}_{2N_1}' \\
\boldsymbol{x}_{1,N_1+1}' & * \ \cdots \ * \\
\vdots & \vdots \quad\ \ \vdots \\
\boldsymbol{x}_{1N}' & * \ \cdots \ *
\end{pmatrix}.
$$

また，平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ と分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ を

$$
\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \}p_1 \\ \}p_2 \end{matrix}, \quad
\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \overbrace{\boldsymbol{\Sigma}_{11}}^{p_1} & \overbrace{\boldsymbol{\Sigma}_{12}}^{p_2} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}\begin{matrix} \}p_1 \\ \}p_2 \end{matrix}
$$

と分割を行う．ここで次のような多変量正規分布を仮定する．

$$
\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{N_1} \overset{i.i.d.}{\sim} N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{x}_{1,N_1+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{1N} \overset{i.i.d.}{\sim} N_{p_1}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11}).
$$

ただし $\boldsymbol{x}_j = \left(\boldsymbol{x}_{1j}', \boldsymbol{x}_{2j}'\right)'$, $j = 1, \ldots, N_1$ である．さらに，標本平均ベクトルとウィシャート行列をそれぞれ次のように定義する．

$$
\overline{\boldsymbol{x}}_1^{(1)} = \frac{1}{N_1}\sum_{j=1}^{N_1} \boldsymbol{x}_{1j},\ \overline{\boldsymbol{x}}_2^{(1)} = \frac{1}{N_1}\sum_{j=1}^{N_1} \boldsymbol{x}_{2j},\ \overline{\boldsymbol{x}}_1^{(2)} = \frac{1}{N_2}\sum_{j=N_1+1}^{N} \boldsymbol{x}_{1j},
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{W}_{11}^{(1)} &= \sum_{j=1}^{N_1}(\boldsymbol{x}_{1j}-\overline{\boldsymbol{x}}_1^{(1)})(\boldsymbol{x}_{1j}-\overline{\boldsymbol{x}}_1^{(1)})', \\
\boldsymbol{W}_{12}^{(1)} &= (\boldsymbol{W}_{21}^{(1)})' = \sum_{j=1}^{N_1}(\boldsymbol{x}_{1j}-\overline{\boldsymbol{x}}_1^{(1)})(\boldsymbol{x}_{2j}-\overline{\boldsymbol{x}}_2^{(1)})', \\
\boldsymbol{W}_{22}^{(1)} &= \sum_{j=1}^{N_1}(\boldsymbol{x}_{2j}-\overline{\boldsymbol{x}}_2^{(1)})(\boldsymbol{x}_{2j}-\overline{\boldsymbol{x}}_2^{(1)})', \\
\boldsymbol{W}_{11}^{(2)} &= \sum_{j=N_1+1}^{N}(\boldsymbol{x}_{1j}-\overline{\boldsymbol{x}}_1^{(2)})(\boldsymbol{x}_{1j}-\overline{\boldsymbol{x}}_1^{(2)})' + \frac{N_1N_2}{N}(\overline{\boldsymbol{x}}_1^{(1)}-\overline{\boldsymbol{x}}_1^{(2)})(\overline{\boldsymbol{x}}_1^{(1)}-\overline{\boldsymbol{x}}_1^{(2)})', \\
\boldsymbol{W}_{22\cdot 1}^{(1)} &= \boldsymbol{W}_{22}^{(1)} - \boldsymbol{W}_{21}^{(1)}(\boldsymbol{W}_{11}^{(1)})^{-1}\boldsymbol{W}_{12}^{(1)}.
\end{aligned}
$$

このとき尤度比は次のようになる．

$$
\lambda = \frac{L(\widetilde{\boldsymbol{\mu}}, \widetilde{\sigma}^2\boldsymbol{I}_p)}{L(\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{\boldsymbol{\Sigma}})} = \frac{\left|\dfrac{1}{N}\left(\boldsymbol{W}_{11}^{(1)}+\boldsymbol{W}_{11}^{(2)}\right)\right|^{\frac{N}{2}}\left|\dfrac{1}{N_1}\boldsymbol{W}_{22\cdot 1}^{(1)}\right|^{\frac{N_1}{2}}}{\left\{\dfrac{1}{Np_1+N_1p_2}\left(\mathrm{tr}(\boldsymbol{W}_{11}^{(1)}+\boldsymbol{W}_{11}^{(2)})+\mathrm{tr}\boldsymbol{W}_{22}^{(1)}\right)\right\}^{\frac{Np_1+N_1p_2}{2}}}.
$$

ただし L は尤度関数，$\widehat{\boldsymbol{\mu}}$, $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ は $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ の MLE，$\widetilde{\boldsymbol{\mu}}$, $\widetilde{\sigma}^2$ は H_0 の下での $\boldsymbol{\mu}$, σ^2 の MLE である ($\widehat{\boldsymbol{\mu}}$, $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$, $\widetilde{\boldsymbol{\mu}}$ については付録 A を参照せよ)．尤度比 λ は表記法の異なる Chang and Richards (2010) と結果が一致する．

2.2 k-step の場合

k-step 単調欠測データの下で，$j = 1, \ldots, k$ に対して次のような仮定を行う．

$$
\boldsymbol{x}_{(1\ldots k-j+1),N_{(1\ldots j-1)}+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{(1\ldots k-j+1),N_{(1\ldots j)}} \overset{i.i.d.}{\sim} N_{p_{(1\ldots k-j+1)}}(\boldsymbol{\mu}_{(1\ldots k-j+1)}, \boldsymbol{\Sigma}_{(1\ldots k-j+1)(1\ldots k-j+1)}).
$$

ただし $j = 1$ のとき $N_{(1\ldots j-1)} = 0$ と定義し

$$
\boldsymbol{\mu}_{(1\ldots k-j+1)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mu}_{k-j+1} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \}p_1 \\ \vdots \\ \}p_{k-j+1} \end{array}, \boldsymbol{\mu}_{(1\ldots k)} = \boldsymbol{\mu},
$$

$$
\boldsymbol{\Sigma}_{(1\ldots k-j+1)(1\ldots k-j+1)} = \begin{pmatrix} \overbrace{\boldsymbol{\Sigma}_{11}}^{p_1} & \cdots & \overbrace{\boldsymbol{\Sigma}_{1,k-j+1}}^{p_{k-j+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k-j+1,1} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}_{k-j+1,k-j+1} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \}p_1 \\ \vdots \\ \}p_{k-j+1} \end{array}, \boldsymbol{\Sigma}_{(1\ldots k)(1\ldots k)} = \boldsymbol{\Sigma},
$$

$$\boldsymbol{x}_{(1\ldots k-j+1),i} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{1i} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_{k-j+1,i} \end{pmatrix},\ i = N_{(1\ldots j-1)}+1, \ldots, N_{(1\ldots j)},$$

$$N_{(1\ldots j)} = N_1 + \cdots + N_j, p_{(1\ldots j)} = p_1 + \cdots + p_j,$$

$$N = N_{(1\ldots k)}, p = p_{(1\ldots k)}, N_1 > p.$$

また，$a,\ b,\ \ell = 1, \ldots, k-j+1; j = 1, \ldots, k$ に対して標本平均ベクトルやウィシャート行列をそれぞれ

$$\overline{\boldsymbol{x}}_\ell^{(j)} = \frac{1}{N_j} \sum_{i=N_{(1\ldots j-1)}+1}^{N_{(1\ldots j)}} \boldsymbol{x}_{\ell i}, \overline{\boldsymbol{x}}_\ell^{[j]} = \frac{1}{N_{(1\ldots j)}} (N_1 \overline{\boldsymbol{x}}_\ell^{(1)} + \cdots + N_j \overline{\boldsymbol{x}}_\ell^{(j)}),$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}_{[\ell]}^{[j]} = \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{x}}_1^{[j]} \\ \vdots \\ \overline{\boldsymbol{x}}_\ell^{[j]} \end{pmatrix}, \overline{\boldsymbol{x}}_{[\ell]}^{(j)} = \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{x}}_1^{(j)} \\ \vdots \\ \overline{\boldsymbol{x}}_\ell^{(j)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{W}^{(j)} &= \sum_{i=N_{(1\ldots j-1)}+1}^{N_{(1\ldots j)}} (\boldsymbol{x}_{(1\ldots k-j+1),i} - \overline{\boldsymbol{x}}_{[k-j+1]}^{(j)})(\boldsymbol{x}_{(1\ldots k-j+1),i} - \overline{\boldsymbol{x}}_{[k-j+1]}^{(j)})' \\ &\quad + \frac{N_{(1\ldots j-1)}N_j}{N_{(1\ldots j)}} (\overline{\boldsymbol{x}}_{[k-j+1]}^{(j)} - \overline{\boldsymbol{x}}_{[k-j+1]}^{[j-1]})(\overline{\boldsymbol{x}}_{[k-j+1]}^{(j)} - \overline{\boldsymbol{x}}_{[k-j+1]}^{[j-1]})' \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{W}_{11}^{(j)} & \cdots & \boldsymbol{W}_{1,k-j+1}^{(j)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{W}_{k-j+1,1}^{(j)} & \cdots & \boldsymbol{W}_{k-j+1,k-j+1}^{(j)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{W}^{(k-j+1)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{\boldsymbol{W}_{(1\ldots j-1)(1\ldots j-1)}^{(k-j+1)}}}^{p_{(1\cdots j-1)}} & \overbrace{\hphantom{\boldsymbol{W}_{(1\ldots j-1)j}^{(k-j+1)}}}^{p_j} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{W}_{(1\ldots j-1)(1\ldots j-1)}^{(k-j+1)} & \boldsymbol{W}_{(1\ldots j-1)j}^{(k-j+1)} \\ \hline \boldsymbol{W}_{j(1\ldots j-1)}^{(k-j+1)} & \boldsymbol{W}_{jj}^{(k-j+1)} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} \}\, p_{(1\cdots j-1)} \\ \}\, p_j \end{array}, \ j = 2, \ldots, k,$$

$$\boldsymbol{W}_{ab}^{[j]} = \boldsymbol{W}_{ab}^{(1)} + \cdots + \boldsymbol{W}_{ab}^{(j)},$$

$$\boldsymbol{W}_{jj\cdot 1\ldots j-1}^{[k-j+1]} = \boldsymbol{W}_{jj}^{[k-j+1]} - \boldsymbol{W}_{j(1\ldots j-1)}^{[k-j+1]} \{\boldsymbol{W}_{(1\ldots j-1)(1\ldots j-1)}^{[k-j+1]}\}^{-1} \boldsymbol{W}_{(1\ldots j-1)j}^{[k-j+1]},\ j = 2, \ldots, k$$

と定義する．このとき尤度比は 2-step 単調欠測データの時と同様に導出することで

$$\lambda^{(k)} = \frac{L(\widetilde{\boldsymbol{\mu}}, \widetilde{\sigma}^2 \boldsymbol{I}_p)}{L(\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{\boldsymbol{\Sigma}})} = \frac{\left| \frac{1}{N} \boldsymbol{W}_{11}^{[k]} \right|^{\frac{N}{2}} \prod_{j=2}^{k} \left| \frac{1}{N_{(1\ldots k-j+1)}} \boldsymbol{W}_{jj\cdot 1\ldots j-1}^{[k-j+1]} \right|^{\frac{N_{(1\ldots k-j+1)}}{2}}}{\left\{ \left(\sum_{j=1}^{k} N_{(1\ldots k-j+1)} p_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{tr} \boldsymbol{W}_{jj}^{[k-j+1]} \right\}^{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} N_{(1\ldots k-j+1)} p_j}}$$

と書ける．尤度比 $\lambda^{(k)}$ は設定や表記法の異なる Batsidis and Zografos (2006) と結果が一致する．

3　尤度比検定統計量と修正尤度比検定統計量の帰無分布に対する漸近展開

ここでは Box (1949) の方法を用いて H_0 が真であるときの尤度比検定統計量と修正尤度比検定統計量の分布関数の漸近展開を導出し，上側パーセント点の漸近展開を与える．ただし修正係数を ρ $(0 < \rho \leq 1)$，漸近変数を N とする．

3.1　2-step の場合

2-step 単調欠測データの下で，以下のような確率変数 $Z(0 < Z \leq 1)$ の h 次モーメントについて考える．

$$\mathrm{E}[Z^h] = K \left[\frac{\prod_{m=1}^{r} y_m^{y_m}}{\prod_{\ell=1}^{q_1} z_{1\ell}^{z_{1\ell}} \prod_{\ell=1}^{q_2} z_{2\ell}^{z_{2\ell}}} \right]^h \frac{\prod_{\ell=1}^{q_1} \Gamma\left[z_{1\ell}(1+h)+\xi_{1\ell}\right] \prod_{\ell=1}^{q_2} \Gamma\left[z_{2\ell}(1+h)+\xi_{2\ell}\right]}{\prod_{m=1}^{r} \Gamma\left[y_m(1+h)+\eta_m\right]}. \tag{1}$$

ただし

$$\sum_{m=1}^{r} y_m = \sum_{\ell=1}^{q_1} z_{1\ell} + \sum_{\ell=1}^{q_2} z_{2\ell} \tag{2}$$

であり，K は $\mathrm{E}[Z^0] = 1$ となるような h に依存しない定数とする．また，$y_m, z_{1\ell}, z_{2\ell}$ は N の 1 次式であるとする．さらに

$$\beta_{1\ell} = (1-\rho)z_{1\ell}, \beta_{2\ell} = (1-\rho)z_{2\ell}, \varepsilon_m = (1-\rho)y_m$$

とすると $-2\rho \log Z$ のキュムラント母関数は次のように表すことができる．

$$\Psi(t) = -\frac{1}{2} f \log(1-2it) + \sum_{\alpha=1}^{s} \omega_\alpha(\rho) \left\{ (1-2it)^{-\alpha} - 1 \right\} + O(N^{-s-1}). \tag{3}$$

ただし

$$f = -2 \left(\sum_{\ell=1}^{q_1} \xi_{1\ell} + \sum_{\ell=1}^{q_2} \xi_{2\ell} - \sum_{m=1}^{r} \eta_m - \frac{1}{2}(q_1 + q_2 - r) \right), \tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
\omega_\alpha(\rho) = \frac{(-1)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\Biggl(&\sum_{\ell=1}^{q_1}\frac{B_{\alpha+1}(\beta_{1\ell}+\xi_{1\ell})}{(\rho z_{1\ell})^\alpha}+\sum_{\ell=1}^{q_2}\frac{B_{\alpha+1}(\beta_{2\ell}+\xi_{2\ell})}{(\rho z_{2\ell})^\alpha}\\
&-\sum_{m=1}^{r}\frac{B_{\alpha+1}(\varepsilon_m+\eta_m)}{(\rho y_m)^\alpha}\Biggr) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

であり，$B_{\alpha+1}(a)$ は自由度 $(\alpha+1)$ のベルヌーイ多項式である．(3) において $s=1$ とし，(2) と $B_2(a)=a^2-a+(1/6)$ であることを用いると

$$
\Psi(t) = -\frac{1}{2}f\log(1-2it)+\omega_1(\rho)\bigl\{(1-2it)^{-1}-1\bigr\}+O(N^{-2})
$$

となる．ただし

$$
\begin{aligned}
\omega_1(\rho) = \frac{1}{2\rho}\Biggl\{&-(1-\rho)f+\sum_{\ell=1}^{q_1}z_{1\ell}^{-1}\left(\xi_{1\ell}^2-\xi_{1\ell}+\frac{1}{6}\right)+\sum_{\ell=1}^{q_2}z_{2\ell}^{-1}\left(\xi_{2\ell}^2-\xi_{2\ell}+\frac{1}{6}\right)\\
&-\sum_{m=1}^{r}y_m^{-1}\left(\eta_m^2-\eta_m+\frac{1}{6}\right)\Biggr\}.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\rho = 1-\frac{1}{f}\left\{\sum_{\ell=1}^{q_1}z_{1\ell}^{-1}\left(\xi_{1\ell}^2-\xi_{1\ell}+\frac{1}{6}\right)+\sum_{\ell=1}^{q_2}z_{2\ell}^{-1}\left(\xi_{2\ell}^2-\xi_{2\ell}+\frac{1}{6}\right)-\sum_{m=1}^{r}y_m^{-1}\left(\eta_m^2-\eta_m+\frac{1}{6}\right)\right\} \qquad (6)
$$

のとき $\omega_1(\rho)=0$ となる．また，(3) において $s=2$, $\omega_1(\rho)=0$ とし，(2) と $B_3(a)=a^3-(3/2)a^2+(1/2)a$ であることを用いると

$$
\Psi(t) = -\frac{1}{2}f\log(1-2it)+\omega_2(\rho)\bigl\{(1-2it)^{-2}-1\bigr\}+O(N^{-3}).
$$

