円分多項式に関する奇妙な合同式について

Curious congruences for cyclotomic polynomials

松坂俊輝 (九州大学 数理学研究院) *

Toshiki Matsusaka (Kyushu University)

2022 年 10 月 12 日，RIMS にて行われた金子元氏（筑波大学）の講演 “New relation for the coefficients of cyclotomic polynomials” において，次の予想が発表された．

予想 0.1: 秋山・金子 [1]

多項式 $F_k(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_k]$ を

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k(x_1,\dots,x_k)\frac{t^k}{k!} = (1+t)^{x_1}\exp\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2B_{2\nu}}{(2\nu)!}(-\log(1+t))^{2\nu}x_{2\nu}\right) \tag{0.1}$$

で定めるとき，$F_{2k+1}(x_1,\dots,x_{2k+1})$ は $\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_{2k+1}]$ において x_1-k で割り切れる．ここで，B_n は Bernoulli 数である．

この多項式は Lehmer [11] によって導入されたもので，円分多項式 $\Phi_n(x)$ の $x=1$ における展開係数

$$\frac{\Phi_n^{(k)}(1)}{\Phi_n(1)} = F_k\left(\frac{\varphi(n)}{2}, \frac{J_2(n)}{4}, \dots, \frac{J_k(n)}{2k}\right)$$

を与えるという特徴を持つ．ここで，$\varphi(n)$ は Euler の totient 関数，$J_k(n)$ は Jordan の totient 関数である．秋山・金子の研究の動機は報告記事 [8] において詳しく紹介されているが，上の予想の元となったのは，彼らが発見した「円分多項式に関する奇妙な合同式」である．

定理 0.2: 秋山・金子 [1]

任意の $n \geq 3$，$k \geq 0$ に対し，$\Phi_n^{(2k+1)}(1) \in \mathbb{Z}$ は $\varphi(n)/2 - k \in \mathbb{Z}$ で割り切れる．

この報告記事では，2023 年 10 月 10 日に行った講演に沿って，**予想 0.1** の証明，およびその系として**定理 0.2** を示すためのアイデアを紹介する．証明の細部については，渋川元樹氏との共著論文 [13] に譲ることとする．

* 本研究は科研費（課題番号：20K14292，21K18141）の助成を受けたものである．

1　円分多項式 $\Phi_n(x)$ の係数に関する研究

1.1　定義

正整数 n に対し，多項式 $\Phi_n(x)$ を

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{0<k\leq n \\ (k,n)=1}} (x - e^{2\pi ik/n})$$

と定義すると，これは $\mathbb{Q}$-係数の既約多項式を定めることが知られている．この多項式は第 n 円分多項式と呼ばれている．最初の数項を計算してみると，

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(x) = x - 1, && \Phi_2(x) = x + 1, && \Phi_3(x) = x^2 + x + 1, \\
&\Phi_4(x) = x^2 + 1, && \Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, && \Phi_6(x) = x^2 - x + 1, \\
&\Phi_7(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, && \Phi_8(x) = x^4 + 1, && \Phi_9(x) = x^6 + x^3 + 1
\end{aligned}$$

となっている．定義より，

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$$

が成り立つため，Möbius の反転公式を適用することで，Möbius 関数 $\mu(n)$ を用いた

$$\Phi_n(x) = \prod_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)}$$

という表示も得られる．

1.2　$x = 0$ における係数

円分多項式の係数に関する研究の歴史は非常に長く，最近も多くの調査・サーベイ [5,9,15] が行われている．ここでは（本題から外れてしまうが）鈴木の定理 [16] について簡単に紹介したい．

上で与えた例を見ている範囲では，円分多項式の係数はすべて $\{-1, 0, 1\}$ に属している．これについて，一般にどれほどのことが言えるだろうか．まず，素数 p に対しては，

$$\Phi_p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} x^k$$

が成り立つため，特にすべての係数が 1 であることが分かる．n が素数の冪 $n = p^r$ の場合も，

$$\Phi_{p^r}(x) = \Phi_p(x^{p^{r-1}})$$

であることから係数はよく分かる．

n が異なる 2 つの素数 p, q の積 $n = pq$ の場合は，Migotti (1883) [14] によって $\Phi_{pq}(x)$ の係数がすべて $\{-1, 0, 1\}$ に属していることが示されている（証明は [9, 第 7 話] を参照）．

一方で，すべての n に対してそうというわけではなく，例えば $\Phi_{105}(x)$ の係数には -2 が現れる $(105 = 3 \times 5 \times 7)$．一般には鈴木によって次が示されている．

