

On iterated integrals on some specific algebraic curves of degree 2

東北大学 理学研究科 数学専攻 大塚瑛介 *

Eisuke Otsuka

Mathematical Institute, Graduate School of Science,
Tohoku University

概要

本稿では、特別な形をした代数二次曲線の反復積分として得られる周期について得られた結果に関して、2023 年 10 月に行われた 2023 年度 RIMS 共同研究（公開型）「解析的整数論とその周辺」で講演した内容をまとめたものである。この内容の一部は [6] に基づく。

1 はじめに

多重ゼータ値 (MZVs) は、 $k_1, \dots, k_{d-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ および $k_d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対し多重級数

$$\zeta(k_1, \dots, k_d) := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_d} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_d^{k_d}}$$

で定義される実数であり、それらが張る $\mathbb{Q}$ -線形空間の構造やその $\mathbb{Q}$ -線形関係式などが研究されている ([8]). MZVs が持つ重要な性質の 1 つとして、これらが反復積分 (Definition 2.2) を用いた以下のような表示を持つという点がある:

$$\zeta(k_1, \dots, k_d) = \int_{\text{dch}} \frac{dx}{1-x} \left(\frac{dx}{x} \right)^{k_1-1} \dots \frac{dx}{1-x} \left(\frac{dx}{x} \right)^{k_d-1}.$$

ここで、積分路 $\text{dch} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ は、 $\text{dch}(t) = t$ である。この積分表示を通じて MZVs を周期とみなすことで、それらの幾何学的構造を調べることができ、このことは Deligne–Goncharov([1]), Goncharov([3]), 寺杣 ([7]) らが基本群と混合 Tate モチーフの理論を用いて MZVs のモチーフ論的な解釈を与える動機付けの 1 つとなった。

本稿では、特別な形をした代数二次曲線上の反復積分によって得られる周期を定義し、それらが満たす数論的性質について得られた結果を記す。特に、これらの周期はレベル 4 およびレベル 6 の多重 L 値との関係があり、Goncharov[4] によるモチヴィック反復積分の理論を用いた解釈を与えることが出来る。ただしそのまま利用することはできず、レベル 4, 6 のモチヴィック多重 L 値の張る空間の係数拡大およびガロア作用の不変部分を考える必要があり、第 4 節においてその概要を記す。

謝辞

この度は「2023 年度 RIMS 共同研究（公開型）「解析的整数論とその周辺」」での講演の機会をくださり、日本大学の安福悠先生、および上智大学、東北大学の中筋麻貴先生に厚く御礼申し上げます。本研究は東北大学人工知能エレクトロニクス卓越大学院プログラムからの支援を受けております。

*eisuke.otsuka.p3@dc.tohoku.ac.jp

2 定義

Notation 2.1. 本稿を通じて以下の記号を用いる.

- (i) 正整数 N に対し, $\xi_N := \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\right)$ とおく.
- (ii) 正整数 N に対し, $\mu_N := \{\xi_N^a \mid a = 0, \dots, N-1\}$, $\tilde{\mu}_N := \mu_N \cup \{0\}$ とおく.

はじめに一般の多様体上の反復積分を定義する.

Definition 2.2. 可微分多様体 M 上の滑らかな曲線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ と, M 上の 1 次微分形式 $\eta_1, \dots, \eta_k$ に対し, γ に沿った $\eta_1, \dots, \eta_k$ 反復積分を,

$$\int_{\gamma} \eta_1 \dots \eta_k := \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} \gamma^* \eta_1(t_1) \dots \gamma^* \eta_k(t_k)$$

と定義する. また, $\mathbb{C}$ 上の反復積分について, パス $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ と, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C} \setminus \gamma((0, 1))$ で, $a_1 \neq \gamma(0) =: p, a_k \neq \gamma(1) =: q$ (条件*) を満たすものに対し,

$$I_{\gamma}(p; a_1, \dots, a_k; q) := \int_{\gamma} \frac{dx}{x - a_1} \dots \frac{dx}{x - a_k}$$

とする. さらに, 非可換多項式環 $W_{\mathbb{C}} := \mathbb{Q}\langle e_z \mid z \in \mathbb{C} \rangle$ の元 $w = e_{z_1} \dots e_{z_k} \in W_{\mathbb{C}}$ で, $z_1 \neq p, z_k \neq q$ を満たすものに対し, 反復積分 $I_{\gamma}(p; w; q) \in \mathbb{C}$ を,

$$I_{\gamma}(p; w; q) := I_{\gamma}(p, z_1, \dots, z_k; q)$$

と定義し, これを $W_{\mathbb{C}}$ 上へ $\mathbb{Q}$ -線形に拡張する.