となる．ただし

$$
\begin{aligned}
\omega_2(\rho) = -\frac{1}{6\rho^2}\Biggl[&3(1-\rho)^2\left(\sum_{\ell=1}^{q_1}\xi_{1\ell}+\sum_{\ell=1}^{q_2}\xi_{2\ell}-\sum_{m=1}^{r}\eta_m\right)\\
&+3(1-\rho)\Biggl\{\sum_{\ell=1}^{q_1}z_{1\ell}^{-1}\left(\xi_{1\ell}^2-\xi_{1\ell}+\frac{1}{6}\right)+\sum_{\ell=1}^{q_2}z_{2\ell}^{-1}\left(\xi_{2\ell}^2-\xi_{2\ell}+\frac{1}{6}\right)\\
&-\sum_{m=1}^{r}y_m^{-1}\left(\eta_m^2-\eta_m+\frac{1}{6}\right)\Biggr\}\\
&+\sum_{\ell=1}^{q_1}z_{1\ell}^{-2}\left(\xi_{1\ell}^3-\frac{3}{2}\xi_{1\ell}^2+\frac{1}{2}\xi_{1\ell}\right)+\sum_{\ell=1}^{q_2}z_{2\ell}^{-2}\left(\xi_{2\ell}^3-\frac{3}{2}\xi_{2\ell}^2+\frac{1}{2}\xi_{2\ell}\right)\\
&-\sum_{m=1}^{r}y_m^{-2}\left(\eta_m^3-\frac{3}{2}\eta_m^2+\frac{1}{2}\eta_m\right)-\frac{3}{2}(1-\rho)^2(q_1+q_2-r)\Biggr]
\end{aligned}
$$

である．よって $-2\rho\log Z$ の分布関数は次のように書ける．

$$\Pr(-2\rho\log Z\le x)=G_f(x)+\omega_2(\rho)\bigl\{G_{f+4}(x)-G_f(x)\bigr\}+O(N^{-3}). \tag{7}$$

ただし $G_f(x)$ は自由度 f の χ^2 分布の分布関数である．さらに，$\rho=1$ とすると $-2\log Z$ の分布関数は次のように書ける．

$$\begin{aligned}\Pr(-2\log Z\le x)=G_f(x)&+\omega_1(1)\bigl\{G_{f+2}(x)-G_f(x)\bigr\}\\&+\omega_2(1)\bigl\{G_{f+4}(x)-G_f(x)\bigr\}+O(N^{-3}).\end{aligned} \tag{8}$$

ただし

$$\begin{aligned}\omega_1(1)=&\frac{1}{2}\Biggl\{\sum_{\ell=1}^{q_1}z_{1\ell}^{-1}\left(\xi_{1\ell}^2-\xi_{1\ell}+\frac{1}{6}\right)+\sum_{\ell=1}^{q_2}z_{2\ell}^{-1}\left(\xi_{2\ell}^2-\xi_{2\ell}+\frac{1}{6}\right)-\sum_{m=1}^{r}y_m^{-1}\left(\eta_m^2-\eta_m+\frac{1}{6}\right)\Biggr\},\\ \omega_2(1)=&-\frac{1}{6}\Biggl\{\sum_{\ell=1}^{q_1}z_{1\ell}^{-2}\left(\xi_{1\ell}^3-\frac{3}{2}\xi_{1\ell}^2+\frac{1}{2}\xi_{1\ell}\right)+\sum_{\ell=1}^{q_2}z_{2\ell}^{-2}\left(\xi_{2\ell}^3-\frac{3}{2}\xi_{2\ell}^2+\frac{1}{2}\xi_{2\ell}\right)\\&-\sum_{m=1}^{r}y_m^{-2}\left(\eta_m^3-\frac{3}{2}\eta_m^2+\frac{1}{2}\eta_m\right)\Biggr\}\end{aligned}$$

である．ここで，λ の h 次帰無モーメントについて考える．

定理 1

$h=0,1,2,\dots,$ に対して λ の h 次帰無モーメントは

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\lambda^h]=&\frac{(Np_1+N_1p_2)^{\frac{(Np_1+N_1p_2)h}{2}}}{N^{\frac{Np_1h}{2}}N_1^{\frac{N_1p_2h}{2}}}\frac{\Gamma_{p_1}\left[\frac{1}{2}(Nh+N-1)\right]\Gamma_{p_2}\left[\frac{1}{2}(N_1h+N_1-p_1-1)\right]}{\Gamma_{p_1}\left[\frac{1}{2}(N-1)\right]\Gamma_{p_2}\left[\frac{1}{2}(N_1-p_1-1)\right]}\\&\times\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}\bigl\{(N-1)p_1+(N_1-1)p_2\bigr\}\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}\bigl\{(N-1)p_1+(N_1-1)p_2\bigr\}+\frac{1}{2}(Np_1+N_1p_2)h\right]}\end{aligned}$$

である．ただし多変量ガンマ関数は

$$\Gamma_{p_j}\left[a\right]=\pi^{\frac{p_j(p_j-1)}{4}}\prod_{\ell=1}^{p_j}\Gamma\left[a-\frac{1}{2}(\ell-1)\right]$$

と定義される．

定理 1 は Chang and Richards (2010) によって与えられている．λ の h 次帰無モーメントを多変量ガンマ関数の定義式を用いて (1) と同じ形となるように変形をすると次のように表せる．

$$\mathrm{E}[\lambda^h] = K \left[\frac{\left\{ \frac{1}{2}(Np_1 + N_1 p_2) \right\}^{\frac{Np_1+N_1p_2}{2}}}{\prod_{\ell=1}^{p_1} \left(\frac{1}{2} N \right)^{\frac{N}{2}} \prod_{\ell=1}^{p_2} \left(\frac{1}{2} N_1 \right)^{\frac{N_1}{2}}} \right]^h$$
$$\times \frac{\prod_{\ell=1}^{p_1} \Gamma\left[\frac{1}{2}N(1+h) - \frac{1}{2}\ell \right] \prod_{\ell=1}^{p_2} \Gamma\left[\frac{1}{2}N_1(1+h) - \frac{1}{2}(\ell + p_1) \right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(Np_1 + N_1p_2)(1+h) - \frac{1}{2}p \right]}.$$

ただし K は

$$K = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}\left\{ (N-1)p_1 + (N_1-1)p_2 \right\} \right]}{\prod_{\ell=1}^{p_1} \Gamma\left[\frac{1}{2}(N-\ell) \right] \prod_{\ell=1}^{p_2} \Gamma\left[\frac{1}{2}(N_1 - p_1 - \ell) \right]}$$

と h に依存しない定数であり，$\mathrm{E}[\lambda^0] = 1$ を満たしている．$Z = \lambda$ とし，変形後の λ の h 次帰無モーメントを (1) と比較することで次のような方程式を得る．

$$\begin{aligned}
r &= 1, q_1 = p_1, q_2 = p_2, \\
z_{1\ell} &= \frac{1}{2}N, \xi_{1\ell} = -\frac{1}{2}\ell, \ell = 1, \dots, p_1, \\
z_{2\ell} &= \frac{1}{2}N_1, \xi_{2\ell} = -\frac{1}{2}(\ell + p_1), \ell = 1, \dots, p_2, \\
y_1 &= \frac{1}{2}(Np_1 + N_1p_2), \eta_1 = -\frac{1}{2}p.
\end{aligned}$$

これらは (2) を満たしている．上記の方程式をそれぞれ (8) と (7) に代入することで H_0 が真であるときの尤度比検定統計量 $-2\log\lambda$ と修正尤度比検定統計量 $-2\rho\log\lambda$ の分布関数を漸近展開できる．

定理 2

$\gamma_1 = N_1/N \to \delta_1 \in (0, 1]$ $(N_1, N \to \infty)$ とすると，H_0 が真であるとき $-2\log\lambda$ の分布関数は

$$
\begin{aligned}
\Pr(-2\log\lambda \le x) = G_f(x) &+ \frac{\beta_{(2)}}{N}\bigl\{G_{f+2}(x) - G_f(x)\bigr\} \\
&+ \frac{\gamma_{(2)}}{N^2}\bigl\{G_{f+4}(x) - G_f(x)\bigr\} + O(N^{-3}). \qquad (9)
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{1}{2}(p+2)(p-1), \\
\beta_{(2)} &= N\omega_1(1) = \frac{1}{24}\biggl[p_1(2p_1^2+9p_1+11) \\
&\quad + \frac{1}{\gamma_1}\bigl\{p_2(2p_2^2+9p_2+11)+6p_1p_2(p+3)\bigr\} - \frac{2}{p_1+\gamma_1p_2}(3p^2+6p+2)\biggr], \\
\gamma_{(2)} &= N^2\omega_2(1) \\
&= \frac{1}{48}\biggl[p_1(p_1+1)(p_1+2)(p_1+3) + \frac{1}{\gamma_1^2}\biggl(p_2(p_2+1)(p_2+2)(p_2+3) \\
&\quad + 2p_1p_2\bigl\{(p_2+1)(2p+p_1+7)+2(p_1+1)(p_1+2)\bigr\}\biggr) \\
&\quad - \frac{4}{(p_1+\gamma_1p_2)^2}p(p+1)(p+2)\biggr]
\end{aligned}
$$

である．また，$M=\rho N$ とすると，H_0 が真であるとき $-2\rho\log\lambda$ の分布関数は

$$
\Pr(-2\rho\log\lambda \le x) = G_f(x) + \frac{\gamma^*_{(2)}}{M^2}\bigl\{G_{f+4}(x) - G_f(x)\bigr\} + O(M^{-3}). \qquad (10)
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
\rho &= 1 - \frac{1}{6(p+2)(p-1)N}\biggl[p_1(2p_1^2+9p_1+11) \\
&\quad + \frac{1}{\gamma_1}\bigl\{p_2(2p_2^2+9p_2+11)+6p_1p_2(p+3)\bigr\} - \frac{2}{p_1+\gamma_1p_2}(3p^2+6p+2)\biggr], \\
\gamma^*_{(2)} &= M^2\omega_2(\rho) = \frac{1}{288}\biggl[-\frac{1}{(p+2)(p-1)}\biggl(p_1(2p_1^2+9p_1+11) \\
&\quad + \frac{1}{\gamma_1}\bigl\{p_2(2p_2^2+9p_2+11)+6p_1p_2(p+3)\bigr\} - \frac{2}{p_1+\gamma_1p_2}(3p^2+6p+2)\biggr)^2 \\
&\quad + 6p_1(p_1+1)(p_1+2)(p_1+3) + \frac{6}{\gamma_1^2}\biggl(p_2(p_2+1)(p_2+2)(p_2+3) \\
&\quad + 2p_1p_2\bigl\{(p_2+1)(2p+p_1+7)+2(p_1+1)(p_1+2)\bigr\}\biggr) \\
&\quad - \frac{24}{(p_1+\gamma_1p_2)^2}p(p+1)(p+2)\biggr].
\end{aligned}
$$

(9) において f の値は Choi (2005) と一致する．(9) と (10) から，H_0 が真であるとき $-2\log\lambda$ と $-2\rho\log\lambda$ の上側 $100\alpha\%$ 点はそれぞれ

$$q_{(2)}(\alpha) = \chi^2_f(\alpha) + \frac{1}{N}\frac{2\beta_{(2)}}{f}\chi^2_f(\alpha) + \frac{1}{N^2}\frac{2\gamma_{(2)}}{f(f+2)}\chi^2_f(\alpha)\{\chi^2_f(\alpha)+f+2\} + O(N^{-3}),$$

$$q^*_{(2)}(\alpha) = \chi^2_f(\alpha) + \frac{1}{M^2}\frac{2\gamma^*_{(2)}}{f(f+2)}\chi^2_f(\alpha)\{\chi^2_f(\alpha)+f+2\} + O(M^{-3})$$

と漸近展開できる．ただし $\chi^2_f(\alpha)$ は自由度 f の χ^2 分布の上側 $100\alpha\%$ 点である．

3.2　k-step の場合

k-step 単調欠測データの下で，次のようなモーメントを持つ確率変数 Z について考える $(0 < Z \leq 1)$.

$$\mathrm{E}[Z^h] = K\left[\frac{\prod_{m=1}^{r} y_m^{y_m}}{\prod_{j=1}^{k}\prod_{\ell=1}^{q_j} z_{j\ell}^{z_{j\ell}}}\right]^h \frac{\prod_{j=1}^{k}\prod_{\ell=1}^{q_j}\Gamma\left[z_{j\ell}(1+h)+\xi_{j\ell}\right]}{\prod_{m=1}^{r}\Gamma\left[y_m(1+h)+\eta_m\right]}. \tag{11}$$

ただし

$$\sum_{m=1}^{r} y_m = \sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{q_j} z_{j\ell} \tag{12}$$

とし，K は $\mathrm{E}[Z^0]=1$ となるような h に依存しない定数とする．また，$y_m, z_{j\ell}$ は N の 1 次式であるとする．

このとき，$-2\log Z$ や $-2\rho\log Z$ の分布関数は 2-step 単調欠測データのときと同様に導出することで次のように漸近展開できる．

$$\begin{aligned}\Pr(-2\log Z \leq x) &= G_f(x) + \omega_1(1)\bigl\{G_{f+2}(x) - G_f(x)\bigr\} \\ &\quad + \omega_2(1)\bigl\{G_{f+4}(x) - G_f(x)\bigr\} + O(N^{-3}), \\ \Pr(-2\rho\log Z \leq x) &= G_f(x) + \omega_2(\rho)\bigl\{G_{f+4}(x) - G_f(x)\bigr\} + O(N^{-3}).\end{aligned}$$

ただし

$$f = -2\left\{\sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{q_j}\xi_{j\ell} - \sum_{m=1}^{r}\eta_m - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{k} q_j - r\right)\right\},$$

$$
\begin{aligned}
\rho &= 1-\frac{1}{f}\left\{\sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{q_j} z_{j\ell}^{-1}\left(\xi_{j\ell}^2-\xi_{j\ell}+\frac{1}{6}\right)-\sum_{m=1}^{r} y_m^{-1}\left(\eta_m^2-\eta_m+\frac{1}{6}\right)\right\},\\
\omega_1(1) &= \frac{1}{2}\left\{\sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{q_j} z_{j\ell}^{-1}\left(\xi_{j\ell}^2-\xi_{j\ell}+\frac{1}{6}\right)-\sum_{m=1}^{r} y_m^{-1}\left(\eta_m^2-\eta_m+\frac{1}{6}\right)\right\},\\
\omega_2(1) &= -\frac{1}{6}\left\{\sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{q_j} z_{j\ell}^{-2}\left(\xi_{j\ell}^3-\frac{3}{2}\xi_{j\ell}^2+\frac{1}{2}\xi_{j\ell}\right)-\sum_{m=1}^{r} y_m^{-2}\left(\eta_m^3-\frac{3}{2}\eta_m^2+\frac{1}{2}\eta_m\right)\right\},\\
\omega_2(\rho) &= -\frac{1}{6\rho^2}\Bigg[3(1-\rho)^2\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{q_j}\xi_{j\ell}-\sum_{m=1}^{r}\eta_m\right)\\
&\quad +3(1-\rho)\left\{\sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{q_j} z_{j\ell}^{-1}\left(\xi_{j\ell}^2-\xi_{j\ell}+\frac{1}{6}\right)-\sum_{m=1}^{r} y_m^{-1}\left(\eta_m^2-\eta_m+\frac{1}{6}\right)\right\}\\
&\quad +\sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{q_j} z_{j\ell}^{-2}\left(\xi_{j\ell}^3-\frac{3}{2}\xi_{j\ell}^2+\frac{1}{2}\xi_{j\ell}\right)-\sum_{m=1}^{r} y_m^{-2}\left(\eta_m^3-\frac{3}{2}\eta_m^2+\frac{1}{2}\eta_m\right)\\
&\quad -\frac{3}{2}(1-\rho)^2\left(\sum_{j=1}^{k}q_j-r\right)\Bigg].
\end{aligned}
$$

定理 3

$h=0,1,2,\ldots,$ に対して $\lambda^{(k)}$ の h 次帰無モーメントは

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[(\lambda^{(k)})^h] &= \frac{\left(\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j\right)^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h}}{\prod_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}^{\frac{1}{2}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h}}\\
&\quad\times\prod_{j=1}^{k}\frac{\Gamma_{p_j}\left[\frac{1}{2}(N_{(1\ldots k-j+1)}h+N_{(1\ldots k-j+1)}-p_{(1\ldots j-1)}-1)\right]}{\Gamma_{p_j}\left[\frac{1}{2}(N_{(1\ldots k-j+1)}-p_{(1\ldots j-1)}-1)\right]}\\
&\quad\times\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}(N_{(1\ldots k-j+1)}-1)p_j\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}(N_{(1\ldots k-j+1)}-1)p_j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h\right]}
\end{aligned}
$$

である．ただし $j=1$ のとき $p_{(1\ldots j-1)}=0$ と定義する．

定理 3 の証明は付録 B を参照せよ．$\lambda^{(k)}$ の h 次帰無モーメントを多変量ガンマ関数の定義

式を用いて (11) と同じ形となるように変形をすると，

$$
\mathrm{E}[(\lambda^{(k)})^h] = K \left[\frac{\left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} N_{(1\ldots k-j+1)} p_j \right)^{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} N_{(1\ldots k-j+1)} p_j}}{\prod_{j=1}^{k} \prod_{\ell=1}^{p_j} \left(\frac{1}{2} N_{(1\ldots k-j+1)} \right)^{\frac{1}{2} N_{(1\ldots k-j+1)}}} \right]^h
$$

$$
\times \frac{\prod_{j=1}^{k} \prod_{\ell=1}^{p_j} \Gamma \left[\frac{1}{2} N_{(1\ldots k-j+1)} (1+h) - \frac{1}{2} (\ell + p_{(1\ldots j-1)}) \right]}{\Gamma \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{k} N_{(1\ldots k-j+1)} p_j \right) (1+h) - \frac{1}{2} p \right]}
$$