定理 1.1: 鈴木 [16]

任意の整数は，ある円分多項式の係数に現れる．

さらに Bachman [2] や Fintzen [4]，日高・伊藤 [6] によって，例えば，任意の整数が $\Phi_{pqr}(x)$ の係数として得られるなど，より精密な結果や一般化が様々に得られている．

1.3 $x = 1$ における係数

1859 年，V.-A. Lebesgue [10] は，円分多項式の $x = 1$ での値について考察し，

$$\Phi_n(1) = e^{\Lambda(n)} = \begin{cases} p & \text{if } n = p^r \quad (p \text{ は素数}, r \geq 1), \\ 1 & \text{if otherwise} \end{cases} \tag{1.1}$$

であることを示した．ここで $\Lambda(n)$ は von Mangoldt 関数である．その後 1936 年には，Hölder [7] によって，

$$\frac{\Phi_n'(1)}{\Phi_n(1)} = \frac{\varphi(n)}{2}$$

が示されている．

この結果を受けて，高階導関数の値 $\Phi_n^{(k)}(1)$ が Euler totient 関数 $\varphi(n)$ の何らかの一般化を与えているのではないか，と興味を持つことは自然であろう．この問いに一つの解答を与えたのが Lehmer [11] である．

Jordan の totient 関数を

$$J_k(n) \coloneqq n^k \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d^k \tag{1.2}$$

と定義すると，これは $J_1(n) = \varphi(n)$ の意味で Euler の totient 関数の一般化である．

定理 1.2: Lehmer [11]

多項式 $F_k(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$ を母関数 (0.1) によって定めるとき，$n \geq 2$ に対して

$$\frac{\Phi_n^{(k)}(1)}{\Phi_n(1)} = F_k\left(\frac{\varphi(n)}{2}, \frac{J_2(n)}{4}, \ldots, \frac{J_k(n)}{2k}\right)$$

が成り立つ．

Lehmer はこの形で F_k を定義したわけではないが，明示公式 [11, Theorem 3] から簡単に母関数表示 (0.1) を見出すことができる．多項式 F_k の最初の数項を計算してみると，次のようになる．

$$\begin{aligned}
F_1(x_1) &= x_1, \\
F_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{3}(3x_1^2 - 3x_2 + x_2), \\
F_3(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - 1)(x_1^2 - 2x_1 + x_2), \\
F_4(x_1, \ldots, x_4) &= \frac{1}{15}(15x_1^4 - 90x_1^3 + (30x_2 + 165)x_1^2 - (90x_2 + 90)x_1 + 5x_2^2 + 55x_2 - x_4), \\
F_5(x_1, \ldots, x_5) &= \frac{1}{3}(x_1 - 2)(3x_1^4 - 24x_1^3 + (10x_2 + 57)x_1^2 - (40x_2 + 36)x_1 + 5x_2^2 + 25x_2 - x_4)
\end{aligned}$$

予想 0.1 のとおり，たしかに奇数番目の多項式 F_{2k+1} が $x_1 - k$ で割り切れることを観察できる．残りの部分が常に既約かどうかは定かではないが，ここまで綺麗に $x_1 - k$ という因子が現れるからには，何かしらの原理が裏で働いているはずであり，一層の興味を覚える．

2 主結果と証明

2.1 予想 0.1 の証明のアイデア

非常に天下り的ではあるが，次の多項式を定義する．

定義 2.1: 松坂・渋川 [13]

多項式 $P_m(x_2, x_4, \ldots, x_{2m}) \in \mathbb{Q}[x_2, x_4, \ldots, x_{2m}]$ を

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x_2, x_4, \ldots, x_{2m}) u^{2m} = \exp\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2B_{2\nu}}{(2\nu)!} \left(2\sinh^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)\right)^{2\nu} x_{2\nu} \right)$$

で定義する．

最初の数項を計算すると，

$$\begin{aligned}
P_1(x_2) &= \frac{1}{6}x_2, \\
P_2(x_2, x_4) &= -\frac{1}{360}\bigg(x_4 - 5x_2(x_2 - 1)\bigg), \\
P_3(x_2, x_4, x_6) &= \frac{1}{15120}\left(x_6 - 7x_4(x_2 - 1) + \frac{35}{3}x_2(x_2 - 1)(x_2 - 2) + \frac{14}{3}x_2\right)
\end{aligned}$$

