論文 L-functions with Riemann's functional equation and the Lindelöf and Riemann hypotheses の解説

東京理科大学 教養教育研究院 野田キャンパス教養部 * 中村 隆
Takashi Nakamura
Institute of Arts and Sciences, Noda Division,
Tokyo University of Science

概要

この論説は、論文 [5] を解説したものである．論文 [5] には記載してあるが，ここでは触れない定理や命題もあるし，証明はここでは詳しく述べないので，詳細は論文を参照していただきたい．§2.2 の最後の 2 つの段落の内容と §3.2 は論文 [5] には書かれていない．

1 Introduction

1.1 リーマン予想とリンデレーフ予想

$q > 2$ を整数，$\chi(n)$ を mod q のディィリクレ指標とする．このとき，リーマンゼータ関数とディィリクレ L 関数は以下のように定義される．

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad L(s,\chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \qquad \sigma > 1.$$

リーマン予想は $\Re(s) > 1/2$ であるとき $\zeta(s) \ne 0$ であるという予想である．一般リーマン予想は $\Re(s) > 1/2$ であるとき $L(s,\chi) \ne 0$ であるという予想である．これらの予想は帯領域 $0 < \Re(s) < 1$ 内にある零点は全て臨界線 $\Re(s) = 1/2$ 上にあると言い換えられる．リーマンゼータ関数とディィリクレ L 関数ではないが，リーマン予想の類似を充たす関数は多く知られている．[2, Section 1] などを参照して頂きたい．

* 〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641

次にリンデレーフ予想について述べる．各 $\sigma \in \mathbb{R}$ に対し，$\mu(\sigma)$ を次を充たす $\xi \in \mathbb{R}$ の下限とする．

$$\zeta(\sigma+it) = O\big(|t|^{\xi}\big), \qquad |t| \ge 1.$$

リンデレーフ予想とは $\mu(\sigma)$ が以下のように与えられるというものである．

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} 1/2-\sigma & \sigma \le 1/2, \\ 0 & \sigma > 1/2. \end{cases} \tag{1.1}$$

上記 2 つの予想はいずれも未解決であるが，リーマン予想が正しければ，リンデレーフ予想も正しいことが知られている．さらに、次の不等式も知られている．

$$|t|^{1/2-\sigma} \ll \zeta(\sigma+it) \ll |t|^{1/2-\sigma}, \qquad |t| \ge 1, \quad \sigma < 0. \tag{1.2}$$

リーマンゼータ関数のディリクレ級数表示から、$\sigma > 1$ において，$\zeta(\sigma+it) \ll 1$ である．よってリンデレーフ予想において本質的となるのは，$0 \le \sigma \le 1$ の場合である．リンデレーフ予想と (1.2) の類似を充たす関数を構成したという論文は，著者が調べた限り存在しなかった．この点については本稿の §3.1 も読んで頂きたい．

1.2 The quadrilateral zeta function

$0 < a \le 1/2$ に対して，4 つ組ゼータ関数 $Q(s,a)$ を以下で定義する．

$$2Q(s,a) := \zeta(s,a) + \zeta(s,1-a) + F(s,a) + F(s,1-a).$$

ただし，$\zeta(s,a)$ と $F(s,a)$ は以下のように定義される．

$$\zeta(s,a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}, \quad F(s,a) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n a}}{n^s}, \qquad \sigma > 1.$$

$Q(0,a) = \zeta(0) = -1/2$ が成り立つように，$Q(s,a)$ は定数倍が調整されている．$Q(s,a)$ は次の関数等式を充たすことが知られている（[3, Theorem 1.1] を参照）．

$$Q(1-s,a) = \Gamma_{\cos}(s) Q(s,a), \qquad \Gamma_{\cos}(s) := \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \cos\Big(\frac{\pi s}{2}\Big) \tag{1.3}$$

上記の関数等式において $Q(s,a)$ をリーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ に書き換えれば，リーマンのゼータ関数の関数等式に一致することを強調しておく．このリーマンゼータ型の関数等式については [3, Section 1.3] などを参照して頂きたい．

さらに $Q(s,a)$ は臨界線 $\Re(s) = 1/2$ 上に無限個の零点を持つ（[3, Theorem 1.2] を参照）など様々な良い性質がある．筆者は近年この $Q(s,a)$ と関連する関数について研究しているが，今回もその流れである．