となる．ただし K は

$$
K = \frac{\Gamma \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} (N_{(1\ldots k-j+1)} - 1) p_j \right]}{\prod_{j=1}^{k} \prod_{\ell=1}^{p_j} \Gamma \left[\frac{1}{2} (N_{(1\ldots k-j+1)} - p_{(1\ldots j-1)} - \ell) \right]}
$$

と h に依存しない定数であり，$\mathrm{E}[(\lambda^{(k)})^0] = 1$ を満たしている．$Z = \lambda^{(k)}$ とし，変形後の $\lambda^{(k)}$ の h 次帰無モーメントを (11) と比較することで次のような方程式を得る．

$j = 1, \ldots, k$ に対して

$$
\begin{aligned}
& r = 1, q_j = p_j, z_{j\ell} = \frac{1}{2} N_{(1\ldots k-j+1)}, \xi_{j\ell} = -\frac{1}{2} (\ell + p_{(1\ldots j-1)}), \ell = 1, \ldots, p_j, \\
& y_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} N_{(1\ldots k-j+1)} p_j, \eta_1 = -\frac{1}{2} p.
\end{aligned}
$$

これらは (12) を満たしている．上記の方程式をそれぞれ $-2\log Z$ と $-2\rho \log Z$ の分布関数に代入することで，尤度比検定統計量 $-2\log\lambda^{(k)}$ と修正尤度比検定統計量 $-2\rho\log\lambda^{(k)}$ の分布関数を漸近展開できる．

定理 4

$M = \rho N$ とし，$i = 1, \ldots, k,\ j = 2, \ldots, k$ に対して $\gamma_i = N_i/N, \gamma_{(1\ldots k-j+1)} = \gamma_1 + \cdots + \gamma_{k-j+1} = N_{(1\ldots k-j+1)}/N \to \delta_{k-j+1} \in (0,1]\ (N_{(1\ldots k-j+1)}, N \to \infty), \gamma_{(1\ldots k)} = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k = 1$ とすると H_0 が真であるとき

$$\begin{aligned}\Pr(-2\log\lambda^{(k)} \le x) &= G_f(x) + \frac{\beta_{(k)}}{N}\bigl\{G_{f+2}(x) - G_f(x)\bigr\} \\ &\quad + \frac{\gamma_{(k)}}{N^2}\bigl\{G_{f+4}(x) - G_f(x)\bigr\} + O(N^{-3}), \qquad (13)\\ \Pr(-2\rho\log\lambda^{(k)} \le x) &= G_f(x) + \frac{\gamma^*_{(k)}}{M^2}\bigl\{G_{f+4}(x) - G_f(x)\bigr\} + O(M^{-3}). \qquad (14)\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2}(p+2)(p-1),\\ \rho &= 1 - \frac{1}{6(p+2)(p-1)N}\Biggl[\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\gamma_{(1\ldots k-j+1)}}\bigl\{p_j(2p_j^2+9p_j+11) + 6p_{(1\ldots j-1)}p_j(p_{(1\ldots j)}+3)\bigr\}\\ &\quad - \frac{2}{\sum_{j=1}^{k}\gamma_{(1\ldots k-j+1)}p_j}(3p^2+6p+2)\Biggr], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{(k)} &= N\omega_1(1) = \frac{1}{24}\Biggl[\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\gamma_{(1\ldots k-j+1)}}\bigl\{p_j(2p_j^2+9p_j+11) + 6p_{(1\ldots j-1)}p_j(p_{(1\ldots j)}+3)\bigr\}\\ &\quad - \frac{2}{\sum_{j=1}^{k}\gamma_{(1\ldots k-j+1)}p_j}(3p^2+6p+2)\Biggr], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{(k)} &= N^2\omega_2(1) = \frac{1}{48}\Biggl[\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\gamma^2_{(1\ldots k-j+1)}}\Bigl(p_j(p_j+1)(p_j+2)(p_j+3)\\ &\quad + 2p_{(1\ldots j-1)}p_j\bigl\{(p_j+1)(2p_{(1\ldots j)}+p_{(1\ldots j-1)}+7) + 2(p_{(1\ldots j-1)}+1)(p_{(1\ldots j-1)}+2)\bigr\}\Bigr)\\ &\quad - \frac{4}{\left(\sum_{j=1}^{k}\gamma_{(1\ldots k-j+1)}p_j\right)^2}p(p+1)(p+2)\Biggr], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma^*_{(k)} &= M^2\omega_2(\rho) = \frac{1}{288}\Biggl[-\frac{1}{(p+2)(p-1)}\Biggl(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\gamma_{(1\ldots k-j+1)}}\bigl\{p_j(2p_j^2+9p_j+11)\\ &\quad + 6p_{(1\ldots j-1)}p_j(p_{(1\ldots j)}+3)\bigr\}\\ &\quad - \frac{2}{\sum_{j=1}^{k}\gamma_{(1\ldots k-j+1)}p_j}(3p^2+6p+2)\Biggr)^2 + \sum_{j=1}^{k}\frac{6}{\gamma^2_{(1\ldots k-j+1)}}\Bigl(p_j(p_j+1)(p_j+2)(p_j+3)\\ &\quad + 2p_{(1\ldots j-1)}p_j\bigl\{(p_j+1)(2p_{(1\ldots j)}+p_{(1\ldots j-1)}+7) + 2(p_{(1\ldots j-1)}+1)(p_{(1\ldots j-1)}+2)\bigr\}\Bigr) \end{aligned}$$

$$
-\frac{24}{\left(\sum_{j=1}^{k}\gamma_{(1\ldots k-j+1)}p_j\right)^2}p(p+1)(p+2)\Bigg]
$$

である．

(13) と (14) から，H_0 が真であるとき $-2\log\lambda^{(k)}$ と $-2\rho\log\lambda^{(k)}$ の上側 $100\alpha\%$ 点はそれぞれ次のように漸近展開できる．

$$
\begin{aligned}
q_{(k)}(\alpha) &= \chi_f^2(\alpha)+\frac{1}{N}\frac{2\beta_{(k)}}{f}\chi_f^2(\alpha)+\frac{1}{N^2}\frac{2\gamma_{(k)}}{f(f+2)}\chi_f^2(\alpha)\{\chi_f^2(\alpha)+f+2\}+O(N^{-3}),\\
q_{(k)}^*(\alpha) &= \chi_f^2(\alpha)+\frac{1}{M^2}\frac{2\gamma_{(k)}^*}{f(f+2)}\chi_f^2(\alpha)\{\chi_f^2(\alpha)+f+2\}+O(M^{-3}).
\end{aligned}
$$

ここで $-2\log\lambda^{(k)}$ の近似上側 $100\alpha\%$ 点をそれぞれ $q_1(\alpha),q_2(\alpha),q_3(\alpha)$ とし，$-2\rho\log\lambda^{(k)}$ の近似上側 $100\alpha\%$ 点をそれぞれ $q_1(\alpha),q^\dagger(\alpha)$ と提案する．ただし

$$
q_1(\alpha)=\chi_f^2(\alpha), \tag{15}
$$

$$
q_2(\alpha)=\chi_f^2(\alpha)+\frac{1}{N}\frac{2\beta_{(k)}}{f}\chi_f^2(\alpha), \tag{16}
$$

$$
q_3(\alpha)=\chi_f^2(\alpha)+\frac{1}{N}\frac{2\beta_{(k)}}{f}\chi_f^2(\alpha)+\frac{1}{N^2}\frac{2\gamma_{(k)}}{f(f+2)}\chi_f^2(\alpha)\{\chi_f^2(\alpha)+f+2\}, \tag{17}
$$

$$
q^\dagger(\alpha)=\chi_f^2(\alpha)+\frac{1}{M^2}\frac{2\gamma_{(k)}^*}{f(f+2)}\chi_f^2(\alpha)\{\chi_f^2(\alpha)+f+2\} \tag{18}
$$

である．

4 σ^2 の推定について

4.1 2-step の場合

2-step 単調欠測データの下で，H_0 の下での σ^2 の MLE は

$$
\widetilde{\sigma}^2=\frac{1}{N(p_1+\gamma_1p_2)}\left(\mathrm{tr}(\boldsymbol{W}_{11}^{(1)}+\boldsymbol{W}_{11}^{(2)})+\mathrm{tr}\boldsymbol{W}_{22}^{(1)}\right)
$$

と表せる．$\widetilde{\sigma}^2$ の期待値を取ると

$$
\mathrm{E}[\widetilde{\sigma}^2]=\left(1-\frac{p}{N(p_1+\gamma_1p_2)}\right)\sigma^2
$$

であるため，σ^2 の不偏推定量を

$$\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}} = \left(1 - \frac{p}{N(p_1+\gamma_1 p_2)}\right)^{-1} \widetilde{\sigma}^2$$

と与える．

4.2 k-step の場合

k-step 単調欠測データの下で，H_0 の下での σ^2 の MLE は次のように書ける．

$$\widetilde{\sigma}^2 = \left(N \sum_{j=1}^{k} \gamma_{(1\ldots k-j+1)} p_j\right)^{-1} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{tr} \boldsymbol{W}_{jj}^{[k-j+1]}.$$

$\widetilde{\sigma}^2$ の期待値は

$$\mathrm{E}[\widetilde{\sigma}^2] = \left\{1 - p\left(N \sum_{j=1}^{k} \gamma_{(1\ldots k-j+1)} p_j\right)^{-1}\right\} \sigma^2$$

であることから，σ^2 の不偏推定量を

$$\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}} = \left\{1 - p\left(N \sum_{j=1}^{k} \gamma_{(1\ldots k-j+1)} p_j\right)^{-1}\right\}^{-1} \widetilde{\sigma}^2 \tag{19}$$

と与える．次に，$\widetilde{\sigma}^2$ と $\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}$ を MSE の観点から比較する．$\widetilde{\sigma}^2$ と $\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}$ の分散はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[\widetilde{\sigma}^2] &= 2\left\{N\left(\sum_{j=1}^{k} \gamma_{(1\ldots k-j+1)} p_j\right) - p\right\}\left(N \sum_{j=1}^{k} \gamma_{(1\ldots k-j+1)} p_j\right)^{-2} \sigma^4, \\
\mathrm{Var}[\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}] &= 2\left\{N\left(\sum_{j=1}^{k} \gamma_{(1\ldots k-j+1)} p_j\right) - p\right\}^{-1} \sigma^4
\end{aligned}$$

であることから，$\widetilde{\sigma}^2$ と $\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}$ の MSE はそれぞれ次のように書ける．

$$\begin{aligned}
\mathrm{MSE}[\widetilde{\sigma}^2] &= \mathrm{Var}[\widetilde{\sigma}^2] + (\mathrm{E}[\widetilde{\sigma}^2] - \sigma^2)^2 \\
&= \left[2\left\{N\left(\sum_{j=1}^{k} \gamma_{(1\ldots k-j+1)} p_j\right) - p\right\} + p^2\right]\left(N \sum_{j=1}^{k} \gamma_{(1\ldots k-j+1)} p_j\right)^{-2} \sigma^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{MSE}[\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}] &= \mathrm{Var}[\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}] + (\mathrm{E}[\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}] - \sigma^2)^2 \\
&= 2\left\{N\left(\sum_{j=1}^{k} \gamma_{(1\ldots k-j+1)} p_j\right) - p\right\}^{-1} \sigma^4.
\end{aligned}$$

よって $\mathrm{MSE}[\widetilde{\sigma}^2]$ と $\mathrm{MSE}[\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}]$ の大小関係は

$$N > N_1 > p, \sigma^2 > 0, N \sum_{j=1}^{k} \gamma_{(1\ldots k-j+1)} p_j - p > 0$$

より，次のようになる．

$$\begin{cases} \mathrm{MSE}[\widetilde{\sigma}^2] \leq \mathrm{MSE}[\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}] & p \leq 4 \text{ のとき} \\ \mathrm{MSE}[\widetilde{\sigma}^2] \geq \mathrm{MSE}[\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}] & p > 4 \text{ のとき} \end{cases}$$

ただし等号成立は $N \to \infty$ のときである．以上から $p \leq 4$ のとき $\widetilde{\sigma}^2$ の方が良い推定量であるが，$p > 4$ のとき $\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}$ の方が良い推定量であると言える．ただし等号成立は $N \to \infty$ のときであり，(19) と**定理 4** での $\gamma_{(1\ldots k-j+1)}$ の収束性から $\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}} \to \widetilde{\sigma}^2$ となるため，同じ推定量となる．

5　アフィン変換

2-step 単調欠測データと 3-step 単調欠測データの下で，尤度比におけるアフィン変換について考える．

5.1　2-step の場合

$\boldsymbol{\Lambda}_{11}, \boldsymbol{\Lambda}_{22}$ をそれぞれ $p_1 \times p_1, p_2 \times p_2$ 正定値対称行列，$\boldsymbol{\Lambda}_{21}$ を $p_2 \times p_1$ 行列，$\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2$ をそれぞれ $p_1 \times 1, p_2 \times 1$ ベクトルとする．このとき

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Lambda}_{22} \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{p_1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{21} & \boldsymbol{I}_{p_2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_1 \\ \boldsymbol{\nu}_2 \end{pmatrix}$$

とおき，次のようなアフィン変換を考える．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^*_{1j} \\ \boldsymbol{x}^*_{2j} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{C} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{1j} \\ \boldsymbol{x}_{2j} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\nu},\ j = 1, \ldots, N_1,$$
$$\boldsymbol{x}^*_{1j} = \boldsymbol{\Lambda}_{11}\boldsymbol{x}_{1j} + \boldsymbol{\nu}_1,\ j = N_1 + 1, \ldots, N.$$

このとき

$$\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{C} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{1j} \\ \boldsymbol{x}_{2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{11}\boldsymbol{x}_{1j} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{\Lambda}_{21}\boldsymbol{x}_{1j} + \boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{x}_{2j} \end{pmatrix},\ j = 1, \ldots, N_1$$

よりアフィン変換は次のように書ける．

$$\boldsymbol{x}^*_{1j} = \boldsymbol{\Lambda}_{11}\boldsymbol{x}_{1j} + \boldsymbol{\nu}_1,\ j = 1,\ldots,N,$$
$$\boldsymbol{x}^*_{2j} = \boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{\Lambda}_{21}\boldsymbol{x}_{1j} + \boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{x}_{2j} + \boldsymbol{\nu}_2,\ j = 1,\ldots,N_1.$$

アフィン変換後の尤度比 λ を λ^* とすると

$$\lambda^* = \frac{\left|\frac{1}{N}\left(\boldsymbol{W}^{(1)^*}_{11} + \boldsymbol{W}^{(2)^*}_{11}\right)\right|^{\frac{N}{2}} \left|\frac{1}{N_1}\boldsymbol{W}^{(1)^*}_{22\cdot 1}\right|^{\frac{N_1}{2}}}{\left\{\frac{1}{Np_1 + N_1p_2}\left(\mathrm{tr}(\boldsymbol{W}^{(1)^*}_{11} + \boldsymbol{W}^{(2)^*}_{11}) + \mathrm{tr}\boldsymbol{W}^{(1)^*}_{22}\right)\right\}^{\frac{Np_1+N_1p_2}{2}}}.$$

ただし

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{(1)^*}_1 = \frac{1}{N_1}\sum_{j=1}^{N_1}\boldsymbol{x}^*_{1j},\ \overline{\boldsymbol{x}}^{(1)^*}_2 = \frac{1}{N_1}\sum_{j=1}^{N_1}\boldsymbol{x}^*_{2j},\ \overline{\boldsymbol{x}}^{(2)^*}_1 = \frac{1}{N_2}\sum_{j=N_1+1}^{N}\boldsymbol{x}^*_{1j},$$
$$\boldsymbol{W}^{(1)^*}_{11} = \sum_{j=1}^{N_1}(\boldsymbol{x}^*_{1j} - \overline{\boldsymbol{x}}^{(1)^*}_1)(\boldsymbol{x}^*_{1j} - \overline{\boldsymbol{x}}^{(1)^*}_1)',$$
$$\boldsymbol{W}^{(1)^*}_{12} = (\boldsymbol{W}^{(1)^*}_{21})' = \sum_{j=1}^{N_1}(\boldsymbol{x}^*_{1j} - \overline{\boldsymbol{x}}^{(1)^*}_1)(\boldsymbol{x}^*_{2j} - \overline{\boldsymbol{x}}^{(1)^*}_2)',$$
$$\boldsymbol{W}^{(1)^*}_{22} = \sum_{j=1}^{N_1}(\boldsymbol{x}^*_{2j} - \overline{\boldsymbol{x}}^{(1)^*}_2)(\boldsymbol{x}^*_{2j} - \overline{\boldsymbol{x}}^{(1)^*}_2)',$$
$$\boldsymbol{W}^{(2)^*}_{11} = \sum_{j=N_1+1}^{N}(\boldsymbol{x}^*_{1j} - \overline{\boldsymbol{x}}^{(2)^*}_1)(\boldsymbol{x}^*_{1j} - \overline{\boldsymbol{x}}^{(2)^*}_1)' + \frac{N_1N_2}{N}(\overline{\boldsymbol{x}}^{(1)^*}_1 - \overline{\boldsymbol{x}}^{(2)^*}_1)(\overline{\boldsymbol{x}}^{(1)^*}_1 - \overline{\boldsymbol{x}}^{(2)^*}_1)',$$
$$\boldsymbol{W}^{(1)^*}_{22\cdot 1} = \boldsymbol{W}^{(1)^*}_{22} - \boldsymbol{W}^{(1)^*}_{21}(\boldsymbol{W}^{(1)^*}_{11})^{-1}\boldsymbol{W}^{(1)^*}_{12}$$