となる．このとき，母関数表示を比較することで，次の表示が得られる．

定理 2.2: 松坂・渋川 [13]

$$F_k(x_1,\dots,x_k)=(x_1)_k+\sum_{m=1}^{\lfloor k/2\rfloor}\frac{k!}{(k-2m)!}P_m(x_2,\dots,x_{2m})(x_1-m)_{k-2m}.$$

ここで，$(x)_n=x(x-1)\cdots(x-n+1)$ である．

この表示から，F_{2k+1} が x_1-k で割れることは明らかである．こうして**予想 0.1** が証明された．最大の問題は，どうやって多項式 P_m を見出すことができたのか，であろう．これは不思議な話であるが，Lehmer の論文 [11, p.116] に次のような予言文が残されていたのである．

In general, R_k has the expansion

$$R_k=t_1^{[k]}+2\sum_{\nu=1}^{\infty}B_{2\nu}\binom{k}{2\nu}(t_1-\nu)^{[k-2\nu]}\Omega_\nu,$$

where

$$\begin{aligned}
\Omega_1&=t_2\\
\Omega_2&=t_4-5t_2^{[2]}\\
\Omega_3&=t_6-7t_4(t_2-1)+\frac{35}{3}t_2^{[3]}+\frac{14}{3}t_2\\
\Omega_4&=t_8-\frac{20}{3}t_6(t_2-1)-\frac{7}{3}t_4^{[2]}+\frac{70}{3}t_4(t_2-1)^{[2]}\\
&\qquad-\frac{175}{9}t_2^{[4]}+\frac{10}{3}t_6-\frac{280}{9}t_2^{[2]}+\frac{290}{9}t_2.
\end{aligned}$$

論文を読む限りでは，Lehmer は R_k（F_k のこと）を $1\le k\le 7$（または $k=8$）まで具体的に計算することで，この表示を観察したようである．Lehmer 自身が証明を持っていたか，また彼の動機が何であったかはこれ以上読み取れないが，今回の研究において，彼の多項式 Ω_m の一般項を

$$P_m(x_2,\dots,x_{2m})=\frac{2B_{2m}}{(2m)!}\Omega_m(x_2,\dots,x_{2m})$$

の形で与えることで，Lehmer の観察を証明し，その系として**予想 0.1** の証明に成功した，という流れである．

2.2 「円分多項式に関する奇妙な合同式」の別証明のアイデア

予想 0.1 から直ちに**定理 0.2** が従うわけではないことに注意しておく．これは多項式 F_k が一般に $\mathbb{Q}$-係数であるためである．整数性を示す鍵は，次の補題である．

補題 2.3

任意の $1 \leq m < \varphi(n)/2$ に対し

$$P_m\left(\frac{J_2(n)}{4}, \ldots, \frac{J_{2m}(n)}{4m}\right) \in \mathbb{Z}.$$

この補題を認めて**定理 0.2** を証明しよう．

定理 0.2 の証明．まず $\Phi_n(x)$ は $\varphi(n)$ 次の多項式であるので，$2k+1 > \varphi(n)$ に対して $\Phi_n^{(2k+1)}(x) = 0$ である．加えて，$n \geq 3$ に対して $\varphi(n)$ は偶数であるので，以下，$k < \varphi(n)/2$ の場合のみ考えれば良い．

定理 2.2 と**補題 2.3** より，

$$F_{2k+1}\left(x, \frac{J_2(n)}{4}, \ldots, \frac{J_{2k+1}(n)}{4k+2}\right)$$

が $\mathbb{Z}$-係数多項式であり，$\mathbb{Z}[x]$ において $x-k$ で割り切れること分かる．したがって**定理 1.2** より，$\Phi_n^{(2k+1)}(1)/\Phi_n(1) \in \mathbb{Z}$ が $\varphi(n)/2 - k \in \mathbb{Z}$ で割り切れることになり，**定理 0.2**（よりも少しだけ強い結果）が従う． □

あとは**補題 2.3** を示せば良いが，これは次の表示から従う．

補題 2.4

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} P_m\left(\frac{J_2(n)}{4}, \ldots, \frac{J_{2m}(n)}{4m}\right) u^{2m} = \frac{1}{\Phi_n(1)} \prod_{\substack{1 \leq k < n/2 \\ (k,n)=1}} \left(u^2 + 4\sin^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)\right).$$

また，右辺の多項式は最高次係数以外は整数係数である．

Proof. まず**定義 2.1** より，左辺は

$$\exp\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2B_{2\nu}}{(2\nu)!}\left(2\sinh^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)\right)^{2\nu} \frac{J_{2\nu}(n)}{4\nu}\right)$$