2　主定理とその証明

2.1　Main results

$q > 2$ を整数，$\chi(n)$ を $\mathrm{mod}\ q$ の原始的ディィリクレ指標とし，

$$R^{(l)}(s,\chi) := (s)_l q^{s+l} L(s+l,\chi) + (2\pi)^l \psi(l) \sqrt{q} L(s-l,\chi)$$

とおく．ただし $l \in \mathbb{N}$ であり，$(s)_l$ と $\psi(l)$ を次のように定義する．

$$(s)_l := s(s+1)\cdots(s+l-1), \qquad \psi(l) := \begin{cases} 1 & l \equiv 0,1 \mod 4, \\ -1 & l \equiv 2,3 \mod 4. \end{cases}$$

このとき，次の定理が成り立つ．ただし，$l = 1$ かつ χ の導手が 3 または 4 であるときは，既に [4] により証明されている．

Theorem 2.1. l を奇数としかつ χ を奇指標とする．このとき，$R^{(l)}(s,\chi)$ はリーマンゼータ型の関数等式

$$R^{(l)}(1-s,\chi) = \Gamma_{\cos}(s) R^{(l)}(s,\chi) \tag{2.1}$$

を充たし，$R^{(l)}(1/2,\chi) > 0$ であり，零点は正でない偶数上，または臨界線 $\Re(s) = 1/2$ 上にしかない．さらに，l が偶数でありかつ χ が偶指標であるときも同じ主張が成り立つ．

主指標に対応するものとして，次の定理が成り立つ．

Theorem 2.2. $q > 1$ を自然数とし，

$$\zeta_q^{(2k)}(s) := (s)_{2k}\bigl(q^{s+2k} - 1\bigr)\zeta(s+2k) + (-1)^k (2\pi)^{2k} \bigl(q^{1-s+2k} - 1\bigr)\zeta(s-2k).$$

とおく．このとき，$\zeta_q^{(2k)}(s)$ はリーマンゼータ型の関数等式 $\zeta_q^{(2k)}(1-s) = \Gamma_{\cos}(s)\zeta_q^{(2k)}(s)$ を持ち，$\zeta_q^{(2k)}(1/2) > 0$ であり，零点は正でない偶数上，または臨界線 $\Re(s) = 1/2$ 上のみに存在する．

この 2 つの定理から，次の定理を得る．$U(s,\chi)$ と $T_q(s)$ を以下のように定義する．

$$U(s,\chi) := \frac{R^{(2)}(s,\chi)}{s(1-s)}, \qquad T_q(s) := \frac{\zeta_q^{(2)}(s)}{s(1-s)}.$$

上記の関数が表題にある，リーマンゼータ型の関数等式，リーマン予想，リンデレーフ予想を充たす関数である．さらに (1.2) の類似を充たすことも注意しておく．

Theorem 2.3. χ を *mod q* の実原始的偶指標とする．このとき，$U(s,\chi)$ はリーマンゼータ型の関数等式 $U(1-s,\chi)=\Gamma_{\cos}(s)U(s,\chi)$ を充たし $U(1/2,\chi)>0$, である．その上，$s=1$ で一位の極を持ち，実零点は負の偶数上のみに存在し全て単根である．さらに，実でない零点は全て臨界線 $\Re(s)=1/2$ 上にあり，次を充たす

$$|t|^{1/2-\sigma} \ll U(\sigma+it,\chi) \ll |t|^{1/2-\sigma}, \qquad |t|\geq 1, \quad \sigma<0. \tag{2.2}$$

加えて，$U(\sigma+it,\chi) \ll_{\sigma,q} |t|^{\xi}$ を充たす ξ の下限を $\mu(\sigma)$ と定義すると，それは *(1.1)* で与えられる．関数 $T_q(s)$ も同じ性質を持つ．

2.2 証明について

証明については詳しく記載せず，アイデアを簡単に述べることに留める．詳細は論文を参照して頂きたい．

まず，$R^{(l)}(s,\chi)$ と $\zeta_q^{(2k)}(s)$ の関数等式の証明であるが，それは $Q(s,a)$ の関数等式 (1.3) から証明される．関数等式 (1.3) のガンマ因子は明らかに a に依存していない．よって (1.3) を a で偏微分してもリーマンゼータ型の関数等式が得られる．そのようにして得られた関数等式のガンマ因子も a に依存しない．よって a を適切に幾つか指定し，その一次結合を考えてもリーマンゼータ型の関数等式を充たす．その一次結合が $R^{(l)}(s,\chi)$ や $\zeta_q^{(2k)}(s)$ になるという論法である．