である．このとき

$$\boldsymbol{W}^{(1)^*}_{11} = \boldsymbol{\Lambda}_{11}\boldsymbol{W}^{(1)}_{11}\boldsymbol{\Lambda}_{11},$$
$$\boldsymbol{W}^{(1)^*}_{12} = (\boldsymbol{W}^{(1)^*}_{21})' = \boldsymbol{\Lambda}_{11}\boldsymbol{W}^{(1)}_{11}\boldsymbol{\Lambda}'_{21}\boldsymbol{\Lambda}_{22} + \boldsymbol{\Lambda}_{11}\boldsymbol{W}^{(1)}_{12}\boldsymbol{\Lambda}_{22},$$
$$\boldsymbol{W}^{(1)^*}_{22} = \boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{\Lambda}_{21}\boldsymbol{W}^{(1)}_{11}\boldsymbol{\Lambda}'_{21}\boldsymbol{\Lambda}_{22} + \boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{\Lambda}_{21}\boldsymbol{W}^{(1)}_{12}\boldsymbol{\Lambda}_{22} + \boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{W}^{(1)}_{21}\boldsymbol{\Lambda}'_{21}\boldsymbol{\Lambda}_{22} + \boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{W}^{(1)}_{22}\boldsymbol{\Lambda}_{22},$$
$$\boldsymbol{W}^{(2)^*}_{11} = \boldsymbol{\Lambda}_{11}\boldsymbol{W}^{(2)}_{11}\boldsymbol{\Lambda}_{11},$$
$$\boldsymbol{W}^{(1)^*}_{22\cdot 1} = \boldsymbol{\Lambda}_{11}\boldsymbol{W}^{(1)}_{22\cdot 1}\boldsymbol{\Lambda}_{11}$$

と書ける．ここでアフィン変換後の平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}^*$ と分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}^*$ について考えるとそれぞれ $\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{\Lambda C \mu} + \boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\Sigma}^* = \boldsymbol{\Lambda C \Sigma}(\boldsymbol{\Lambda C})'$ であり，

$$\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{\Lambda C \mu}, \boldsymbol{\Lambda C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{\Lambda}_{21} & \boldsymbol{\Lambda}_{22} \end{pmatrix} = (\sigma^2)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-\frac{1}{2}} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{\Sigma}_{22\cdot 1}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} & \boldsymbol{\Sigma}_{22\cdot 1}^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

とすれば，$\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\Sigma}^* = \sigma^2 \boldsymbol{I}_p$ となる．ただし $\boldsymbol{\Sigma}_{22\cdot 1} = \boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}$ である．よって

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$$

が与えられたとき $\boldsymbol{\Lambda C}$ を用いて変換すれば尤度比検定統計量 $-2\log\lambda$ と修正尤度比検定統計量 $-2\rho\log\lambda$ の帰無分布を導出するのに一般性を失うことなく，$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \boldsymbol{I}_p$ とできる．H_0 が真であるとき，$\boldsymbol{\Lambda}_{11} = \boldsymbol{I}_{p_1}, \boldsymbol{\Lambda}_{22} = \boldsymbol{I}_{p_2}, \boldsymbol{\Lambda}_{21} = \boldsymbol{O}$ より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{W}_{11}^{(1)^*} + \boldsymbol{W}_{11}^{(2)^*} &= \boldsymbol{W}_{11}^{(1)} + \boldsymbol{W}_{11}^{(2)}, \\ \boldsymbol{W}_{22}^{(1)^*} &= \boldsymbol{W}_{22}^{(1)}, \\ \boldsymbol{W}_{22\cdot 1}^{(1)^*} &= \boldsymbol{W}_{22\cdot 1}^{(1)} \end{aligned}$$

から

$$\lambda^* = \frac{\left|\frac{1}{N}\left(\boldsymbol{W}_{11}^{(1)} + \boldsymbol{W}_{11}^{(2)}\right)\right|^{\frac{N}{2}} \left|\frac{1}{N_1}\boldsymbol{W}_{22\cdot 1}^{(1)}\right|^{\frac{N_1}{2}}}{\left\{\frac{1}{Np_1 + N_1 p_2}\left(\mathrm{tr}(\boldsymbol{W}_{11}^{(1)} + \boldsymbol{W}_{11}^{(2)}) + \mathrm{tr}\boldsymbol{W}_{22}^{(1)}\right)\right\}^{\frac{Np_1 + N_1 p_2}{2}}} = \lambda.$$

よって，アフィン変換に対して尤度比 λ は H_0 の下で不変である．

5.2 3-step の場合

$\boldsymbol{\Lambda}_{11}$, $\boldsymbol{\Lambda}_{22}$, $\boldsymbol{\Lambda}_{33}$ をそれぞれ $p_1 \times p_1$, $p_2 \times p_2$, $p_3 \times p_3$ 正定値対称行列，$\boldsymbol{\Lambda}_{21}$ を $p_2 \times p_1$ 行列，$\boldsymbol{\Lambda}_{3(12)}$ を $p_3 \times p_{(12)}$ 行列，$\boldsymbol{\nu}_1$, $\boldsymbol{\nu}_2$, $\boldsymbol{\nu}_3$ をそれぞれ $p_1 \times 1$, $p_2 \times 1$, $p_3 \times 1$ ベクトルとする．このとき

$$\boldsymbol{\Lambda}^{(1)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{11} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Lambda}_{22} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Lambda}_{33} \end{pmatrix}, \boldsymbol{C}^{(1)} = \left(\begin{array}{cc|c} \boldsymbol{I}_{p_1} & \boldsymbol{O} & \\ \boldsymbol{\Lambda}_{21} & \boldsymbol{I}_{p_2} & \boldsymbol{O} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\boldsymbol{\Lambda}_{3(12)}} & \boldsymbol{I}_{p_3} \end{array}\right), \quad \boldsymbol{\nu}^{(1)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_1 \\ \boldsymbol{\nu}_2 \\ \boldsymbol{\nu}_3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^{(2)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_{11} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Lambda}_{22}\end{pmatrix},\boldsymbol{C}^{(2)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{p_1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{\Lambda}_{21} & \boldsymbol{I}_{p_2}\end{pmatrix},\boldsymbol{\nu}^{(2)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\nu}_1\\ \boldsymbol{\nu}_2\end{pmatrix}$$

とおき，次のようなアフィン変換を考える．

$$\boldsymbol{x}^*_{(123),j}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^*_{1j}\\ \boldsymbol{x}^*_{2j}\\ \boldsymbol{x}^*_{3j}\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}^{(1)}\boldsymbol{C}^{(1)}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{1j}\\ \boldsymbol{x}_{2j}\\ \boldsymbol{x}_{3j}\end{pmatrix}+\boldsymbol{\nu}^{(1)},\ j=1,\dots,N_1,$$

$$\boldsymbol{x}^*_{(12),j}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^*_{1j}\\ \boldsymbol{x}^*_{2j}\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}^{(2)}\boldsymbol{C}^{(2)}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{1j}\\ \boldsymbol{x}_{2j}\end{pmatrix}+\boldsymbol{\nu}^{(2)},\ j=N_1+1,\dots,N_{(12)},$$

$$\boldsymbol{x}^*_{1j}=\boldsymbol{\Lambda}_{11}\boldsymbol{x}_{1j}+\boldsymbol{\nu}_1,\ j=N_{(12)}+1,\dots,N.$$

このとき

$$\boldsymbol{\Lambda}^{(1)}\boldsymbol{C}^{(1)}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{1j}\\ \boldsymbol{x}_{2j}\\ \boldsymbol{x}_{3j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_{11}\boldsymbol{x}_{1j}\\ \boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{\Lambda}_{21}\boldsymbol{x}_{1j}+\boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{x}_{2j}\\ \boldsymbol{\Lambda}_{33}\boldsymbol{\Lambda}_{3(12)}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{1j}\\ \boldsymbol{x}_{2j}\end{pmatrix}+\boldsymbol{\Lambda}_{33}\boldsymbol{x}_{3j}\end{pmatrix},\ j=1,\dots,N_1,$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^{(2)}\boldsymbol{C}^{(2)}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{1j}\\ \boldsymbol{x}_{2j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_{11}\boldsymbol{x}_{1j}\\ \boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{\Lambda}_{21}\boldsymbol{x}_{1j}+\boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{x}_{2j}\end{pmatrix},\ j=N_1+1,\dots,N_{(12)}$$

となることからアフィン変換は次のように書ける．

$$\boldsymbol{x}^*_{1j}=\boldsymbol{\Lambda}_{11}\boldsymbol{x}_{1j}+\boldsymbol{\nu}_1,\ j=1,\dots,N,$$

$$\boldsymbol{x}^*_{2j}=\boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{\Lambda}_{21}\boldsymbol{x}_{1j}+\boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{x}_{2j}+\boldsymbol{\nu}_2,\ j=1,\dots,N_{(12)}$$

$$\boldsymbol{x}^*_{3j}=\boldsymbol{\Lambda}_{33}\boldsymbol{\Lambda}_{3(12)}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{1j}\\ \boldsymbol{x}_{2j}\end{pmatrix}+\boldsymbol{\Lambda}_{33}\boldsymbol{x}_{3j}+\boldsymbol{\nu}_3,\ j=1,\dots,N_1.$$

アフィン変換後の尤度比 $\lambda^{(3)}$ を $\lambda^{(3)*}$ とすると

$$\lambda^{(3)*}=\frac{\left|\frac{1}{N}\boldsymbol{W}^{[3]^*}_{11}\right|^{\frac{N}{2}}\left|\frac{1}{N_{(12)}}\boldsymbol{W}^{[2]^*}_{22\cdot1}\right|^{\frac{N_{(12)}}{2}}\left|\frac{1}{N_1}\boldsymbol{W}^{[1]^*}_{33\cdot12}\right|^{\frac{N_1}{2}}}{\left\{\frac{1}{Np_1+N_{(12)}p_2+N_1p_3}\left(\mathrm{tr}\boldsymbol{W}^{[3]^*}_{11}+\mathrm{tr}\boldsymbol{W}^{[2]^*}_{22}+\mathrm{tr}\boldsymbol{W}^{[1]^*}_{33}\right)\right\}^{\frac{Np_1+N_{(12)}p_2+N_1p_3}{2}}}.$$

ただし

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{(1)^*}_1=\frac{1}{N_1}\sum_{j=1}^{N_1}\boldsymbol{x}^*_{1j},\ \overline{\boldsymbol{x}}^{(1)^*}_2=\frac{1}{N_1}\sum_{j=1}^{N_1}\boldsymbol{x}^*_{2j},\ \overline{\boldsymbol{x}}^{(1)^*}_3=\frac{1}{N_1}\sum_{j=1}^{N_1}\boldsymbol{x}^*_{3j},$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{x}}_1^{(2)^*} &= \frac{1}{N_2}\sum_{j=N_1+1}^{N_{(12)}} \boldsymbol{x}_{1j}^*,\ \overline{\boldsymbol{x}}_2^{(2)^*} = \frac{1}{N_2}\sum_{j=N_1+1}^{N_{(12)}} \boldsymbol{x}_{2j}^*,\ \overline{\boldsymbol{x}}_1^{(3)^*} = \frac{1}{N_3}\sum_{j=N_{(12)}+1}^{N} \boldsymbol{x}_{1j}^*,\\
\overline{\boldsymbol{x}}_1^{[1]^*} &= \overline{\boldsymbol{x}}_1^{(1)^*},\ \overline{\boldsymbol{x}}_2^{[1]^*} = \overline{\boldsymbol{x}}_2^{(1)^*},\ \overline{\boldsymbol{x}}_1^{[2]^*} = \frac{1}{N_{(12)}}(N_1\overline{\boldsymbol{x}}_1^{(1)^*} + N_2\overline{\boldsymbol{x}}_1^{(2)^*}),\\
\overline{\boldsymbol{x}}_{[2]}^{[1]^*} &= \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{x}}_1^{[1]^*} \\ \overline{\boldsymbol{x}}_2^{[1]^*} \end{pmatrix},\ \overline{\boldsymbol{x}}_{[1]}^{[2]^*} = \overline{\boldsymbol{x}}_1^{[2]^*},\\
\overline{\boldsymbol{x}}_{[3]}^{(1)^*} &= \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{x}}_1^{(1)^*} \\ \overline{\boldsymbol{x}}_2^{(1)^*} \\ \overline{\boldsymbol{x}}_3^{(1)^*} \end{pmatrix},\ \overline{\boldsymbol{x}}_{[2]}^{(2)^*} = \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{x}}_1^{(2)^*} \\ \overline{\boldsymbol{x}}_2^{(2)^*} \end{pmatrix},\ \overline{\boldsymbol{x}}_{[1]}^{(3)^*} = \overline{\boldsymbol{x}}_1^{(3)^*},\\
\boldsymbol{W}^{(1)^*} &= \sum_{j=1}^{N_1}(\boldsymbol{x}_{(123),j}^* - \overline{\boldsymbol{x}}_{[3]}^{(1)^*})(\boldsymbol{x}_{(123),j}^* - \overline{\boldsymbol{x}}_{[3]}^{(1)^*})'\\
&= \left(\begin{array}{cc|c} \boldsymbol{W}_{11}^{(1)^*} & \boldsymbol{W}_{12}^{(1)^*} & \boldsymbol{W}_{13}^{(1)^*} \\ \boldsymbol{W}_{21}^{(1)^*} & \boldsymbol{W}_{22}^{(1)^*} & \boldsymbol{W}_{23}^{(1)^*} \\ \hline \boldsymbol{W}_{31}^{(1)^*} & \boldsymbol{W}_{32}^{(1)^*} & \boldsymbol{W}_{33}^{(1)^*} \end{array}\right)\\
&= \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{W}_{(12)(12)}^{(1)^*} & \boldsymbol{W}_{(12)3}^{(1)^*} \\ \hline \boldsymbol{W}_{3(12)}^{(1)^*} & \boldsymbol{W}_{33}^{(1)^*} \end{array}\right),\\
\boldsymbol{W}^{(2)^*} &= \sum_{j=N_1+1}^{N_{(12)}}(\boldsymbol{x}_{(12),j}^* - \overline{\boldsymbol{x}}_{[2]}^{(2)^*})(\boldsymbol{x}_{(12),j}^* - \overline{\boldsymbol{x}}_{[2]}^{(2)^*})' + \frac{N_1N_2}{N_{(12)}}(\overline{\boldsymbol{x}}_{[2]}^{(2)^*} - \overline{\boldsymbol{x}}_{[2]}^{[1]^*})(\overline{\boldsymbol{x}}_{[2]}^{(2)^*} - \overline{\boldsymbol{x}}_{[2]}^{[1]^*})'\\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{W}_{11}^{(2)^*} & \boldsymbol{W}_{12}^{(2)^*} \\ \boldsymbol{W}_{21}^{(2)^*} & \boldsymbol{W}_{22}^{(2)^*} \end{pmatrix},\\
\boldsymbol{W}^{(3)^*} &= \sum_{j=N_{(12)}+1}^{N}(\boldsymbol{x}_{1j}^* - \overline{\boldsymbol{x}}_{[1]}^{(3)^*})(\boldsymbol{x}_{1j}^* - \overline{\boldsymbol{x}}_{[1]}^{(3)^*})' + \frac{N_{(12)}N_3}{N}(\overline{\boldsymbol{x}}_{[1]}^{(3)^*} - \overline{\boldsymbol{x}}_{[1]}^{[2]^*})(\overline{\boldsymbol{x}}_{[1]}^{(3)^*} - \overline{\boldsymbol{x}}_{[1]}^{[2]^*})'\\
&= \boldsymbol{W}_{11}^{(3)^*},\\
\boldsymbol{W}_{(12)(12)}^{[1]^*} &= \boldsymbol{W}_{(12)(12)}^{(1)^*}, \boldsymbol{W}_{(12)3}^{[1]^*} = \boldsymbol{W}_{(12)3}^{(1)^*}, \boldsymbol{W}_{3(12)}^{[1]^*} = \boldsymbol{W}_{3(12)}^{(1)^*}, \boldsymbol{W}_{33}^{[1]^*} = \boldsymbol{W}_{33}^{(1)^*},\\
\boldsymbol{W}_{11}^{[2]^*} &= \boldsymbol{W}_{11}^{(1)^*} + \boldsymbol{W}_{11}^{(2)^*}, \boldsymbol{W}_{12}^{[2]^*} = \boldsymbol{W}_{12}^{(1)^*} + \boldsymbol{W}_{12}^{(2)^*},\\
\boldsymbol{W}_{21}^{[2]^*} &= \boldsymbol{W}_{21}^{(1)^*} + \boldsymbol{W}_{21}^{(2)^*}, \boldsymbol{W}_{22}^{[2]^*} = \boldsymbol{W}_{22}^{(1)^*} + \boldsymbol{W}_{22}^{(2)^*},\\
\boldsymbol{W}_{11}^{[3]^*} &= \boldsymbol{W}_{11}^{(1)^*} + \boldsymbol{W}_{11}^{(2)^*} + \boldsymbol{W}_{11}^{(3)^*},\\
\boldsymbol{W}_{22\cdot 1}^{[2]^*} &= \boldsymbol{W}_{22}^{[2]^*} - \boldsymbol{W}_{21}^{[2]^*}(\boldsymbol{W}_{11}^{[2]^*})^{-1}\boldsymbol{W}_{12}^{[2]^*},\\
\boldsymbol{W}_{33\cdot 12}^{[1]^*} &= \boldsymbol{W}_{33}^{[1]^*} - \boldsymbol{W}_{3(12)}^{[1]^*}(\boldsymbol{W}_{(12)(12)}^{[1]^*})^{-1}\boldsymbol{W}_{(12)3}^{[1]^*}
\end{aligned}
$$