Definition 2.3. 正整数 $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と $a_1, \dots, a_d \in \mu_N$ に対し,

$$L \left(\begin{matrix} k_1, \dots, k_d \\ a_1, \dots, a_d \end{matrix} \right) := (-1)^d I_{\text{dch}}(0; a_1^{-1}, \{0\}^{k_1-1}, \dots, a_d^{-1}, \{0\}^{k_d-1}; 1)$$

をレベル N の多重 L 値という. また,

$$\text{MLV}_N^{(k)} := \text{Span}_{\mathbb{Q}} \left\{ L \left(\begin{matrix} k_1, \dots, k_d \\ a_1, \dots, a_d \end{matrix} \right) \mid k_1 + \dots + k_d = k, a_1, \dots, a_d \in \mu_N \right\}$$

とおく.

Remark 2.4. Definition 2.2 において, (条件*) は積分の収束のための条件である. より一般にこの条件を外した場合も, 接基点と呼ばれる概念を用いて反復積分を定義することが出来る ([6, Definition 2.0.6]).

先に述べた通り, 多重ゼータ値は次のような反復積分表示

$$\zeta(k_1, \dots, k_d) = \int_{\text{dch}} \frac{dx}{1-x} \left(\frac{dx}{x} \right)^{k_1-1} \dots \frac{dx}{1-x} \left(\frac{dx}{x} \right)^{k_d-1}$$

を持つ. ただし, 積分路 $\text{dch}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ は, $\text{dch}(t) = t$ で定める. これにより多重ゼータ値は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の周期とみなすことができる. 本稿ではこれをある代数二次曲線上で考え, 得られる周期について調べる.

一般に, 2 次の既約斉次多項式 $f \in \mathbb{Q}[X, Y, Z]$ に対し,

$$X_f := \{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid f(X, Y, Z) = 0\}$$

とおく. また, $Z \neq 0$ に対し F_f の局所座標 $x := \frac{X}{Z}, y := \frac{Y}{Z}$ をとり,

$$Y_f := X_f \setminus \{x = 0, 1, \infty\}$$

とおく. これを

$$\text{Spec } \mathbb{Q} \left[x, y, \frac{1}{x(1-x)} \right] \Big/ (f(x, y, 1))$$

で定まる $\mathbb{Q}$ 上のアフィン代数曲線とみなし, その代数的 1 次 de Rham コホモロジーの基底

$$B_f \subseteq H_{\text{dR}}^1(Y_f/\mathbb{Q})$$

を 1 つ固定する. さらに, 二重被覆

$$\varphi_f : X_f \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \quad \varphi_f([X : Y : Z]) := [X : Z]$$

をとり, X_f 上の道 $\text{dch}_f : [0, 1] \rightarrow F_f$ を, $\varphi_f \circ \text{dch}_f = \text{dch}$ を満たすようにとる.

Definition 2.5. $f \in \{g, h\}$ および 1-形式 $\eta_1, \dots, \eta_k \in B_f$ に対し,

$$I_f(\eta_1 \cdots \eta_k) := \int_{\text{dch}_f} \eta_1 \cdots \eta_k \quad (1)$$

と定義する.

以下, 1-形式 $\eta_1, \dots, \eta_k \in B_f$ は, 式 (1) の広義積分が収束するようなもののみを考えることとする. また, これらが成す $\mathbb{Q}$ -線形空間を

$$\mathcal{Z}_f^{(k)} := \text{Span}_{\mathbb{Q}} \{I_f(\eta_1 \cdots \eta_k) \mid \eta_1, \dots, \eta_k \in B_f\}$$

と定める. この $\mathbb{Q}$ -線形空間の構造を理解することが本稿の目標となる.