と等しいが，さらに Jordan totient 関数の定義 (1.2) と Bernoulli 数の母関数表示，および Möbius 関数のいくつかの性質から

$$= \frac{1}{\Phi_n(1)} \prod_{d \mid n} V_d(u)^{\mu(n/d)}$$

という積表示に辿り着く．ここで

$$V_n(x) = \prod_{1 \leq k < n/2} \left(x^2 + 4\sin^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)\right) \in \mathbb{Z}[x]$$

は Chebyshev 型の多項式であり，

$$\sinh(n\theta) = \begin{cases} \sinh\theta \cdot V_n(2\sinh\theta) & \text{if } n\text{：奇数} \\ \sinh 2\theta \cdot V_n(2\sinh\theta) & \text{if } n\text{：偶数} \end{cases}$$

を満たす．あとは Möbius の反転公式によって主張が得られる．係数の整数性については，Lebesgue の結果 (1.1) および Chebyshev 多項式の係数の明示公式から従う． □

Lehmer [11, §8] は論文の最後に，1 の冪根 ζ における係数 $\Phi_n^{(k)}(\zeta)$ についても少しだけ考察を述べている．これについても何か面白い現象があるだろうか．2021 年の RIMS 集会で著者が講演した内容 [3,12] も Lehmer の観察に端を発するものだったことを思い出すと，Lehmer の論文の中にはまだまだ沢山の面白い現象が眠っているのではないかという気がしてくる．一度，宝探しの旅へ出かけてみるのも良いかもしれない．

謝辞

本研究にあたり，秋山茂樹氏および金子元氏には沢山の有益なコメントを頂きました．また本稿および集会における講演の機会を与えてくださいました世話人の安福悠氏（日本大学），中筋麻貴氏（上智大学/東北大学）に感謝いたします．

参考文献

[1] S. Akiyama and H. Kaneko, *Curious congruences for cyclotomic polynomials*, Res. Number Theory **8** (2022), no. 4, Paper No. 102, 10.

[2] G. Bachman, *Ternary cyclotomic polynomials with an optimally large set of coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 7, 1943–1950.

[3] B. Bényi and T. Matsusaka, *Remarkable relations between the central binomial series, Eulerian polynomials, and poly-Bernoulli numbers, leading to Stephan's observation*, Kyushu J. Math. **77** (2023), no. 1, 149–158.

[4] J. Fintzen, *Cyclotomic polynomial coefficients $a(n,k)$ with n and k in prescribed residue classes*, J. Number Theory **131** (2011), no. 10, 1852–1863.

[5] A. Herrera-Poyatos and P. Moree, *Coefficients and higher order derivatives of cyclotomic polynomials: old and new*, Expo. Math. **39** (2021), no. 3, 309–343.

[6] M. Hidaka and M. Itoh, *The Schur polynomials in all nth primitive roots of unity.* RiMS Kôkyûroku, No.2139, Developments in Representation Theory and Related Topics.

[7] O. Hölder, *Zur Theorie der Kreisteilungsgleichung $K_m(x) = 0$*, Prace Mat. Fiz. **43** (1936), 13–23.

[8] H. Kaneko, *New relation for the coefficients of cyclotomic polynomials.* RiMS Kôkyûroku, No.2259, Analytic Number Theory and Related Topics.

[9] D. Kobayashi and S. Seki, せいすうたん 1–整数たちの世界の奇妙な物語. 日本評論社, 2023.

[10] V.-A. Lebesgue, *Dimonstrazione dell'irreduttibilitá dell'equazione formata con le radici primitive dell'unitá*, Ann. Mat. **2** (1859), 232–237.

[11] D. H. Lehmer, *Some properties of the cyclotomic polynomial*, J. Math. Anal. Appl. **15** (1966), 105–117.

[12] T. Matsusaka, 多重 *Bernoulli* 数の組合せ的解釈と *Stephan* の観察について. RiMS Kôkyûroku, No.2222, Analytic Number Theory and Related Topics.

[13] T. Matsusaka and G. Shibukawa, *Curious congruences for cyclotomic polynomials II*, Res. Number Theory **10** (2024), no. 1, Paper No. 3.

[14] A. Migotti, *Zur Theorie der Kreisteilungs-gleichung*, S.-B. der Math.-Naturwiss. Class der Kaiser. Akad. Der Wiss., Wien **87** (1883), 7–14.

[15] C. Sanna, *A survey on coefficients of cyclotomic polynomials*, Expo. Math. **40** (2022), no. 3, 469–494.
[16] J. Suzuki, *On coefficients of cyclotomic polynomials*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **63** (1987), no. 7, 279–280.