である．このとき

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{W}_{11}^{[3]*} &= \boldsymbol{\Lambda}_{11}\boldsymbol{W}_{11}^{[3]}\boldsymbol{\Lambda}_{11},\\
\boldsymbol{W}_{22}^{[2]*} &= \boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{\Lambda}_{21}\boldsymbol{W}_{11}^{[2]}\boldsymbol{\Lambda}_{21}'\boldsymbol{\Lambda}_{22} + \boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{\Lambda}_{21}\boldsymbol{W}_{12}^{[2]}\boldsymbol{\Lambda}_{22}\\
&\quad + \boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{W}_{21}^{[2]}\boldsymbol{\Lambda}_{21}'\boldsymbol{\Lambda}_{22} + \boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{W}_{22}^{[2]}\boldsymbol{\Lambda}_{22},\\
\boldsymbol{W}_{33}^{[1]*} &= \boldsymbol{\Lambda}_{33}\boldsymbol{\Lambda}_{3(12)}\boldsymbol{W}_{(12)(12)}^{[1]}\boldsymbol{\Lambda}_{3(12)}'\boldsymbol{\Lambda}_{33} + \boldsymbol{\Lambda}_{33}\boldsymbol{\Lambda}_{3(12)}\boldsymbol{W}_{(12)3}^{[1]}\boldsymbol{\Lambda}_{33}\\
&\quad + \boldsymbol{\Lambda}_{33}\boldsymbol{W}_{3(12)}^{[1]}\boldsymbol{\Lambda}_{3(12)}'\boldsymbol{\Lambda}_{33} + \boldsymbol{\Lambda}_{33}\boldsymbol{W}_{33}^{[1]}\boldsymbol{\Lambda}_{33},\\
\boldsymbol{W}_{22\cdot1}^{[2]*} &= \boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{W}_{22\cdot1}^{[2]}\boldsymbol{\Lambda}_{22},\\
\boldsymbol{W}_{33\cdot12}^{[1]*} &= \boldsymbol{\Lambda}_{33}\boldsymbol{W}_{33\cdot12}^{[1]}\boldsymbol{\Lambda}_{33}
\end{aligned}
$$

と書ける．ここで，平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ と分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ をそれぞれ

$$
\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \\ \boldsymbol{\mu}_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{\mu}_{(12)} \\ \hline \boldsymbol{\mu}_3 \end{array}\right), \tag{20}
$$

$$
\boldsymbol{\Sigma} = \left(\begin{array}{cc|c} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} & \boldsymbol{\Sigma}_{13} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} & \boldsymbol{\Sigma}_{23} \\ \hline \boldsymbol{\Sigma}_{31} & \boldsymbol{\Sigma}_{32} & \boldsymbol{\Sigma}_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Sigma}_{(12)(12)} & \boldsymbol{\Sigma}_{(12)3} \\ \hline \boldsymbol{\Sigma}_{3(12)} & \boldsymbol{\Sigma}_{33} \end{array}\right) \tag{21}
$$

とする．このときアフィン変換後の平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}^*$ と分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}^*$ はそれぞれ $\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{\Lambda}^{(1)}\boldsymbol{C}^{(1)}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\nu}^{(1)}$, $\boldsymbol{\Sigma}^* = \boldsymbol{\Lambda}^{(1)}\boldsymbol{C}^{(1)}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Lambda}^{(1)}\boldsymbol{C}^{(1)})'$ であり

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nu}^{(1)} &= -\boldsymbol{\Lambda}^{(1)}\boldsymbol{C}^{(1)}\boldsymbol{\mu},\\
\boldsymbol{\Lambda}^{(1)}\boldsymbol{C}^{(1)} &= \left(\begin{array}{cc|c} \boldsymbol{\Lambda}_{11} & \boldsymbol{O} & \\ \boldsymbol{\Lambda}_{22}\boldsymbol{\Lambda}_{21} & \boldsymbol{\Lambda}_{22} & \boldsymbol{O} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\boldsymbol{\Lambda}_{33}\boldsymbol{\Lambda}_{3(12)}} & \boldsymbol{\Lambda}_{33} \end{array}\right) = (\sigma^2)^{\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cc|c} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-\frac{1}{2}} & \boldsymbol{O} & \\ -\boldsymbol{\Sigma}_{22\cdot1}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} & \boldsymbol{\Sigma}_{22\cdot1}^{-\frac{1}{2}} & \boldsymbol{O} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{-\boldsymbol{\Sigma}_{33\cdot12}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Sigma}_{3(12)}\boldsymbol{\Sigma}_{(12)(12)}^{-1}} & \boldsymbol{\Sigma}_{33\cdot12}^{-\frac{1}{2}} \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

とすれば $\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\Sigma}^* = \sigma^2\boldsymbol{I}_p$ となる．ただし $\boldsymbol{\Sigma}_{22\cdot1} = \boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}, \boldsymbol{\Sigma}_{33\cdot12} = \boldsymbol{\Sigma}_{33} - \boldsymbol{\Sigma}_{3(12)}\boldsymbol{\Sigma}_{(12)(12)}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{(12)3}$ である．よって (20),(21) が与えられたとき $\boldsymbol{\Lambda}^{(1)}\boldsymbol{C}^{(1)}$ を用いて変換すれば尤度比検定統計量 $-2\log\lambda^{(3)}$ と修正尤度比検定統計量 $-2\rho\log\lambda^{(3)}$ の帰無分布を導出するのに一般性を失うことなく，$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\boldsymbol{I}_p$ とできる．H_0 が真であるとき，$\boldsymbol{\Lambda}_{11} = \boldsymbol{I}_{p_1}, \boldsymbol{\Lambda}_{22} = \boldsymbol{I}_{p_2}, \boldsymbol{\Lambda}_{33} = \boldsymbol{I}_{p_3}, \boldsymbol{\Lambda}_{21} = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{\Lambda}_{3(12)} = \boldsymbol{O}$ より

$$
\boldsymbol{W}_{11}^{[3]*} = \boldsymbol{W}_{11}^{[3]}, \boldsymbol{W}_{22}^{[2]*} = \boldsymbol{W}_{22}^{[2]}, \boldsymbol{W}_{33}^{[1]*} = \boldsymbol{W}_{33}^{[1]}, \boldsymbol{W}_{22\cdot1}^{[2]*} = \boldsymbol{W}_{22\cdot1}^{[2]}, \boldsymbol{W}_{33\cdot12}^{[1]*} = \boldsymbol{W}_{33\cdot12}^{[1]}
$$

から

$$\lambda^{(3)*} = \frac{\left|\frac{1}{N}\boldsymbol{W}_{11}^{[3]}\right|^{\frac{N}{2}} \left|\frac{1}{N_{(12)}}\boldsymbol{W}_{22\cdot1}^{[2]}\right|^{\frac{N_{(12)}}{2}} \left|\frac{1}{N_1}\boldsymbol{W}_{33\cdot12}^{[1]}\right|^{\frac{N_1}{2}}}{\left\{\frac{1}{Np_1+N_{(12)}p_2+N_1p_3}\left(\mathrm{tr}\boldsymbol{W}_{11}^{[3]}+\mathrm{tr}\boldsymbol{W}_{22}^{[2]}+\mathrm{tr}\boldsymbol{W}_{33}^{[1]}\right)\right\}^{\frac{Np_1+N_{(12)}p_2+N_1p_3}{2}}} = \lambda^{(3)}.$$

よって，アフィン変換に対して尤度比 $\lambda^{(3)}$ は H_0 の下で不変である．同様に示すことにより，k-step 単調欠測データの下でも尤度比 $\lambda^{(k)}$ はアフィン変換に対して H_0 の下で不変である．

6 モンテカルロ・シミュレーション

モンテカルロ・シミュレーションを行う前に，Type I error を設定する．尤度比検定統計量 $-2\log\lambda^{(k)}$ と修正尤度比検定統計量 $-2\rho\log\lambda^{(k)}$ の近似上側 $100\alpha\%$ 点に対する Type I error をそれぞれ次のように設定する．

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \Pr\{-2\log\lambda^{(k)} > q_i(\alpha)\}, i=1,2,3,\\
\alpha_{\chi^2} &= \Pr\{-2\rho\log\lambda^{(k)} > q_1(\alpha)\},\\
\alpha^{\dagger} &= \Pr\{-2\rho\log\lambda^{(k)} > q^{\dagger}(\alpha)\}.
\end{aligned}$$

ただし，$q_1(\alpha), q_2(\alpha), q_3(\alpha), q^{\dagger}(\alpha)$ はそれぞれ (15),(16),(17),(18) で与えた近似上側 $100\alpha\%$ 点である．$-2\log\lambda^{(k)}$ と $-2\rho\log\lambda^{(k)}$ の上側 $100\alpha\%$ 点，設定した Type I error，そして $\widetilde{\sigma}^2$, $\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}$ の期待値や MSE を 100 万回のモンテカルロ・シミュレーションによって数値的評価した．本研究では $N_{p_{(1\ldots k-j+1)}}(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{I}_{p_{(1\ldots k-j+1)}}), j=1,\ldots,k$ からの乱数を発生させ，$\alpha = 0.05$ とした．また，尤度比 $\lambda^{(k)}$ は σ^2 に依存しておらずアフィン変換に対して H_0 の下で不変であるため，$\sigma^2 = 1.0$ とした．他のパラメータに関しては次のように設定する．

- 表 1: 2-step の場合

$$(p_1, p_2) = \begin{cases} (2,2) & (N_1,N_2) = (c,c), (c,2c), (2d,d),\\ (2,4),(4,2) & (N_1,N_2) = (c,c). \end{cases}$$

- 表 2: 2-step の場合

$$
\begin{aligned}
(p_1, p_2) &= (4,4), (6,2), (2,6), \\
(N_1, N_2) &= (c, c).
\end{aligned}
$$

- 表 3: 3-step の場合

$$
\begin{aligned}
(p_1, p_2, p_3) &= (2,2,2), \\
(N_1, N_2, N_3) &= (c,c,c), (2d,d,d), (c,2c,c), (c,c,2c), (c,2c,2c).
\end{aligned}
$$

- 表 4: 3-step の場合

$$
\begin{aligned}
(p_1, p_2, p_3) &= (3,3,3), (2,3,4), (2,4,3), (4,3,2), (4,2,3) \\
(N_1, N_2, N_3) &= (c,c,c).
\end{aligned}
$$

- 表 5: 5-step の場合

$$
\begin{aligned}
(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) &= (2,2,2,2,2), \\
(N_1, N_2, N_3, N_4, N_5) &= (e,e,e,e,e), (2c,c,c,c,c), (e,2e,e,e,e), \\
&\quad (e,e,2e,e,e), (e,e,e,2e,e), (e,e,e,e.2e).
\end{aligned}
$$

- 表 6: 5-step の場合

$$
\begin{aligned}
(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) &= (2,2,2,2,4), (2,2,2,4,2), (2,2,4,2,2), \\
&\quad (2,4,2,2,2), (4,2,2,2,2), \\
(N_1, N_2, N_3, N_4, N_5) &= (e,e,e,e,e).
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
&c = 10, 20, 40, 50, 80, 100, 200, 400, d = 5, 10, 20, 40, 50, 80, 100, 200, \\
&e = 20, 40, 50, 80, 100, 200, 400
\end{aligned}
$$

であり，表 1-6 は $N_1 > p$ である．また，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_{\chi^2}$, $\alpha^\dagger$ の中で一番 α に近い値を太字としている．

表 1: $-2\log\lambda$, $-2\rho\log\lambda$ の上側 5% 点，それぞれの近似上側 5% 点に対する Type I error，$\widetilde{\sigma}^2$ と $\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}$ の期待値や MSE：$(p_1,p_2)=(2,2),(2,4),(4,2)$.

Sample Size		Upper Percentile					Type I Error					Expectation		Mean Squared Error	
N_1	N_2	$q_2(\alpha)$	$q_3(\alpha)$	$-2\log\lambda$	$q^\dagger(\alpha)$	$-2\rho\log\lambda$	α_1	α_2	α_3	α_{χ^2}	$\alpha^\dagger$	$\mathrm{E}[\widetilde{\sigma}^2]$	$\mathrm{E}[\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}]$	$\mathrm{MSE}[\widetilde{\sigma}^2]$	$\mathrm{MSE}[\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}]$
							$(p_1,p_2)=(2,2)$								
10	10	20.90	22.37	22.75	17.39	17.39	.180	.076	.055	.058	**.050**	.933	1.000	.03554	.03568
20	20	18.91	19.28	19.27	17.01	17.00	.095	.055	**.050**	.051	**.050**	.967	1.000	.01719	.01720
40	40	17.92	18.01	18.01	16.94	16.95	.069	.052	**.050**	.051	**.050**	.983	1.000	.00846	.00846
50	50	17.72	17.77	17.78	16.93	16.94	.065	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.987	1.000	.00676	.00677
80	80	17.42	17.44	17.46	16.92	16.94	.059	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.992	1.000	.00421	.00421
100	100	17.32	17.33	17.34	16.92	16.93	.057	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.993	1.000	.00336	.00336
200	200	17.12	17.12	17.12	16.92	16.92	.053	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.997	1.000	.00167	.00167
400	400	17.02	17.02	17.01	16.92	16.91	.051	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.998	1.000	.00084	.00084
10	20	20.81	22.35	22.66	17.44	17.46	.178	.077	.055	.059	**.050**	.950	1.000	.02627	.02634
20	40	18.86	19.22	19.22	17.02	17.01	.094	.055	**.050**	.052	**.050**	.975	1.000	.01283	.01284
40	80	17.89	17.98	17.97	16.94	16.94	.068	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.987	1.000	.00633	.00633
50	100	17.70	17.75	17.75	16.93	16.93	.064	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.990	1.000	.00505	.00505
80	160	17.40	17.43	17.43	16.92	16.93	.059	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.994	1.000	.00314	.00314
100	200	17.31	17.32	17.31	16.92	16.92	.057	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.995	1.000	.00251	.00251
200	400	17.11	17.12	17.12	16.92	16.92	.053	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.998	1.000	.00125	.00125
400	800	17.02	17.02	17.00	16.92	16.90	.051	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00063	.00063
10	5	21.02	22.52	22.92	17.33	17.37	.184	.077	.055	.057	**.051**	.920	1.000	.04329	.04355
20	10	18.97	19.34	19.33	17.00	16.99	.096	.055	**.050**	.051	**.050**	.960	1.000	.02077	.02080
40	20	17.94	18.04	18.04	16.94	16.94	.070	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.980	1.000	.01019	.01019
80	40	17.43	17.45	17.47	16.92	16.94	.059	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.990	1.000	.00505	.00505
100	50	17.33	17.34	17.33	16.92	16.91	.057	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.992	1.000	.00403	.00403
160	80	17.18	17.18	17.17	16.92	16.91	.054	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.995	1.000	.00252	.00252
200	100	17.12	17.13	17.11	16.92	16.91	.053	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.996	1.000	.00201	.00201
400	200	17.02	17.02	17.02	16.92	16.92	.052	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.998	1.000	.00100	.00100
							$(p_1,p_2)=(2,4)$								
10	10	41.21	45.83	49.23	33.35	33.88	.432	.149	.081	.083	**.056**	.925	1.000	.02877	.02708
20	20	36.31	37.47	37.62	31.73	31.76	.158	.065	.052	.054	**.050**	.963	1.000	.01345	.01301
40	40	33.86	34.15	34.16	31.48	31.50	.090	.053	**.050**	.051	**.050**	.981	1.000	.00648	.00636
50	50	33.37	33.55	33.54	31.45	31.45	.080	.052	**.050**	**.050**	**.050**	.985	1.000	.00515	.00508
80	80	32.63	32.71	32.70	31.43	31.42	.067	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.991	1.000	.00318	.00316
100	100	32.39	32.44	32.43	31.42	31.42	.063	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.992	1.000	.00253	.00252
200	200	31.90	31.91	31.91	31.41	31.41	.056	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.996	1.000	.00126	.00125
400	400	31.66	31.66	31.66	31.41	31.41	.053	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.998	1.000	.00063	.00063
							$(p_1,p_2)=(4,2)$								
10	10	39.72	43.50	46.75	33.47	34.39	.365	.137	.081	.091	**.060**	.940	1.000	.02244	.02130
20	20	35.56	36.51	36.68	31.78	31.83	.137	.062	.052	.055	**.051**	.970	1.000	.01060	.01032
40	40	33.49	33.72	33.72	31.49	31.49	.083	.053	**.050**	.051	**.050**	.985	1.000	.00515	.00507
50	50	33.07	33.22	33.23	31.46	31.47	.075	.052	**.050**	.051	**.050**	.988	1.000	.00410	.00405
80	80	32.45	32.51	32.51	31.43	31.43	.064	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.992	1.000	.00253	.00251
100	100	32.24	32.28	32.26	31.42	31.41	.061	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.994	1.000	.00202	.00201
200	200	31.83	31.84	31.83	31.41	31.41	.055	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.997	1.000	.00101	.00100
400	400	31.62	31.62	31.61	31.41	31.40	.053	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.998	1.000	.00050	.00050

注. $(p_1,p_2)=(2,2)$ のとき $q_1(0.05)=\chi^2_9(0.05)=16.92$,
$(p_1,p_2)=(2,4),(4,2)$ のとき $q_1(0.05)=\chi^2_{20}(0.05)=31.41$.