本稿では特に, $g(X, Y, Z) := X^2 + Y^2 - Z^2$, $h(X, Y, Z) := X^2 + XY + Y^2 - Z^2$ とおき, $f \in \{g, h\}$ の場合を考える. 以下, 各 $f \in \{g, h\}$ に対し基底 B_f は次のように固定する.

$$B_g := \left\{ \omega_0 := \frac{dx}{x}, \omega_1 := \frac{dx}{1-x}, \omega_2 := \frac{dx}{y}, \omega_3 := \frac{dx}{xy} \right\},$$

$$B_h := \left\{ \omega_0 := \frac{dx}{x}, \omega_1 := \frac{dx}{1-x}, \omega_4 := \frac{dx}{x+2y}, \omega_5 := \frac{dx}{x(x+2y)}, \omega_6 := \frac{dx}{(1-x)(x+2y)} \right\}.$$

このとき, 式 (1) の収束条件は, $f = g$ のとき $\eta_1 \neq \omega_0, \omega_3$ かつ $\eta_k \neq \omega_1$, $f = h$ のとき $\eta_1 \neq \omega_0, \omega_5$ かつ $\eta_k \neq \omega_1, \omega_6$ となる. さらに, B_f はいずれも多重ゼータ値のときに現れた微分形式 ω_0, ω_1 を含み,

$$I_f(\omega_1 \underbrace{\omega_0 \cdots \omega_0}_{k_1-1} \cdots \omega_1 \underbrace{\omega_0 \cdots \omega_0}_{k_d-1}) = \zeta(k_1, \dots, k_d)$$

となる.

Example 2.6. 任意の $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し,

$$I_g(\omega_2 \underbrace{\omega_3 \cdots \omega_3}_{k_1-1} \cdots \omega_2 \underbrace{\omega_3 \cdots \omega_3}_{k_d-1}) = \tilde{T}(k_1, \dots, k_d)$$

$$:= 2^d \sum_{\substack{0 < m_1 < \cdots < m_d \\ m_j \equiv j \pmod{2}}} \frac{(-1)^{(m_d-d)/2}}{m_1^{k_1} \cdots m_d^{k_d}}$$

が成り立つ. この $\tilde{T}(k_1, \dots, k_d)$ は多重 $\tilde{T}$ -値とよばれ, 金子-津村 ([5]) によって導入された特殊値である.

3 モチヴィック多重ゼータ値

本節では、今回考えている周期のモチヴィックな解釈を与えるために、寺杣や Deligne–Goncharov らによって定式化された多重ゼータ値や多重 L 値のモチヴィックな解釈についての結果を述べる．一般に $F \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ を代数体とし、 $\mathbb{Q}$ -線形部分空間 $R \subseteq F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ をとる．また、 $\mathcal{O}_{F,R}$ を、 F の整数環 $\mathcal{O}_F$ の R における局所化とする．このとき、Deligne–Goncharov は $\mathcal{O}_{F,R}$ 上の混合 Tate モチーフのなす圏 $\text{MTM}_{F,R}$ が存在することを示した．さらに、その普遍 Hopf 代数 $\mathcal{A}_{F,R}$ および形式的変数 τ の多項式環とのテンソル積 $\mathcal{H}_{F,R} := \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\tau]$ に対して以下の定理が成り立つ．

Theorem 3.1 ([1, p.211, section 1.1]). (i) $\mathcal{A}_{F,R} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{A}_{F,R}^{(k)}$ は可換な次数付き Hopf 代数となる．特に可換な積 III 、および余積 Δ と呼ばれる線形写像

$$\text{III} : \mathcal{A}_{F,R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}_{F,R} \rightarrow \mathcal{A}_{F,R}, \quad \Delta : \mathcal{A}_{F,R} \rightarrow \mathcal{A}_{F,R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}_{F,R}$$

が存在する．

(ii) $\mathcal{H}_{F,R} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{H}_{F,R}^{(k)}$ は次数付き Hopf 代数となる．特に積 III および余作用 Δ と呼ばれる線形写像

$$\text{III} : \mathcal{H}_{F,R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}_{F,R} \rightarrow \mathcal{H}_{F,R}, \quad \Delta : \mathcal{H}_{F,R} \rightarrow \mathcal{A}_{F,R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}_{F,R}$$