$R^{(l)}(s,\chi)$ と $\zeta_q^{(2k)}(s)$ のリーマン予想の証明では，次の Lagarias と Suzuki による [2, Theorem 4] が鍵となる．

Lemma 2.4. $F(s)$ は位数 0 又は 1 の整関数であり，実軸上で実数値をとり，適切な符号に関して関数等式 $F(s)=\pm F(1-s)$ を充たし，ある $\alpha>0$ が存在して，$F(s)$ の全ての零点は帯領域 $|\Re(s)-1/2|<\alpha$ 内にあるとする．このとき，任意の固定された $\gamma\geq\alpha$ に対して，

$$\left|\frac{F(s+\gamma)}{F(s-\gamma)}\right|>1 \quad \textit{if} \quad \Re(s)>\frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{F(s+\gamma)}{F(s-\gamma)}\right|<1 \quad \textit{if} \quad \Re(s)<\frac{1}{2}.$$

この補題と

$$|s+l-1|\geq|s-l|, \qquad \Re(s)\geq 1/2$$

のような $\Re(s)=1/2$ においては等号が成立するような不等式により，$R^{(l)}(s,\chi)$ と $\zeta_q^{(2k)}(s)$ のリーマン予想が証明される．

$R^{(l)}(s,\chi)$ と $\zeta_q^{(2k)}(s)$ がリーマンゼータ型の関数等式を充たすことは、その構成法からわかるが，何故 Lemma 2.4 が適用でき，リーマン予想が証明されたかは著者には不明

である．$R^{(l)}(s,\chi)$ と $\zeta_q^{(2k)}(s)$ のリーマン予想が成り立つかもしれないと予測は出来たが，幸か不幸か浅学菲才であるため，著者が使えるリーマン予想を証明するための手法は Lemma 2.4 のみであった．したがって，試しに適用してみたら，多少の苦労はあったが $R^{(l)}(s,\chi)$ と $\zeta_q^{(2k)}(s)$ のリーマン予想が証明できたというのが現状である．

即ち，$Q(s,a)$ はリーマンゼータ型の関数等式を量産する関数である．そして Lemma 2.4 はリーマン予想を充たす関数を生成又は判定する補題である．今回は何故上手く両者がかみ合ったかは不明である．実際に $Q(s,a)$ そのものは Lemma 2.4 が適用できないばかりか，$a \ne 1/2, 1/3, 1/4, 1/6$ が有理数であるときは $\Re(s) > 1/2$ において無限個の複素零点を持つことが，ディリクレ L 関数の同時普遍性定理から証明できる．

3　いくつかの注意

3.1　オーダー評価について

この章ではリンデレーフ予想と (1.2) について述べる．零でない定数関数は $\Re(s) > 1/2$ において零を持たないという観点においてはリーマン予想の類似を充たすし，リンデレーフ予想の類似も充たす．しかし (1.2) にあるような下からの評価は成立しない．Taylor は [6] において

$$\zeta^*(s+1/2) - \zeta^*(s-1/2), \qquad \zeta^*(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

はリーマン予想の類似を充たすことを示したが，やはり (1.2) にある下からの評価はスターリングの公式により成立しない．さらにディリクレ L 関数の一次結合，ただし全ての指標の導手と偶奇は同じとする場合も，相異なる 2 つ以上の一次結合であれば，絶対収束領域に零点を持ち，概周期性からある帯領域において無限個の零点を持つ．よって関数等式で写すと $\sigma < 0$ で零点を持つため (1.2) にある下からの評価は成立しない．

したがって (1.2) にあるような下からの評価を与えるには「良い関数等式を持つ」「$\sigma > 1$ で零点を持ったとしても実軸の近くに限定される」「$\sigma < 1$ では $|t| \ge 1$ が大きければ，大きな値をとる」など様々な条件が必要である．リンデレーフ予想も考慮するならば，$0 \le \Re(s) \le 1$ において大きくなりすぎてもダメである．よってリンデレーフ予想と (1.2) にある下からの評価を充たす関数を構成することは非常に困難であると考えられる．

しかし $U(s,\chi)$ と $T_q(s)$ は共に (1.2) にある下からの評価を充たすことを注意しておく．さらにオーダー評価とは関係ないが，これらの関数は $s=1$ で一位の極を持ち，実零点は負の偶数上のみに存在し全て単根である．$U(s,\chi)$ と $T_q(s)$ は共に $1/2 < \Re(s) < 1$ において $O(1)$ となるのが残念である．これがリーマンゼータ関数のようにもし $\Omega(1)$ にできればさらなる進展であるが，それに至るアイデアは今のところ筆者には全くない．