表 2: $-2\log\lambda$, $-2\rho\log\lambda$ の上側 5% 点，それぞれの近似上側 5% 点に対する Type I error，$\widetilde{\sigma}^2$ と $\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}$ の期待値や MSE：$(p_1, p_2) = (4,4), (6,2), (2,6)$.

Sample Size	Upper Percentile					Type I Error					Expectation		Mean Squared Error	
N^*	$q_2(\alpha)$	$q_3(\alpha)$	$-2\log\lambda$	$q^\dagger(\alpha)$	$-2\rho\log\lambda$	α_1	α_2	α_3	α_{χ^2}	$\alpha^\dagger$	$\mathrm{E}[\widetilde{\sigma}^2]$	$\mathrm{E}[\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}]$	$\mathrm{MSE}[\widetilde{\sigma}^2]$	$\mathrm{MSE}[\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}]$
							$(p_1, p_2) = (4,4)$							
10	67.47	77.58	96.39	56.44	62.20	.801	.393	.211	.217	**.103**	.933	1.000	.01997	.01780
20	58.63	61.16	61.90	50.82	50.93	.252	.082	.056	.062	**.051**	.967	1.000	.00918	.00864
40	54.22	54.85	54.88	50.01	50.01	.115	.056	**.050**	.052	**.050**	.983	1.000	.00437	.00423
50	53.33	53.74	53.72	49.93	49.90	.098	.054	**.050**	.051	**.050**	.987	1.000	.00346	.00337
80	52.01	52.17	52.17	49.85	49.85	.077	.051	**.050**	.051	**.050**	.992	1.000	.00213	.00210
100	51.57	51.67	51.68	49.83	49.84	.071	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.993	1.000	.00170	.00168
200	50.69	50.71	50.71	49.81	49.81	.059	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.997	1.000	.00084	.00084
400	50.24	50.25	50.23	49.80	49.79	.054	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.998	1.000	.00042	.00042
							$(p_1, p_2) = (6,2)$							
10	64.53	72.37	89.49	55.31	63.02	.701	.337	.198	.223	**.124**	.943	1.000	.01674	.01516
20	57.17	59.13	59.83	50.74	50.98	.206	.076	.056	.062	**.052**	.971	1.000	.00775	.00735
40	53.48	53.97	53.97	50.00	49.98	.102	.055	**.050**	.052	**.050**	.986	1.000	.00373	.00362
50	52.75	53.06	53.10	49.93	49.96	.089	.053	**.050**	.052	**.050**	.989	1.000	.00296	.00290
80	51.64	51.77	51.77	49.85	49.85	.072	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.993	1.000	.00183	.00180
100	51.28	51.35	51.35	49.83	49.83	.067	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.994	1.000	.00145	.00143
200	50.54	50.56	50.57	49.81	49.82	.058	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.997	1.000	.00072	.00072
400	50.17	50.18	50.19	49.80	49.81	.054	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00036	.00036
							$(p_1, p_2) = (2,6)$							
10	68.80	79.66	98.46	55.93	60.89	.829	.403	.209	.197	**.096**	.920	1.000	.02472	.02165
20	59.30	62.02	62.76	50.70	50.79	.272	.083	.056	.060	**.051**	.960	1.000	.01122	.01043
40	54.55	55.23	55.25	49.98	49.98	.123	.056	**.050**	.052	**.050**	.980	1.000	.00530	.00510
50	53.60	54.04	54.01	49.91	49.88	.103	.054	**.050**	.051	**.050**	.984	1.000	.00419	.00406
80	52.18	52.35	52.36	49.84	49.86	.079	.052	**.050**	.051	**.050**	.990	1.000	.00257	.00252
100	51.70	51.81	51.80	49.83	49.83	.072	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.992	1.000	.00205	.00202
200	50.75	50.78	50.80	49.81	49.83	.060	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.996	1.000	.00101	.00100
400	50.28	50.28	50.28	49.80	49.80	.055	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.998	1.000	.00050	.00050

注. $q_1(0.05) = \chi^2_{35}(0.05) = 49.80, N^* = N_i, i = 1, 2.$

表 3: $-2\log\lambda^{(3)}$, $-2\rho\log\lambda^{(3)}$ の上側 5% 点，それぞれの近似上側 5% 点に対する Type I error，$\widetilde{\sigma}^2$ と $\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}$ の期待値や MSE：$(p_1, p_2, p_3) = (2, 2, 2)$.

Sample Size			Upper Percentile					Type I Error					Expectation		Mean Squared Error	
N_1	N_2	N_3	$q_2(\alpha)$	$q_3(\alpha)$	$-2\log\lambda^{(3)}$	$q^\dagger(\alpha)$	$-2\rho\log\lambda^{(3)}$	α_1	α_2	α_3	α_{χ^2}	$\alpha^\dagger$	$\mathrm{E}[\widetilde{\sigma}^2]$	$\mathrm{E}[\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}]$	$\mathrm{MSE}[\widetilde{\sigma}^2]$	$\mathrm{MSE}[\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}]$
							$(p_1, p_2, p_3) = (2, 2, 2)$									
10	10	10	39.62	43.38	46.63	33.53	34.44	.362	.137	.081	.091	**.060**	.950	1.000	.01836	.01756
20	20	20	35.52	36.46	36.65	31.79	31.86	.136	.063	.052	.056	**.051**	.975	1.000	.00876	.00856
40	40	40	33.46	33.70	33.71	31.49	31.50	.082	.053	**.050**	.051	**.050**	.987	1.000	.00427	.00422
50	50	50	33.05	33.20	33.19	31.46	31.46	.075	.052	**.050**	.051	**.050**	.990	1.000	.00340	.00336
80	80	80	32.44	32.50	32.53	31.43	31.46	.064	.051	**.050**	.051	**.050**	.994	1.000	.00211	.00209
100	100	100	32.23	32.27	32.27	31.42	31.42	.061	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.995	1.000	.00168	.00167
200	200	200	31.82	31.83	31.81	31.41	31.39	.055	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.997	1.000	.00084	.00084
400	400	400	31.62	31.62	31.60	31.41	31.39	.052	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00042	.00042
10	5	5	40.20	44.20	47.47	33.36	34.18	.385	.140	.081	.088	**.059**	.933	1.000	.02517	.02379
20	10	10	35.81	36.81	36.98	31.75	31.80	.143	.063	.052	.055	**.051**	.967	1.000	.01186	.01150
40	20	20	33.61	33.86	33.86	31.48	31.49	.085	.053	**.050**	.051	**.050**	.983	1.000	.00573	.00565
80	40	40	32.51	32.57	32.59	31.43	31.45	.065	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.992	1.000	.00282	.00280
100	50	50	32.29	32.33	32.34	31.42	31.43	.062	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.993	1.000	.00225	.00223
160	80	80	31.96	31.98	31.99	31.41	31.43	.057	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.996	1.000	.00140	.00139
200	100	100	31.85	31.86	31.88	31.41	31.43	.056	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.997	1.000	.00112	.00111
400	200	200	31.63	31.63	31.63	31.41	31.41	.053	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.998	1.000	.00056	.00056
10	20	10	39.09	42.69	46.03	33.72	34.78	.345	.137	.082	.097	**.062**	.963	1.000	.01344	.01299
20	40	20	35.25	36.15	36.35	31.84	31.91	.130	.063	.052	.056	**.051**	.981	1.000	.00648	.00636
40	80	40	33.33	33.56	33.58	31.50	31.53	.080	.053	**.050**	.051	**.050**	.991	1.000	.00319	.00316
50	100	50	32.95	33.09	33.07	31.47	31.46	.073	.051	**.050**	.051	**.050**	.992	1.000	.00254	.00252
80	160	80	32.37	32.43	32.44	31.43	31.44	.063	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.995	1.000	.00158	.00157
100	200	100	32.18	32.21	32.22	31.42	31.44	.061	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.996	1.000	.00126	.00126
200	400	200	31.79	31.80	31.81	31.41	31.42	.055	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.998	1.000	.00063	.00063
400	800	400	31.60	31.60	31.60	31.41	31.41	.052	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00031	.00031
10	10	20	39.59	43.34	46.64	33.56	34.50	.361	.137	.081	.092	**.061**	.957	1.000	.01553	.01494
20	20	40	35.50	36.44	36.62	31.80	31.85	.136	.063	.052	.055	**.051**	.978	1.000	.00745	.00729
40	40	80	33.45	33.69	33.70	31.49	31.51	.082	.053	**.050**	.051	**.050**	.989	1.000	.00364	.00360
50	50	100	33.05	33.20	33.22	31.46	31.49	.075	.052	**.050**	.051	**.050**	.991	1.000	.00291	.00288
80	80	160	32.43	32.49	32.48	31.43	31.42	.064	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.995	1.000	.00180	.00179
100	100	200	32.23	32.27	32.25	31.42	31.41	.061	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.996	1.000	.00144	.00143
200	200	400	31.82	31.83	31.82	31.41	31.41	.055	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.998	1.000	.00072	.00072
400	400	800	31.61	31.62	31.62	31.41	31.41	.052	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00036	.00036
10	20	20	39.07	42.67	45.98	33.74	34.77	.344	.136	.082	.097	**.062**	.967	1.000	.01185	.01149
20	40	40	35.24	36.14	36.31	31.84	31.88	.129	.062	.052	.056	**.050**	.983	1.000	.00573	.00563
40	80	80	33.33	33.55	33.56	31.50	31.51	.080	.053	**.050**	.051	**.050**	.992	1.000	.00282	.00280
50	100	100	32.94	33.09	33.10	31.47	31.48	.073	.052	**.050**	.051	**.050**	.993	1.000	.00225	.00224
80	160	160	32.37	32.42	32.43	31.43	31.44	.063	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.996	1.000	.00140	.00139
100	200	200	32.18	32.21	32.21	31.42	31.43	.060	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.997	1.000	.00112	.00111
200	400	400	31.79	31.80	31.81	31.41	31.43	.055	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.998	1.000	.00056	.00056
400	800	800	31.60	31.60	31.61	31.41	31.42	.052	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00028	.00028

注. $q_1(0.05) = \chi^2_{20}(0.05) = 31.41$.

表 4: $-2\log\lambda^{(3)}$, $-2\rho\log\lambda^{(3)}$ の上側 5% 点，それぞれの近似上側 5% 点に対する Type I error，$\widetilde{\sigma}^2$ と $\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}$ の期待値や MSE：$(p_1,p_2,p_3)=(3,3,3),(2,3,4),(2,4,3),(4,3,2),(4,2,3)$.

Sample Size	Upper Percentile					Type I Error					Expectation		Mean Squared Error	
N^*	$q_2(\alpha)$	$q_3(\alpha)$	$-2\log\lambda^{(3)}$	$q^\dagger(\alpha)$	$-2\rho\log\lambda^{(3)}$	α_1	α_2	α_3	α_{χ^2}	$\alpha^\dagger$	$\mathrm{E}[\widetilde{\sigma}^2]$	$\mathrm{E}[\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}]$	$\mathrm{MSE}[\widetilde{\sigma}^2]$	$\mathrm{MSE}[\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}]$
$(p_1,p_2,p_3)=(3,3,3)$														
10	81.26	93.92	144.13	70.69	94.62	.925	.644	.439	.467	**.261**	.950	1.000	.01304	.01169
20	70.87	74.03	75.43	62.08	62.48	.288	.091	.060	.069	**.053**	.975	1.000	.00605	.00570
40	65.67	66.47	66.51	60.81	60.80	.123	.057	**.050**	.053	**.050**	.987	1.000	.00290	.00281
50	64.64	65.14	65.20	60.68	60.72	.104	.055	**.050**	.052	**.050**	.990	1.000	.00230	.00224
80	63.08	63.28	63.31	60.56	60.59	.079	.052	**.050**	.051	**.050**	.994	1.000	.00142	.00140
100	62.56	62.69	62.70	60.53	60.54	.072	.051	**.050**	.051	**.050**	.995	1.000	.00113	.00112
200	61.52	61.55	61.56	60.49	60.50	.060	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.998	1.000	.00056	.00056
400	61.00	61.01	61.02	60.48	60.50	.055	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00028	.00028
$(p_1,p_2,p_3)=(2,3,4)$														
10	83.06	97.10	148.20	71.38	92.87	.945	.668	.445	.454	**.236**	.944	1.000	.01495	.01323
20	71.77	75.28	76.66	62.10	62.35	.318	.095	.060	.068	**.052**	.972	1.000	.00686	.00643
40	66.13	67.00	67.09	60.81	60.83	.133	.058	.051	.053	**.050**	.986	1.000	.00328	.00318
50	65.00	65.56	65.59	60.68	60.69	.110	.055	**.050**	.052	**.050**	.989	1.000	.00259	.00252
80	63.30	63.52	63.51	60.55	60.54	.082	.052	**.050**	.051	**.050**	.993	1.000	.00160	.00158
100	62.74	62.88	62.88	60.53	60.53	.074	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.994	1.000	.00128	.00126
200	61.61	61.65	61.68	60.49	60.53	.061	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.997	1.000	.00063	.00063
400	61.05	61.05	61.06	60.48	60.49	.055	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00031	.00031
$(p_1,p_2,p_3)=(2,4,3)$														
10	81.41	94.12	144.48	70.58	94.47	.926	.645	.440	.464	**.261**	.947	1.000	.01395	.01241
20	70.95	74.12	75.46	62.06	62.40	.291	.091	.060	.069	**.053**	.973	1.000	.00644	.00605
40	65.71	66.51	66.55	60.80	60.79	.124	.057	**.050**	.053	**.050**	.987	1.000	.00308	.00298
50	64.67	65.18	65.21	60.68	60.70	.104	.055	**.050**	.052	**.050**	.989	1.000	.00244	.00238
80	63.10	63.30	63.32	60.55	60.58	.079	.052	**.050**	.051	**.050**	.993	1.000	.00151	.00148
100	62.57	62.70	62.28	60.53	60.51	.072	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.995	1.000	.00120	.00118
200	61.53	61.56	61.54	60.49	60.47	.060	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.997	1.000	.00059	.00059
400	61.00	61.01	60.96	60.48	60.44	.055	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00030	.00030
$(p_1,p_2,p_3)=(4,3,2)$														
10	78.82	89.40	136.93	68.99	95.40	.881	.591	.416	.456	**.285**	.955	1.000	.01156	.01045
20	69.65	72.30	73.52	61.92	62.37	.249	.085	.059	.068	**.054**	.978	1.000	.00540	.00513
40	65.07	65.73	65.77	60.78	60.78	.112	.056	**.050**	.053	**.050**	.989	1.000	.00260	.00253
50	64.15	64.57	64.58	60.67	60.66	.096	.054	**.050**	.052	**.050**	.991	1.000	.00206	.00202
80	62.77	62.94	62.97	60.55	60.58	.075	.052	**.050**	.051	**.050**	.994	1.000	.00128	.00126
100	62.32	62.42	62.38	60.52	60.49	.069	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.996	1.000	.00101	.00101
200	61.40	61.42	61.38	60.49	60.45	.059	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.998	1.000	.00050	.00050
400	60.94	60.95	60.92	60.48	60.45	.054	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00025	.00025

注. $q_1(0.05)=\chi^2_{44}(0.05)=60.48, N^*=N_i, i=1,2,3.$

表 5: $-2\log\lambda^{(5)}$, $-2\rho\log\lambda^{(5)}$ の上側 5% 点，それぞれの近似上側 5% 点に対する Type I error，$\widetilde{\sigma}^2$ と $\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}$ の期待値や MSE：$(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)=(2,2,2,2,2)$.