が存在する．

(iii) 周期写像と呼ばれる線形写像 $\text{per} : \mathcal{H}_{F,R} \rightarrow \mathbb{C}$ が存在し、 $\text{per}(\tau) = 2\pi\sqrt{-1}$ となる．

多重ゼータ値をはじめとする特別な形をした周期は、そのモチヴィックな解釈を $\mathcal{H}_{F,R}$ の元として与えることができ、周期写像によって送ることでもとの周期が復元される．ここでは Goncharov によって定式化された反復積分に対するモチヴィックな解釈に関する結果を用いる．その主張を述べるために、複素数 $a, b, c \in \mathbb{C}$ に対し、

$$\tilde{\text{I}}(a, b, c) := \begin{cases} \frac{c-b}{a-b}, & a \neq b \text{ and } b \neq c, \\ c-b, & a = b \text{ and } b \neq c, \\ (a-b)^{-1}, & a \neq b \text{ and } b = c, \\ 1 & a = b = c \end{cases}$$

と定める．

Theorem 3.2 ([4, p.212, Theorem 1.1]). 任意の $a_0, \dots, a_{k+1} \in F$ で、 $\tilde{\text{I}}(a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3}) \in R$ ($0 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq k+1$) を満たすもの、および $\gamma(0) = a_0$ 、 $\gamma(1) = a_{k+1}$ を満たすパス $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ に対し、ある元 $\text{I}_\gamma^{\text{m}}(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) \in \mathcal{H}_{F,R}^{(k)}$ が存在し、 $\text{per}(\text{I}_\gamma^{\text{m}}(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1})) = \text{I}_\gamma(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1})$ となる．

これにより、多重ゼータ値や多重 L 値などの周期は、 F や R を適切に設定することで、 $\mathcal{H}_{F,R}$ の元としてモチヴィックな解釈を与えることができ、 $\mathcal{H}_{F,R}$ の構造を調べることがもとの周期のなす $\mathbb{Q}$ -線形空間を理解することに繋がる．例えば、 $F = \mathbb{Q}$ 、 $R = 1$ として $\mathcal{H}_{\mathbb{Q},1}$ の部分空間

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Q},1}^{\text{real}} := \{u \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q},1} \mid \text{per}(u) \in \mathbb{R}\}$$

の構造を調べることで、次の結果を得る．

Corollary 3.3 ([1, 3, 7]). 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, 多重ゼータ値のなす $\mathbb{Q}$ -線形空間

$$\mathcal{Z}^{(k)} := \text{Span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(k_1, \dots, k_d) \mid k_1 + \dots + k_d = k\}$$

の次元について,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}^{(k)} \leq D^{(k)}$$

が成り立つ. ただし, 数列 $D^{(k)}$ は母関数

$$\sum_{k=0}^{\infty} D^{(k)} t^k = \frac{1}{1 - t^2 - t^3}$$

で与えられる.

同様に, $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $R = \langle 2 \rangle_{\mathbb{Q}}$ とおくことでレベル 4 の多重 L 値, $F = \mathbb{Q}(\xi_6)$, $R = \langle 2, 3 \rangle_{\mathbb{Q}}$ とおくことでレベル 6 の多重 L 値のモチヴィックな解釈をそれぞれ与えることが出来る. このことは次節で用いる.

Remark 3.4. 周期写像 $\text{per} : \mathcal{H}_{F,R} \rightarrow \mathbb{C}$ は単射であることが予想されている (Grothendieck の周期予想, [2, p.342, Conjecture 4.118]). すなわち, このようなモチヴィックな持ち上げによって周期のもつ $\mathbb{Q}$ -線形な情報は失われないことが予想されており, $\mathcal{H}_{F,R}$ は周期のなす $\mathbb{Q}$ -線形空間の構造を良く捉えてるとみることができる.

4 $I_f(\eta_1 \cdots \eta_k)$ のモチヴィックな解釈

本節では $I_f(\eta_1 \cdots \eta_k)$ のモチヴィックな解釈を与える. この際, 以下で与える $I_f(\eta_1 \cdots \eta_k)$ と多重 L 値の関係が重要である.