3.2 論文 [4] について

論文 [4] は数学において最も有名なプレプリントサーバー arXiv.org ではなく，日本のプレプリントサーバーである Jxiv にアップしてあることを不思議に思った方もいるかもしれない．その理由は簡単である．arXiv.org に掲載拒否されたからである．しかし論文 [4] は 100 年近い伝統のある The Quarterly Journal Of Mathematics（論文 [6] と同じ）に掲載されている．arXiv.org の言い分は以下のものである．

Thank you for submitting your work to arXiv. We regret to inform you that arXiv's moderators have determined that your submission will not be accepted and made public on `arXiv.org|http://arxiv.org`.
Our moderators determined that your submission does not contain sufficient original or substantive scholarly research and is not of interest to arXiv.
For more information on moderation policies and procedures, please see: `https://arxiv.org/help/moderation`.

それに対する私の返信は

The paper submit/4672863 definitely contains sufficient original and substantive scholarly research.
We prove the Riemann hypothesis for some L-function but not the Riemann zeta function. The proof is an improvement of the method introduced by Taylor (1945), Lagarias and Suzuki (2005) and so on. Professors Lagarias and Suzuki will be interested in this paper.
You can see my research in
`https://sites.google.com/site/takashinakamurazeta/`
`https://www.researchgate.net/profile/Takashi-Nakamura-14`
My latest paper will be published in Proceedings of AMS. Moreover, my papers are cited by more than 200 times and 100 authors (see MathSciNet).
In conclusion, I have written some good papers and this paper is also important.

arXiv.org の返答は

Thank you for submitting your work to arXiv.
Our moderators will consider an appeal if this submission is published or accepted in a conventional journal with a resolving DOI (Digital Object Identifier) or link to

the journal's website showing the status of the work.

For more information, please see `https://arxiv.org/help/moderation`.

We appreciate your interest in arXiv and wish you the best.

であった．上記のメールを受け取った後は arXiv.org とは連絡を取っていないし，取りたくもないし，今後取るつもりもない．

証明したのはリーマンゼータ関数に対するリーマン予想でないことは抗議文に明記してあるし，論文のアブストラクトにもそれが分かるように書いてある．つまり moderators は論文のアブストラクトも抗議文も全く読んでいないと推測される．米国には通信品位法 230 条が存在するため，プラットフォーム側の削除等の対応に関し，著者がプラットフォーム側の責任を問うことは出来ないようである．数学の論文は政治的な内容を一切含んでいないことが殆どであるが，論文 [1] のように「現代社会」に対して批判的な論文を碌にアブストラクトも読まず削除したらどうなるか考える時期ではないだろうか．「そんな難しいこと言わなくても，moderators は (解析) 数論の人ではないだろうし，忙しいだろうし」と弁護の声もあるだろうが，私は暫く arXiv.org にプレプリントをアップせず，Jxiv[*1] と ResearchGate を利用するつもりである．

Acknowledgments The author was partially supported by JSPS grant 22K03276.

参考文献

[1] D. Bell, *Pandemic preparedness and the road to international fascism.* The American Journal of Economics and Sociology, `https://doi.org/10.1111/ajes.12531`.

[2] J. Lagarias and M. Suzuki, *The Riemann hypothesis for certain integrals of Eisenstein series.* J. Number Theory **118** (2006), no. 1, 98–122.

[3] T. Nakamura, *The functional equation and zeros on the critical line of the quadrilateral zeta function.* J. Number Theory **233** (2022), 432–455 (arXiv:1910.09837).

[4] T. Nakamura, *L-functions with Riemann's functional equation and the Riemann hypothesis*, to appear in The Quarterly Journal Of Mathematics, DOI: `https://doi.org/10.51094/jxiv.238`.

[5] T. Nakamura, *L-functions with Riemann's functional equation and the Lindelöf and Riemann hypotheses.*

[6] P. R. Taylor, *On the Riemann zeta function*, Quart. J. Oxford **19** (1945) 1–21.

[*1] Jxiv には「投稿されたプレプリントは、Jxiv が最低限のスクリーニングを行ったうえで公開いたします」とあり，これには数日かかる．時差はないはずであるが，対応が非常に遅いので，利用はお勧めできない．