Sample Size					Upper Percentile					Type I Error					Expectation		Mean Squared Error	
N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	$q_2(\alpha)$	$q_3(\alpha)$	$-2\log\lambda^{(5)}$	$q^\dagger(\alpha)$	$-2\rho\log\lambda^{(5)}$	α_1	α_2	α_3	α_{χ^2}	$\alpha^\dagger$	$\mathrm{E}[\widetilde{\sigma}^2]$	$\mathrm{E}[\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}]$	$\mathrm{MSE}[\widetilde{\sigma}^2]$	$\mathrm{MSE}[\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}]$
									$(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)=(2,2,2,2,2)$									
20	20	20	20	20	83.15	86.57	88.55	74.25	75.06	.294	.097	.064	.077	**.057**	.983	1.000	.00356	.00339
40	40	40	40	40	77.65	78.51	78.64	72.59	72.65	.123	.058	.051	.054	**.050**	.992	1.000	.00172	.00168
50	50	50	50	50	76.55	77.10	77.17	72.43	72.47	.103	.055	.051	.053	**.050**	.993	1.000	.00137	.00134
80	80	80	80	80	74.90	75.12	75.11	72.26	72.25	.079	.052	**.050**	.051	**.050**	.996	1.000	.00085	.00084
100	100	100	100	100	74.35	74.49	74.51	72.22	72.24	.072	.051	**.050**	.051	**.050**	.997	1.000	.00068	.00067
200	200	200	200	200	73.25	73.29	73.28	72.17	72.17	.060	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.998	1.000	.00034	.00033
400	400	400	400	400	72.70	72.71	72.69	72.16	72.14	.055	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00017	.00017
20	10	10	10	10	84.61	88.46	90.43	74.18	74.82	.334	.101	.064	.075	**.055**	.975	1.000	.00549	.00512
40	20	20	20	20	78.38	79.34	79.48	72.57	72.62	.136	.059	.051	.054	**.050**	.988	1.000	.00263	.00253
80	40	40	40	40	75.27	75.51	75.51	72.25	72.26	.083	.052	**.050**	.051	**.050**	.994	1.000	.00128	.00126
100	50	50	50	50	74.64	74.80	74.83	72.21	72.25	.075	.051	**.050**	.051	**.050**	.995	1.000	.00102	.00100
160	80	80	80	80	73.71	73.77	73.78	72.18	72.19	.064	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.997	1.000	.00063	.00063
200	100	100	100	100	73.40	73.44	73.44	72.17	72.17	.061	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.997	1.000	.00050	.00050
400	200	200	200	200	72.78	72.79	72.79	72.16	72.16	.055	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00025	.00025
800	400	400	400	400	72.46	72.47	72.47	72.15	72.16	.053	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00013	.00013
20	40	20	20	20	82.06	85.23	87.27	74.32	75.30	.267	.096	.065	.079	**.058**	.987	1.000	.00277	.00267
40	80	40	40	40	77.10	77.90	77.98	72.62	72.62	.114	.057	.051	.054	**.050**	.993	1.000	.00135	.00133
50	100	50	50	50	76.11	76.62	76.68	72.44	72.47	.097	.055	**.050**	.053	**.050**	.995	1.000	.00108	.00106
80	160	80	80	80	74.63	74.83	74.84	72.26	72.27	.075	.052	**.050**	.051	**.050**	.997	1.000	.00067	.00066
100	200	100	100	100	74.13	74.26	74.27	72.22	72.24	.069	.051	**.050**	.051	**.050**	.997	1.000	.00053	.00053
200	400	200	200	200	73.14	73.18	73.19	72.17	72.19	.059	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00026	.00026
400	800	400	400	400	72.65	72.66	72.67	72.16	72.17	.054	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00013	.00013
20	20	40	20	20	82.85	86.24	88.21	74.32	75.13	.287	.097	.064	.078	**.057**	.986	1.000	.00293	.00282
40	40	80	40	40	77.50	78.35	78.49	72.61	72.67	.121	.058	.051	.054	**.051**	.993	1.000	.00143	.00140
50	50	100	50	50	76.43	76.98	77.06	72.44	72.49	.101	.055	.051	.053	**.050**	.994	1.000	.00114	.00112
80	80	160	80	80	74.83	75.04	75.07	72.26	72.29	.078	.052	**.050**	.051	**.050**	.996	1.000	.00070	.00070
100	100	200	100	100	74.29	74.43	74.46	72.22	72.25	.071	.051	**.050**	.051	**.050**	.997	1.000	.00056	.00056
200	200	400	200	200	73.22	73.26	73.26	72.17	72.17	.060	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00028	.00028
400	400	800	400	400	72.69	72.70	72.71	72.16	72.17	.055	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00014	.00014
20	20	20	40	20	83.08	86.50	88.47	74.27	75.07	.293	.097	.064	.077	**.056**	.985	1.000	.00312	.00299
40	40	40	80	40	77.62	78.47	78.60	72.60	72.64	.122	.058	.051	.054	**.050**	.993	1.000	.00151	.00148
50	50	50	100	50	76.52	77.07	77.16	72.43	72.48	.103	.055	.051	.053	**.050**	.994	1.000	.00120	.00118
80	80	80	160	80	74.89	75.10	75.11	72.26	72.27	.078	.052	**.050**	.051	**.050**	.996	1.000	.00075	.00074
100	100	100	200	100	74.34	74.48	74.50	72.22	72.24	.072	.051	**.050**	.051	**.050**	.997	1.000	.00059	.00059
200	200	200	400	200	73.25	73.28	73.31	72.17	72.20	.060	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00030	.00030
400	400	400	800	400	72.70	72.71	72.75	72.16	72.20	.055	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00015	.00015
20	20	20	20	40	83.14	86.57	88.49	74.25	75.01	.295	.097	.064	.077	**.056**	.984	1.000	.00331	.00316
40	40	40	40	80	77.65	78.50	78.61	72.60	72.62	.123	.058	.051	.054	**.050**	.992	1.000	.00161	.00158
50	50	50	50	100	76.55	77.10	77.17	72.43	72.47	.103	.055	.051	.053	**.050**	.994	1.000	.00128	.00125
80	80	80	80	160	74.90	75.11	75.12	72.26	72.26	.078	.052	**.050**	.051	**.050**	.996	1.000	.00079	.00078
100	100	100	100	200	74.35	74.49	74.47	72.22	72.21	.072	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.997	1.000	.00063	.00063
200	200	200	200	400	73.25	73.29	73.31	72.17	72.19	.060	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.998	1.000	.00032	.00031
400	400	400	400	800	72.70	72.71	72.70	72.16	72.15	.055	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00016	.00016

注. $q_1(0.05)=\chi^2_{54}(0.05)=72.15$.

表 6: $-2\log\lambda^{(5)}$, $-2\rho\log\lambda^{(5)}$ の上側 5% 点，それぞれの近似上側 5% 点に対する Type I error，$\widetilde{\sigma}^2$ と $\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}$ の期待値や MSE：$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 2, 4)$, $(2, 2, 2, 4, 2), (2, 2, 4, 2, 2), (2, 4, 2, 2, 2), (4, 2, 2, 2, 2)$.

Sample Size	Upper Percentile					Type I Error					Expectation		Mean Squared Error	
N^*	$q_2(\alpha)$	$q_3(\alpha)$	$-2\log\lambda^{(5)}$	$q^\dagger(\alpha)$	$-2\rho\log\lambda^{(5)}$	α_1	α_2	α_3	α_{χ^2}	$\alpha^\dagger$	E[$\widetilde{\sigma}^2$]	E[$\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}$]	MSE[$\widetilde{\sigma}^2$]	MSE[$\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}$]
$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 2, 4)$														
20	118.96	126.84	132.95	103.44	105.31	.583	.174	.090	.112	**.063**	.981	1.000	.00342	.00319
40	108.72	110.69	111.11	99.45	99.57	.197	.067	.053	.058	**.051**	.991	1.000	.00164	.00158
50	106.67	107.93	108.07	99.08	99.09	.151	.060	.051	.054	**.050**	.993	1.000	.00130	.00126
80	103.60	104.10	104.10	98.70	98.69	.101	.053	**.050**	.051	**.050**	.995	1.000	.00080	.00078
100	102.58	102.89	102.89	98.62	98.61	.088	.052	**.050**	.051	**.050**	.996	1.000	.00064	.00063
200	100.53	100.61	100.61	98.52	98.52	.066	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.998	1.000	.00031	.00031
400	99.51	99.53	99.51	98.49	98.48	.058	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00016	.00016
$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 2, 4, 2)$														
20	115.44	121.26	125.98	102.18	104.28	.455	.138	.081	.100	**.065**	.982	1.000	.00320	.00299
40	106.96	108.42	108.69	99.24	99.33	.161	.062	.052	.056	**.051**	.991	1.000	.00153	.00148
50	105.27	106.20	106.34	98.95	99.02	.128	.057	.051	.054	**.050**	.993	1.000	.00122	.00118
80	102.72	103.09	103.07	98.66	98.63	.090	.052	**.050**	.051	**.050**	.996	1.000	.00075	.00074
100	101.88	102.11	102.08	98.59	98.57	.080	.051	**.050**	.051	**.050**	.996	1.000	.00060	.00059
200	100.18	100.24	100.28	98.51	98.55	.064	.051	**.050**	**.050**	**.050**	.998	1.000	.00030	.00029
400	99.33	99.35	99.33	98.49	98.48	.056	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00015	.00015
$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 2, 4, 2, 2)$														
20	114.68	120.29	125.00	102.23	104.44	.436	.137	.081	.102	**.066**	.983	1.000	.00301	.00283
40	106.58	107.99	108.34	99.26	99.43	.155	.062	.052	.057	**.051**	.992	1.000	.00145	.00140
50	104.96	105.86	106.01	98.96	99.04	.124	.057	.051	.054	**.050**	.993	1.000	.00115	.00112
80	102.53	102.88	102.85	98.66	98.63	.088	.052	**.050**	.051	**.050**	.996	1.000	.00071	.00070
100	101.72	101.95	101.95	98.60	98.60	.079	.052	**.050**	.051	**.050**	.997	1.000	.00056	.00056
200	100.10	100.16	100.15	98.51	98.50	.063	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.998	1.000	.00028	.00028
400	99.29	99.31	99.30	98.49	98.48	.056	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00014	.00014
$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (2, 4, 2, 2, 2)$														
20	114.47	120.04	124.78	102.28	104.53	.430	.136	.081	.103	**.066**	.984	1.000	.00284	.00267
40	106.48	107.87	108.13	99.27	99.36	.152	.062	.052	.057	**.051**	.992	1.000	.00137	.00133
50	104.88	105.77	105.91	98.97	99.04	.122	.057	.051	.054	**.050**	.994	1.000	.00109	.00106
80	102.48	102.83	102.88	98.67	98.70	.088	.053	**.050**	.052	**.050**	.996	1.000	.00067	.00066
100	101.68	101.90	101.92	98.60	98.61	.078	.052	**.050**	.051	**.050**	.997	1.000	.00053	.00053
200	100.08	100.14	100.14	98.51	98.52	.063	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.998	1.000	.00027	.00026
400	99.28	99.30	99.30	98.49	98.50	.056	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00013	.00013
$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (4, 2, 2, 2, 2)$														
20	114.41	119.98	124.63	102.30	104.48	.430	.135	.080	.102	**.065**	.985	1.000	.00268	.00254
40	106.45	107.84	108.16	99.28	99.42	.153	.062	.052	.057	**.051**	.992	1.000	.00130	.00126
50	104.85	105.75	105.89	98.97	99.04	.122	.057	.051	.054	**.051**	.994	1.000	.00103	.00101
80	102.47	102.81	102.80	98.67	98.65	.087	.052	**.050**	.051	**.050**	.996	1.000	.00064	.00063
100	101.67	101.89	101.94	98.60	98.64	.079	.052	**.050**	.051	**.050**	.997	1.000	.00051	.00050
200	100.08	100.13	100.15	98.51	98.53	.063	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00025	.00025
400	99.28	99.29	99.24	98.49	98.44	.056	**.050**	**.050**	**.050**	**.050**	.999	1.000	.00013	.00013

注. $q_1(0.05) = \chi^2_{77}(0.05) = 98.48, N^* = N_i, i = 1, 2, 3, 4, 5.$

7 数値例

2-step 単調欠測データと 3-step 単調欠測データの下で，数値例を紹介する．

7.1 2-step の場合

2-step 単調欠測データの下で，以下のようなデータを用いる．

Table 8: 硬化時に発生する熱に及ぼすポルトランドセメントの組成の影響

	変数			
観測値	$\boldsymbol{y}_1$	$\boldsymbol{y}_2$	$\boldsymbol{y}_3$	$\boldsymbol{y}_4$
1 番目	78.5	6.0	7.0	26.0
2 番目	74.3	15.0	1.0	29.0
3 番目	104.3	8.0	11.0	56.0
4 番目	87.6	8.0	11.0	31.0
5 番目	95.9	6.0	7.0	52.0
6 番目	109.2	9.0	11.0	55.0
7 番目	102.7	17.0	3.0	71.0
8 番目	72.5	22.0	1.0	31.0
9 番目	93.1	18.0	2.0	54.0
10 番目	115.9	4.0	*	*
11 番目	83.8	23.0	*	*
12 番目	113.3	9.0	*	*
13 番目	109.4	8.0	*	*

変数はそれぞれ $\boldsymbol{y}_1$：セメント 1g あたりの発熱量，$\boldsymbol{y}_2$：$4\,\mathrm{CaO}\cdot\mathrm{Al_2O_3}\cdot\mathrm{Fe_2O_3}$ の重量，$\boldsymbol{y}_3$：$3\,\mathrm{CaO}\cdot\mathrm{Al_2O_3}$ の重量，$\boldsymbol{y}_4$：$3\,\mathrm{CaO}\cdot\mathrm{SiO_2}$ の重量を表している．また $\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_4$ はクリンカーの重量に対する割合を整数化している．このデータは Little and Rubin (1987) で与えられた表の 4 つ目の変数を削除し，変数の順番を入れ替えている．さらに，パラメータは次のように設定している．

$$p_1 = 2, p_2 = 2, N_1 = 9, N_2 = 4, \alpha = 0.05.$$

上記のデータを用いると，尤度比検定統計量 $-2\log\lambda$ と修正尤度比検定統計量 $-2\rho\log\lambda$ やこれらの近似上側 5% 点の値はそれぞれ次のようになる．

$$-2\log\lambda = 69.12, -2\rho\log\lambda = 50.42,$$
$$q_1(0.05) = 16.92, q_2(0.05) = 21.50, q_3(0.05) = 23.36, q^\dagger(0.05) = 17.46.$$

以上から H_0 は，どの検定統計量や近似上側 5% 点に対しても棄却される．

7.2 3-step の場合

2-step 単調欠測データのときと同様のデータを用いる．

Table 9: 硬化時に発生する熱に及ぼすポルトランドセメントの組成の影響

	変数				
観測値	$\boldsymbol{y}_1$	$\boldsymbol{y}_2$	$\boldsymbol{y}_3$	$\boldsymbol{y}_4$	$\boldsymbol{y}_5$
1 番目	78.5	6.0	7.0	26.0	60.0
2 番目	74.3	15.0	1.0	29.0	52.0
3 番目	104.3	8.0	11.0	56.0	20.0
4 番目	87.6	8.0	11.0	31.0	47.0
5 番目	95.9	6.0	7.0	52.0	33.0
6 番目	109.2	9.0	11.0	55.0	22.0
7 番目	102.7	17.0	3.0	71.0	$*$
8 番目	72.5	22.0	1.0	31.0	$*$
9 番目	93.1	18.0	2.0	54.0	$*$
10 番目	115.9	4.0	$*$	$*$	$*$
11 番目	83.8	23.0	$*$	$*$	$*$
12 番目	113.3	9.0	$*$	$*$	$*$
13 番目	109.4	8.0	$*$	$*$	$*$

$\boldsymbol{y}_5$ はクリンカーに対する $2\,\mathrm{CaO}\cdot\mathrm{SiO}_2$ の重量の割合を整数化している．このデータは Little and Rubin (1987) の変数の順番を入れ替えている．パラメータは

$$p_1 = 2, p_2 = 2, p_3 = 1, N_1 = 6, N_2 = 3, N_3 = 4, \alpha = 0.05$$

と設定している．上記のデータを用いると，3-step 単調欠測データの下での尤度比検定統計量 $-2\log\lambda^{(3)}$ と修正尤度比検定統計量 $-2\rho\log\lambda^{(3)}$ やこれらの近似上側 5% 点の値はそれぞれ

$$-2\log\lambda^{(3)} = 121.35, -2\rho\log\lambda^{(3)} = 75.15,$$
$$q_1(0.05) = 23.68, q_2(0.05) = 32.70, q_3(0.05) = 38.40, q^\dagger(0.05) = 27.44.$$