Proposition 4.1. (I) 任意の $\eta_1, \dots, \eta_k \in B_g$ に対し,

$$I_g(\eta_1 \cdots \eta_k) = I_{\text{dch}}(0; \theta_1 \cdots \theta_k; 1)$$

が成り立つ. ただし, $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathbb{Q}(\sqrt{-1})\langle e_a \mid a \in \mathbb{Q}(\sqrt{-1}) \rangle$ は

$$\theta_j := \begin{cases} e_0 - e_{\sqrt{-1}} - e_{-\sqrt{-1}}, & \eta_j = \omega_0, \\ -2e_1 + e_{\sqrt{-1}} + e_{-\sqrt{-1}}, & \eta_j = \omega_1, \\ \sqrt{-1}^{-1}(e_{\sqrt{-1}} - e_{-\sqrt{-1}}), & \eta_j = \omega_2, \\ e_0, & \eta_j = \omega_3 \end{cases} \quad (2)$$

で定める. 特に, $l_g(\boldsymbol{\eta}) := \#\{j \mid \eta_j = \omega_2\}$ とすると,

$$I_g(\eta_1 \cdots \eta_k) \in \sqrt{-1}^{l_g(\boldsymbol{\eta})} \text{MLV}_4^{(k)}$$

となる.

(II) 任意の $\eta_1, \dots, \eta_k \in B_h$ に対し,

$$I_h(\eta_1 \cdots \eta_k) = I_{\text{dch}}(0; \theta_1 \cdots \theta_k; 1)$$

が成り立つ。ただし, $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3})\langle e_a \mid a \in \mathbb{Q}(\xi_6) \rangle$ は

$$\theta_j := \begin{cases} e_0 + e_{-2} - e_{\xi_3} - e_{\xi_3^{-1}}, & \eta_j = \omega_0, \\ -e_1 + e_{\xi_3} + e_{\xi_3^{-1}}, & \eta_j = \omega_1, \\ \frac{1}{\sqrt{-3}}(e_{\xi_3} - e_{\xi_3^{-1}}), & \eta_j = \omega_4, \\ \frac{1}{2}(e_0 - e_{-2}), & \eta_j = \omega_5, \\ -e_1, & \eta_j = \omega_6. \end{cases} \quad (3)$$

で定める。特に, $l_h(\boldsymbol{\eta}) := \#\{j \mid \eta_j = \omega_4\}$ とすると,

$$I_h(\eta_1 \cdots \eta_k) \in \sqrt{-3}^{l_h(\boldsymbol{\eta})} \text{MLV}_6^{(k)}$$

となる。

Proof. (I) は, 定義式 (1) において, $x = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$ と, (II) は定義式 (1) において, $x = \frac{\lambda(\lambda+2)}{1+\lambda+\lambda^2}$ と, それぞれ変数変換すればよい。□

Proposition 4.1 より, $I_f(\eta_1 \cdots \eta_k)$ を多重 L 値を用いて表そうとすると, $\sqrt{-1}$ 倍, $\sqrt{-3}$ 倍の “ズレ” が生じる。多重 L 値は既にモチヴィックな解釈が与えられているためそれを利用したいが, $I_f(\eta_1 \cdots \eta_k)$ のモチーフ論的解釈を与えるためにはこの “ズレ” を解消する必要がある, そのために $\mathcal{H}_{F,R}$ の係数拡大およびガロア作用の不変部分を考える。

Definition 4.2. 各 $f \in \{g, h\}$ に対し,

$$\mathcal{H}_f^{(k)} := \begin{cases} \mathcal{H}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \langle 2 \rangle_{\mathbb{Q}}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{-1}), & f = g, \\ \mathcal{H}_{\mathbb{Q}(\xi_6), \langle 2, 3 \rangle_{\mathbb{Q}}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\xi_6), & f = h \end{cases}$$

と定める。また, 下記の記号をそれぞれ $\mathcal{H}_f := \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{H}_f^{(k)}$ へ拡張する。

- 余作用 $\Delta(u \otimes c) := \Delta(u) \otimes c,$
- 積 $(u \otimes c) \cdot (v \otimes c') := uv \otimes cc',$
- 周期写像 $\text{per}(u \otimes c) := \text{per}(u) \cdot c.$

これにより, $I_f(\eta_1 \cdots \eta_k)$ のモチヴィックな解釈は, $\mathcal{H}_f^{(k)}$ の元として与えることが出来る。

Definition 4.3. 各 $f \in \{g, h\}$ および $\eta_1, \dots, \eta_k \in B_f$ に対し,

$$I_f^{\mathfrak{m}}(\eta_1 \cdots \eta_k) := I_{\text{dch}}^{\mathfrak{m}}(0; \theta_1 \cdots \theta_k; 1) \in \mathcal{H}_f^{(k)}$$

と定義する。ただし, 各 θ_j は式 (2) および式 (3) で与えたものと同じように定める。

Remark 4.4. Proposition 4.1 より,

$$\text{per}(I_f^{\mathfrak{m}}(\eta_1 \cdots \eta_k)) = I_f(\eta_1 \cdots \eta_k)$$

が成り立つ。これにより I_f のモチヴィックな解釈を与えることが出来た。

次に, $\mathcal{H}_f$ への Galois 群の作用を考えることで, より詳細に $\mathbb{Q}$ -線形空間の構造を調べる。 $\mathcal{O}_{F,R}$ 上の混合 Tate モチーフの圏 $\text{MTM}_{F,R}$ には, Galois 作用が誘導する $\mathcal{O}_{F,R}$ の環としての自己同型が誘導する $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ の作用が入る。また $\mathcal{H}_{F,R}$ は, $\text{MTM}_{F,R}$ の淡中基本群の座標環なのでここにも作用が誘導される。ここでは少々天下りの的であるが, この Galois 群 $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ のモチヴィック反復積分への作用を明示的に与える。

Proposition 4.5. Galois 群 $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ は, $\mathcal{H}_{F,R}$ へ作用する. この作用は積と余作用 Δ を保つ. さらに, モチヴィック反復積分で表される元に対しては次のように作用する.

$$\sigma(I_\gamma^{\text{m}}(p; a_1, \dots, a_k; q)) = I_{\sigma\gamma}^{\text{m}}(\sigma(p); \sigma(a_1), \dots, \sigma(a_k); \sigma(q)).$$

ただし曲線 $\sigma\gamma$ は, $(\sigma\gamma)(t) := \sigma(\gamma(t))$ を表す.

さらに, 対角作用を考えることで, Galois 群 $G_g := \text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-1})/\mathbb{Q})$ は $\mathcal{H}_g = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \langle 2 \rangle_{\mathbb{Q}}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ に, $G_h := \text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_6)/\mathbb{Q})$ は $\mathcal{H}_h = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}(\xi_6), \langle 2, 3 \rangle_{\mathbb{Q}}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\xi_6)$ に, それぞれ作用する. このとき次が成り立つ.

Proposition 4.6. 各 $f \in \{g, h\}$ および任意の $\eta_1, \dots, \eta_k \in B_f$ に対し, $I_f^{\text{m}}(\eta_1 \cdots \eta_k) \in \mathcal{H}_f$ は G_f の作用で不変である.

Proof. 各 θ_j は G_f の作用で不変である. また, 積分路 $d\mathbf{ch}$ も G_f の作用で不変である. よって Proposition 4.5 より $I_f^{\text{m}}(\eta_1 \cdots \eta_k)$ は G_f の作用で不変となる. $\square$

以上の考察から, $\mathcal{Z}_f^{(k)}$ の構造を調べるためには $\mathcal{H}_f^{(k)}$ の G_f -不変部分 $\left(\mathcal{H}_f^{(k)}\right)^{G_f}$ を調べればよいことが分かる.

5 $\mathcal{Z}_f$ の構造

本節では, 第 4 節で与えた $I_f(\eta_1 \cdots \eta_k)$ のモチーフ論的解釈を用いて $\mathcal{Z}_f$ の構造を調べる.

Theorem 5.1. 数列 $D_g^{(k)}$ および $D_h^{(k)}$ を, 母関数

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} D_g^{(k)} t^k &= \frac{1}{1-2t}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} D_h^{(k)} t^k &= \frac{1}{1-3t+t^2} \end{aligned}$$

によって定める. このとき各 $f \in \{g, h\}$ および任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \left(\mathcal{H}_f^{(k)} \right)^{G_f} = D_f^{(k)}$$

が成り立つ.