となる．以上から H_0 は，どの検定統計量や近似上側 5% 点に対しても棄却される．

8 結論

単調欠測データの下での 1 標本問題におけるスフェリシティ検定において，尤度比検定統計量と修正尤度比検定統計量の帰無分布に対する漸近展開やこれらの検定統計量の上側パーセント点の漸近展開を与えた．また，上側パーセント点から近似上側パーセント点の提案をいくつか行った．未知パラメータである σ^2 の推定では，σ^2 の不偏推定量である $\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}$ を与え，MSE の観点から 2 つの推定量である $\widetilde{\sigma}^2$ と $\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}$ の善し悪しを理論的に評価した．モンテカルロ・シミュレーションでは，どのパラメータ設定においても尤度比検定統計量を修正することで近似精度が良くなることが言え，提案した近似上側パーセント点の中で修正尤度比検定統計量の近似上側 100α% 点である $q^\dagger(\alpha)$ の近似が一番良く，各 step のサンプルサイズが小さい時でも良いことが言えた．「完全データ (Muirhead (1982) 参照)」と「単調欠測データの欠測部分を除いた完全データ」の下でそれぞれ提案した近似上側 100α% 点 $q^\dagger(\alpha)$ の近似精度の比較を行ったところ，その差はほとんど見られなかった．そのため単調欠測データの下での修正尤度比検定統計量の近似上側 100α% 点である $q^\dagger(\alpha)$ を用いることで，より正しい検定結果を導くことができるということが結論付けられた．また，σ^2 の推定量において，$\widetilde{\sigma}^2$ の期待値は各 step のサンプルサイズを大きくすると σ^2 に近づき，$\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}$ の期待値は常に σ^2 となっていることが確認できた．さらに MSE から，4.2 節で述べたように一部の次元に関する設定を除いたほとんどの場合で $\widetilde{\sigma}^2$ の方が良い推定量であることが言え，各 step のサンプルサイズを大きくすると $\widetilde{\sigma}^2$ と $\widetilde{\sigma}^2_{\mathrm{U}}$ が同じ推定量となることがモンテカルロ・シミュレーションからも言えた．

9　今後の課題

今後の課題として，多標本問題における単調欠測データの下でのスフェリシティ検定について現在議論している．

付録 A

2-step 単調欠測データの下での $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ の MLE は Kanda and Fujikoshi (1998) よりそれぞれ

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\mu}}_1 \\ \widehat{\boldsymbol{\mu}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{N}\left(N_1\overline{\boldsymbol{x}}_1^{(1)} + N_2\overline{\boldsymbol{x}}_1^{(2)}\right) \\ \overline{\boldsymbol{x}}_2^{(1)} - \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{21}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{11}^{-1}\left(\overline{\boldsymbol{x}}_1^{(1)} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_1\right) \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{11} & \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{12} \\ \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{21} & \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{N}\left(\boldsymbol{W}_{11}^{(1)} + \boldsymbol{W}_{11}^{(2)}\right) & \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{11}\left(\boldsymbol{W}_{11}^{(1)}\right)^{-1}\boldsymbol{W}_{12}^{(1)} \\ \boldsymbol{W}_{21}^{(1)}\left(\boldsymbol{W}_{11}^{(1)}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{11} & \dfrac{1}{N_1}\boldsymbol{W}_{22\cdot 1}^{(1)} + \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{21}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{11}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{12} \end{pmatrix}$$

であり，H_0 の下での $\boldsymbol{\mu}$ の MLE は

$$\widetilde{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\mu}}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{\mu}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{N}\left(N_1\overline{\boldsymbol{x}}_1^{(1)} + N_2\overline{\boldsymbol{x}}_1^{(2)}\right) \\ \overline{\boldsymbol{x}}_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

である．

付録 B

$h = 0, 1, 2, \ldots,$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[(\lambda^{(k)})^h] &= \mathrm{E}\left[\frac{\left|\dfrac{1}{N}\boldsymbol{W}_{11}^{[k]}\right|^{\frac{Nh}{2}} \displaystyle\prod_{j=2}^{k}\left|\frac{1}{N_{(1\ldots k-j+1)}}\boldsymbol{W}_{jj\cdot 1\ldots j-1}^{[k-j+1]}\right|^{\frac{N_{(1\ldots k-j+1)}h}{2}}}{\left\{\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j\right)^{-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\mathrm{tr}\boldsymbol{W}_{jj}^{[k-j+1]}\right\}^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_jh}}\right] \\ &= N^{-\frac{Np_1h}{2}}\left(\prod_{j=2}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}^{-\frac{1}{2}N_{(1\ldots k-j+1)}p_jh}\right)\left(\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j\right)^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_jh} \\ &\quad \times \mathrm{E}\left[\left|\boldsymbol{W}_{11}^{[k]}\right|^{\frac{Nh}{2}}\left(\prod_{j=2}^{k}\left|\boldsymbol{W}_{jj\cdot 1\ldots j-1}^{[k-j+1]}\right|^{\frac{N_{(1\ldots k-j+1)}h}{2}}\right)\left(\sum_{j=1}^{k}\mathrm{tr}\boldsymbol{W}_{jj}^{[k-j+1]}\right)^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_jh}\right] \end{aligned}$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{k} N_{(1\ldots k-j+1)}^{-\frac{1}{2}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h}\right)\left(\sum_{j=1}^{k} N_{(1\ldots k-j+1)}p_j\right)^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h}$$
$$\times \mathrm{E}\left[\left|\boldsymbol{W}_{11}^{[k]}\right|^{\frac{Nh}{2}}\left(\prod_{j=2}^{k}\left|\boldsymbol{W}_{jj\cdot 1\ldots j-1}^{[k-j+1]}\right|^{\frac{N_{(1\ldots k-j+1)}h}{2}}\right)\left(\sum_{j=1}^{k}\mathrm{tr}\boldsymbol{W}_{jj}^{[k-j+1]}\right)^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h}\right].$$

$\mathrm{E}\left[\left|\boldsymbol{W}_{11}^{[k]}\right|^{\frac{Nh}{2}}\right]$ において H_0 の下で $\boldsymbol{W}_{11}^{[k]} \sim W_{p_1}(N-1, \sigma^2\boldsymbol{I}_{p_1})$ より

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\left|\boldsymbol{W}_{11}^{[k]}\right|^{\frac{Nh}{2}}\right] \\
&= \int_{\boldsymbol{W}_{11}^{[k]}}\left|\boldsymbol{W}_{11}^{[k]}\right|^{\frac{Nh}{2}} C_{p_1}(N-1,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_1})\left|\boldsymbol{W}_{11}^{[k]}\right|^{\frac{N-1}{2}-\frac{p_1+1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{tr}\boldsymbol{W}_{11}^{[k]}\right)\left(d\boldsymbol{W}_{11}^{[k]}\right) \\
&= \frac{C_{p_1}(N-1,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_1})}{C_{p_1}(Nh+N-1,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_1})}\int_{\widetilde{\boldsymbol{W}}_{11}^{[k]}} C_{p_1}(Nh+N-1,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_1})\left|\widetilde{\boldsymbol{W}}_{11}^{[k]}\right|^{\frac{Nh+N-1}{2}-\frac{p_1+1}{2}} \\
&\quad\times\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{W}}_{11}^{[k]}\right)\left(d\widetilde{\boldsymbol{W}}_{11}^{[k]}\right) \\
&= \frac{C_{p_1}(N-1,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_1})}{C_{p_1}(Nh+N-1,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_1})} \qquad \left(\widetilde{\boldsymbol{W}}_{11}^{[k]} \sim W_{p_1}(Nh+N-1,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_1})\right)
\end{aligned}$$

また $\mathrm{E}\left[\prod_{j=2}^{k}\left|\boldsymbol{W}_{jj\cdot 1\ldots j-1}^{[k-j+1]}\right|^{\frac{N_{(1\ldots k-j+1)}h}{2}}\right]$ において H_0 の下で $\boldsymbol{W}_{jj\cdot 1\ldots j-1}^{[k-j+1]} \sim W_{p_j}(N_{(1\ldots k-j+1)} - p_{(1\ldots j-1)} - 1, \sigma^2\boldsymbol{I}_{p_j})$ より

$$\mathrm{E}\left[\prod_{j=2}^{k}\left|\boldsymbol{W}_{jj\cdot 1\ldots j-1}^{[k-j+1]}\right|^{\frac{N_{(1\ldots k-j+1)}h}{2}}\right] = \prod_{j=2}^{k}\mathrm{E}\left[\left|\boldsymbol{W}_{jj\cdot 1\ldots j-1}^{[k-j+1]}\right|^{\frac{N_{(1\ldots k-j+1)}h}{2}}\right]$$

であり

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\left|\boldsymbol{W}_{jj\cdot 1\ldots j-1}^{[k-j+1]}\right|^{\frac{N_{(1\ldots k-j+1)}h}{2}}\right] \\
&= \int_{\boldsymbol{W}_{jj\cdot 1\ldots j-1}^{[k-j+1]}}\left|\boldsymbol{W}_{jj\cdot 1\ldots j-1}^{[k-j+1]}\right|^{\frac{N_{(1\ldots k-j+1)}h}{2}} C_{p_j}(N_{(1\ldots k-j+1)} - p_{(1\ldots j-1)} - 1, \sigma^2\boldsymbol{I}_{p_j}) \\
&\quad\times\left|\boldsymbol{W}_{jj\cdot 1\ldots j-1}^{[k-j+1]}\right|^{\frac{N_{(1\ldots k-j+1)}-p_{(1\ldots j-1)}-1}{2}-\frac{p_j+1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{tr}\boldsymbol{W}_{jj\cdot 1\ldots j-1}^{[k-j+1]}\right)\left(d\boldsymbol{W}_{jj\cdot 1\ldots j-1}^{[k-j+1]}\right) \\
&= \frac{C_{p_j}(N_{(1\ldots k-j+1)} - p_{(1\ldots j-1)} - 1, \sigma^2\boldsymbol{I}_{p_j})}{C_{p_j}(N_{(1\ldots k-j+1)}h + N_{(1\ldots k-j+1)} - p_{(1\ldots j-1)} - 1, \sigma^2\boldsymbol{I}_{p_j})} \\
&\quad\times\int_{\widetilde{\boldsymbol{W}}_{jj\cdot 1\ldots j-1}^{[k-j+1]}} C_{p_j}(N_{(1\ldots k-j+1)}h + N_{(1\ldots k-j+1)} - p_{(1\ldots j-1)} - 1, \sigma^2\boldsymbol{I}_{p_j})
\end{aligned}$$

$$\times \left|\widetilde{\boldsymbol{W}}^{[k-j+1]}_{jj\cdot 1\ldots j-1}\right|^{\frac{N_{(1\ldots k-j+1)}h+N_{(1\ldots k-j+1)}-p_{(1\ldots j-1)}-1}{2}-\frac{p_j+1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{W}}^{[k-j+1]}_{jj\cdot 1\ldots j-1}\right)\left(d\widetilde{\boldsymbol{W}}^{[k-j+1]}_{jj\cdot 1\ldots j-1}\right)$$
$$= \frac{C_{p_j}(N_{(1\ldots k-j+1)}-p_{(1\ldots j-1)}-1,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_j})}{C_{p_j}(N_{(1\ldots k-j+1)}h+N_{(1\ldots k-j+1)}-p_{(1\ldots j-1)}-1,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_j})}$$
$$\left(\widetilde{\boldsymbol{W}}^{[k-j+1]}_{jj\cdot 1\ldots j-1} \sim W_{p_j}(N_{(1\ldots k-j+1)}-p_{(1\ldots j-1)}-1,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_j})\right).$$

ただし，$j=1,\ldots,k$ に対して

$$C_{p_j}(a,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_j}) = \frac{1}{2^{\frac{ap_j}{2}}(\sigma^2)^{\frac{ap_j}{2}}\Gamma_{p_j}[\frac{a}{2}]} \tag{22}$$

である．ここで

$$\sum_{j=1}^{k}\mathrm{tr}\boldsymbol{W}^{[k-j+1]}_{jj} = \mathrm{tr}\boldsymbol{W}^{[k]}_{11} + \sum_{j=2}^{k}\left\{\mathrm{tr}\boldsymbol{W}^{[k-j+1]}_{jj\cdot 1\ldots j-1} + \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{W}^{[k-j+1]}_{j(1\ldots j-1)}\{\boldsymbol{W}^{[k-j+1]}_{(1\ldots j-1)(1\ldots j-1)}\}^{-1}\boldsymbol{W}^{[k-j+1]}_{(1\ldots j-1)j}\right)\right\}$$

であり，$j=2,\ldots,k$ に対して $\boldsymbol{W}^{[k]}_{11}$,$\boldsymbol{W}^{[k-j+1]}_{jj\cdot 1\ldots j-1}$, $\boldsymbol{W}^{[k-j+1]}_{j(1\ldots j-1)}\{\boldsymbol{W}^{[k-j+1]}_{(1\ldots j-1)(1\ldots j-1)}\}^{-1}\boldsymbol{W}^{[k-j+1]}_{(1\ldots j-1)j}$ は互いに独立であることから尤度比 $\lambda^{(k)}$ の h 次帰無モーメントは次のように書ける．

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[(\lambda^{(k)})^h] = &\left(\prod_{j=1}^{k} N_{(1\ldots k-j+1)}^{-\frac{1}{2}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h}\right)\left(\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j\right)^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h} \\
&\times \frac{C_{p_1}(N-1,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_1})}{C_{p_1}(Nh+N-1,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_1})}\prod_{j=2}^{k}\frac{C_{p_j}(N_{(1\ldots k-j+1)}-p_{(1\ldots j-1)}-1,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_j})}{C_{p_j}(N_{(1\ldots k-j+1)}h+N_{(1\ldots k-j+1)}-p_{(1\ldots j-1)}-1,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_j})} \\
&\times \mathrm{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{k}\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{W}}^{[k-j+1]}_{jj}\right)^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h}\right] \\
= &\left(\prod_{j=1}^{k} N_{(1\ldots k-j+1)}^{-\frac{1}{2}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h}\right)\left(\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j\right)^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h} \\
&\times \prod_{j=1}^{k}\frac{C_{p_j}(N_{(1\ldots k-j+1)}-p_{(1\ldots j-1)}-1,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_j})}{C_{p_j}(N_{(1\ldots k-j+1)}h+N_{(1\ldots k-j+1)}-p_{(1\ldots j-1)}-1,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_j})} \\
&\times \mathrm{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{k}\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{W}}^{[k-j+1]}_{jj}\right)^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h}\right].
\end{aligned}$$

ただし $j=1$ のとき $p_{(1\ldots j-1)}=0$, $\widetilde{\boldsymbol{W}}^{[k-j+1]}_{jj} \sim W_{p_j}(N_{(1\ldots k-j+1)}h+N_{(1\ldots k-j+1)}-1,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_j})$. また

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{W}}^{[k-j+1]}_{jj} \sim \chi^2_{f_1}, f_1 = \sum_{j=1}^{k}\left(N_{(1\ldots k-j+1)}h+N_{(1\ldots k-j+1)}-1\right)p_j$$

より

$$\mathrm{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{k}\mathrm{tr}\widetilde{\boldsymbol{W}}_{jj}^{[k-j+1]}\right)^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h}\right]$$

$$=\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left(N_{(1\ldots k-j+1)}-1\right)p_j\right]}{2^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h}(\sigma^2)^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h}\Gamma\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left(N_{(1\ldots k-j+1)}-1\right)p_j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h\right]}.$$

従って

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[(\lambda^{(k)})^h]=&\frac{\left(\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j\right)^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h}}{\prod_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}^{\frac{1}{2}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h}}\\
&\times\prod_{j=1}^{k}\frac{C_{p_j}(N_{(1\ldots k-j+1)}-p_{(1\ldots j-1)}-1,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_j})}{C_{p_j}(N_{(1\ldots k-j+1)}h+N_{(1\ldots k-j+1)}-p_{(1\ldots j-1)}-1,\sigma^2\boldsymbol{I}_{p_j})}\\
&\times\frac{1}{2^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h}(\sigma^2)^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h}}\\
&\times\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left(N_{(1\ldots k-j+1)}-1\right)p_j\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left(N_{(1\ldots k-j+1)}-1\right)p_j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}N_{(1\ldots k-j+1)}p_j h\right]}.
\end{aligned}$$

最後に (22) を用いることにより，**定理 3** を得る.

謝辞

本研究は, 科学研究費補助金若手研究 (19K20225,22K13961) と基盤研究 (c)(21K11795,24K14863) の助成ならびに京都大学の国際共同利用・共同研究拠点である数理解析研究所の支援を受けた.

参考文献

[1] Batsidis, A. and Zografos, K. (2006). Statistical inference for location and scale of elliptically contoured models with monotone missing data. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 2606–2629.

[2] Box, G. E. P. (1949). A general distribution theory for a class of likelihood criteria. *Biometrika*, **36**, 317–346.

[3] Chang, W. -Y. and Richards, D. St. P. (2009). Finite-sample inference with monotone incomplete multivariate normal data, I. *Journal of Multivariate Analysis*, **100**, 1883–1899.

[4] Chang, W. -Y. and Richards, D. St. P. (2010). Finite-sample inference with monotone incomplete multivariate normal data, II. *Journal of Multivariate Analysis*, **101**, 603–620.

[5] Choi, B. (2005). Likelihood ratio criterion for testing sphericity from a multivariate normal sample with 2-step monotone missing data pattern. *The Korean Communications in Statistics*, **12**, 473–481.

[6] Kanda, T. and Fujikoshi, Y. (1998). Some basic properties of the MLE's for a multivariate normal distribution with monotone missing data. *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **18**, 161–190.

[7] Little, R. J. A. and Rubin, D. B. (1987). *Statistical Analysis with Missing Data*, second ed., John Wiley & Sons Inc., New York.

[8] Muirhead, R. J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*, John Wiley & Sons Inc., New York.

[9] Romer, M. M. and Richards, D. St. P. (2013). Finite-sample inference with monotone incomplete multivariate normal data, III: Hotelling's T^2-statistic. *Statistical Modelling*, **13**, 431–457.