さらに, $\mathcal{Z}_f^{(k)} \subseteq \text{per} \left(\left(\mathcal{H}_f^{(k)} \right)^{G_f} \right)$ であることから, $\mathcal{Z}_f^{(k)}$ の次元の上界を求めることが出来る.

Corollary 5.2. 各 $f \in \{g, h\}$ および任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_f^{(k)} \leq D_f^{(k)}$$

が成り立つ.

Proof of Theorem 5.1. [6, Section 5.1] と同様の方法で示す. 詳細はそちらを参照されたい. まず, Goncharov ([4, p.279, Appendix A.4 and A.5]) により, $\mathcal{A}_{F,R}$ の Hopf 代数としての構造は決定されており, それによると Hopf 代数としての非標準的な同型

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \langle 2 \rangle_{\mathbb{Q}}} &\cong \mathbb{Q}\langle b_j \mid j \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \rangle, \\ \mathcal{A}_{\mathbb{Q}(\xi_6), \langle 2, 3 \rangle_{\mathbb{Q}}} &\cong \mathbb{Q}\langle b_1^{(1)}, b_1^{(2)}, b_j^{(1)} \mid j \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \rangle \end{aligned}$$

が存在することが分かる．ただし，右辺は次数 j の生成元 $b_j, b_j^{(s)}$ で生成される自由 $\mathbb{Q}$ -代数である．この同型を適切に正規化し，同型によって右辺に誘導される Galois 群 G_f の作用を計算することで，

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{H}_g^{(k)}\right)^{G_g} \cong & \bigoplus_{\substack{r \geq 0 \\ k-r: \text{ even}}} \text{Span}_{\mathbb{Q}} \left\{ b_{j_1} \cdots b_{j_r} \cdot \tau^l \otimes 1 \mid \begin{array}{l} j_1, \dots, j_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ \sum_{i=1}^r j_i + l = k \end{array} \right\} \\ & \oplus \bigoplus_{\substack{r \geq 0 \\ k-r: \text{ odd}}} \text{Span}_{\mathbb{Q}} \left\{ b_{j_1} \cdots b_{j_r} \cdot \tau^l \otimes \sqrt{-1} \mid \begin{array}{l} j_1, \dots, j_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ \sum_{i=1}^r j_i + l = k \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{H}_h^{(k)}\right)^{G_h} \cong & \bigoplus_{\substack{r \geq 0 \\ k-r: \text{ even}}} \text{Span}_{\mathbb{Q}} \left\{ b_{j_1}^{(s_1)} \cdots b_{j_r}^{(s_r)} \cdot \tau^l \otimes 1 \mid \begin{array}{l} j_1, \dots, j_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ s_i \in \begin{cases} \{1, 2\}, & j_i = 1, \\ \{1\}, & j_i > 1, \end{cases} \sum_{i=1}^r j_i + l = k \end{array} \right\} \\ & \oplus \bigoplus_{\substack{r \geq 0 \\ k-r: \text{ odd}}} \text{Span}_{\mathbb{Q}} \left\{ b_{j_1}^{(s_1)} \cdots b_{j_r}^{(s_r)} \cdot \tau^l \otimes \sqrt{-3} \mid \begin{array}{l} j_1, \dots, j_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ s_i \in \begin{cases} \{1, 2\}, & j_i = 1, \\ \{1\}, & j_i > 1, \end{cases} \sum_{i=1}^r j_i + l = k \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

となることが分かり，右辺の基底の個数を数え上げることで次元を評価することが出来る． $\square$

さらに，各 $\mathcal{I}_f^{(k)}(\eta_1 \cdots \eta_k)$ が式 (4) および式 (5) の直和分解においてどちらに属しているか (すなわち $\sqrt{-1}$ 倍， $\sqrt{-3}$ 倍の“ズレ”があるか) を考えることで次の系を得る．

Corollary 5.3. 各 $f \in \{g, h\}$ および $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し， $\mathcal{Z}_f^{(k)}$ の部分空間 $\mathcal{Z}_f^{(k), \varepsilon}$ ($\varepsilon = 0, 1$) を，

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_g^{(k), \varepsilon} &:= \text{Span}_{\mathbb{Q}} \{ \mathcal{I}_g(\eta_1 \cdots \eta_k) \mid \# \{j \mid \eta_j = \omega_2\} \equiv \varepsilon \pmod{2} \}, \\ \mathcal{Z}_h^{(k), \varepsilon} &:= \text{Span}_{\mathbb{Q}} \{ \mathcal{I}_h(\eta_1 \cdots \eta_k) \mid \# \{j \mid \eta_j = \omega_4\} \equiv \varepsilon \pmod{2} \} \end{aligned}$$

とおく．このとき，周期予想 (Remark 3.4) が正しければ (すなわち $\text{per} : \mathcal{H}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1}), (2)_{\mathbb{Q}}} \rightarrow \mathbb{C}$ が単射であれば)

$$\mathcal{Z}_f^{(k)} = \mathcal{Z}_f^{(k), 0} \oplus \mathcal{Z}_f^{(k), 1}$$

が成り立つ．さらに，数列 $D_f^{(k), \varepsilon}$ をそれぞれ母関数

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} D_g^{(k), 0} t^k &= \frac{1-t}{1-2t}, & \sum_{k=0}^{\infty} D_g^{(k), 1} t^k &= \frac{t}{1-2t}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} D_h^{(k), 0} t^k &= \frac{1-t}{(1-3t+t^2)(1+t-t^2)}, & \sum_{k=0}^{\infty} D_h^{(k), 1} t^k &= \frac{t(2-t)}{(1-3t+t^2)(1+t-t^2)} \end{aligned}$$

で定義すると，

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_f^{(k), \varepsilon} \leq D_f^{(k), \varepsilon}$$

が成り立つ．

Remark 5.4. 金子-津村は，数値実験から多重 $\tilde{T}$ -値の成す $\mathbb{Q}$ -線形空間

$$\tilde{\mathcal{T}}^{(k)} := \text{Span}_{\mathbb{Q}} \{ \tilde{T}(k_1, \dots, k_d) \mid k_1 + \cdots + k_d = k \}$$

は， d の偶奇によって直和分解されるだろうと予想した ([5, p.5])．このことは，

$$\tilde{T}(k_1, \dots, k_d) \in \begin{cases} \mathcal{Z}_g^{(k), 0}, & d: \text{ even}, \\ \mathcal{Z}_g^{(k), 1}, & d: \text{ odd} \end{cases}$$

であることから説明することができ，周期予想が正しければ金子-津村の予想は正しいことが示される．

6 終わりに

本研究は MZVs 積分表示である $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の反復積分を、二つの二次曲線 X_g, X_h 上のものに取り替えたものを考えることから始まった。そこで、別の代数曲線上の反復積分を考えたときに同様の議論が進められるかというのは自然な疑問としてあげられる。ただし、反復積分の結果としての値自体を定義することは可能であるが、「モチヴィックな解釈を与える」という観点では、その一般論を与えるのは簡単ではないと思われる。著者としては、

どのような代数曲線であれば同様の議論が出来るのか

というのが現時点での興味の 1 つであり、今後はこのことについて考察していきたい。

参考文献

- [1] P. Deligne and A-B. Goncharov. Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 38(1):1–56, 2005.
- [2] J-I-B. Gil and J. Fresán. Multiple zeta values: From numbers to motives. <https://www.maths.dur.ac.uk/users/herbert.gangl/mzv.pdf>.
- [3] A-B. Goncharov. Multiple polylogarithms and mixed Tate motives. *arXiv:math/0103059v4*, 2001.
- [4] A-B. Goncharov. Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 128(2):209–284, 2005.
- [5] M. Kaneko and H. Tsumura. Multiple l-values of level four, poly-Euler numbers, and related zeta functions. *arXiv:2208.05146*, 2022.
- [6] E. Otsuka. On arithmetic properties of periods for some rational differential forms over $\mathbb{Q}$ on the Fermat curve F_2 of degree 2. *arXiv:2302.07650*, 2022.
- [7] T. Terasoma. Mixed Tate motives and multiple zeta values. *Invent. Math.*, 149(2):339–369, 2002.
- [8] D. Zagier. Values of zeta functions and their applications. In *First European Congress of Mathematics Paris, July 6–10, 1992: Vol. II: Invited Lectures (Part 2)*, pages 497–512. Springer, 1994.